УДК 539.3

С.В. Левяков

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Напряженно-деформированное состояние тороидальных оболочек (криволинейных труб) при изгибе краевыми моментами впервые рассмотрено в работах [1, 2], где дана постановка задачи и найдены приближенные решения в рамках теории малых упругих перемещений. В [3—6] на основе различных подходов получены уточненные решения, позволяющие охватить широкий диапазон изменения геометрических характеристик труб.

В [7] с использованием допущений [2] исследовано нелинейное деформирование круговых цилиндрических оболочек при чистом изгибе и найдено значение предельного изгибающего момента, при котором происходит потеря устойчивости оболочки. В [8, 9] предприняты попытки уточнения результатов [7] путем удержания малых членов хотя, как и в [7], использовались линейные соотношения для окружной деформации и угла поворота касательной к контуру поперечного сечения. В [10] проблема конечного изгиба цилиндрической оболочки сведена к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений 4-го порядка, решению которой посвящены работы [11—14]. Нелинейное деформирование и устойчивость оболочек эллиптического поперечного сечения рассмотрены в [15]. В [16] получены нелинейные уравнения изгиба криволинейных труб и найдено приближенное аналитическое решение для малой начальной кривизны трубы. Приближенные решения задачи содержатся также в [17, 18]. Постановка задачи изгиба труб с позиций геометрически нелинейной теории оболочек обсуждалась в [19, 20]. В [19] на основе численного алгоритма исследовано также нелинейное деформирование тороидальных оболочек и проведено сравнение с результатами других авторов.

Анализ работ, посвященных задаче Дубяги—Кармана — Бразье, показывает, что в большинстве из них рассмотрены оболочки кругового поперечного сечения. Известные аналитические решения приемлемы лишь для оболочек малой начальной кривизны оси и не позволяют изучить напряженно-деформированное состояние при конечном изгибе, сопровождающемся значительным формоизменением поперечного сечения. Представляют интерес исследование на основе уточненной методики влияния геометрической нелинейности на величину и характер распределения напряжений в оболочках, а также оценка границ применимости известных приближенных решений.

Рассмотрим тонкостенную тороидальную оболочку, изгибаемую в плоскости кривизны ее осевой линии краевыми моментами M. Пусть форма поперечного сечения (меридиана) задана в параметрическом виде $x_i = x_i(s)$, где s — дуговая координата, $i = 1,2$. Примем, что поперечные сечения, ортогональные к осевой линии, остаются плоскими и ортогональными к осевой линии в процессе нагружения оболочки, но могут деформироваться в своей плоскости. Напряженно-деформированное состояние зависит только от координаты s, что соответствует постановке [1, 2, 7]. На основании принятых допущений и гипотез Кирхгофа—Лява запишем уравнение поверхности оболочки в исходном и деформированном состоянии в векторном виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{e}_i x_i + z\mathbf{n},\ \mathbf{R}^\vee = \mathbf{R}_0^\vee + \mathbf{e}_i^\vee x_i^\vee + z\mathbf{n}^\vee \ (i = 1,2), \tag{1}$$

где $\mathbf{R}_0$ — радиус-вектор осевой линии; $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(t)$ — единичные орты, лежащие в плоскости поперечного сечения; t — длина дуги осевой линии оболочки; $\mathbf{n} = \mathbf{e}_i\lambda_i^n$ — единичная нормаль к срединной поверхности оболочки; λ_i^n — направляющие косинусы нормали; z — координата, нормальная к срединной поверхности оболочки; значком $\vee$ отмечены величины, относящиеся к деформированному состоянию. Здесь и далее принято правило суммирования по повторяющимся индексам.

С использованием уравнений (1) получим соотношения для деформаций и искривлений срединной поверхности оболочки в меридиональном и осевом направлениях:

$$
(2) \qquad \varepsilon_s = \frac{1}{2}(x_i^{\vee\prime} x_i^{\vee\prime} - 1),\ \varkappa_s = x_i^{\vee\prime}\lambda_i^{n\,\vee\prime} - x_i'\lambda_i^{n\prime},
$$

$$
\varepsilon_t = A_t^{-1}(\varepsilon + k^\vee x_1^\vee - kx_1),\ \varkappa_t = A_t^{-1}(k^\vee \lambda_1^{n\vee} - k\lambda_1^n).
$$

Здесь $A_t = 1 + kx_1$ — параметр Ламе; ε, k — деформация и кривизна осевой линии; штрихом обозначена производная по координате s.

Потенциальная энергия деформации тороидальной оболочки с единичной длиной осевой линии записывается в виде

$$
(3) \qquad \Pi = \frac{1}{2}\int(T_s\varepsilon_s + T_t\varepsilon_t + M_s\varkappa_s + M_t\varkappa_t)A_t\,ds,
$$

где T_s, T_t, M_s, M_t — усилия и изгибающие моменты, которые для случая изотропного линейно-упругого тела связаны с деформациями и искривлениями (2) следующими соотношениями:

$$
(4) \qquad T_s = B(\varepsilon_s + \nu\varepsilon_t),\ T_t = B(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_s),
$$

$$
M_s = D(\varkappa_s + \nu\varkappa_t),\ M_t = D(\varkappa_t + \nu\varkappa_s),
$$

$$
B = Eh(1 - \nu^2)^{-1},\ D = Bh^2/12.
$$

Здесь E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина оболочки.

Полная потенциальная энергия оболочки имеет вид $U = \Pi - A$, где $A = M(k^\vee - k)$ — работа внешних изгибающих моментов.

Разобьем оболочку в меридиональном направлении на конечные элементы с длиной l. Записывая разложение неизвестных функций в ряд Тейлора и пренебрегая членами порядка $O(l^2)$, получим аппроксимационный вариант деформационных соотношений (2) для конечного элемента:

$$
(5) \qquad \varepsilon_t = A_t^{-1}(\varepsilon + k^\vee x_1^\vee - kx_1),\ \varkappa_t = A_t^{-1}(k^\vee \lambda_1^{n\vee} - k\lambda_1^n),
$$

$$
\varepsilon_s = \frac{1}{2}(b_i b_k x_{ji}^\vee x_{jk}^\vee - 1),
$$

$$
\varkappa_s = N_i\theta_i,\ \theta_i = b_k(\lambda_{ji}^{n\,\vee} x_{jk}^\vee - \lambda_{ji}^n x_{jk}),
$$

$$
A_t = 1 + kx_1,\ x_1 = \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12}),\ \lambda_1^n = \frac{1}{2}(\lambda_{11}^n + \lambda_{12}^n),
$$

$$
b_1 = -b_2 = -1/l,\ N_1 = (6s - 4l)l^{-2},\ N_2 = (6s - 2l)l^{-2}
$$

(x_{ij}, λ_{ij}^n $(i,j = 1,2)$ — значения координат и направляющих косинусов нормали в j-м узле элемента).

Введем в рассмотрение пятикомпонентный вектор обобщенных упругих перемещений

$$
\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = |\varepsilon_s, \theta_1, \theta_2, \varepsilon_t, \varkappa_t|.
$$

Подставляя соотношения (4), (5) в (3) и проводя интегрирование в пределах от 0 до l, получим потенциальную энергию деформации элемента в виде

Таблица 1

α	μ				
	0	1	2	5	10
	$\sigma_*^* r/Eh$				
0,5	0,141 (0,141)	0,119 (0,117)	0,087 (0,077)	0,057	0,047
1	0,262 (0,265)	0,198 (0,192)	0,145 (0,128)	0,105	0,088
1,5	0,341 (0,352)	0,235 (0,231)	0,187 (0,165)	0,146	0,126
2	0,367 (0,385)	0,260 (0,257)	0,221 (0,192)	0,184	0,161
2,5	0,359 (0,385)	0,283 (0,275)	0,253 (0,214)	0,219	0,192
3	0,360 (0,385)	0,307 (0,289)	0,282 (0,231)	0,250	0,223

$\Pi = (1/2)\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u}$, где отличные от нуля коэффициенты симметричной матрицы жесткости **K** определяются выражениями

$$K_{11} = BA_i l,\ K_{14} = \nu K_{11},\ K_{22} = Dl^{-1}[4 + k(3x_{11} + x_{12})],$$
$$K_{23} = 2DA_i l^{-1},\ K_{25} = -\nu D(1 + kx_{11}),$$
$$K_{33} = Dl^{-1}[4 + k(x_{11} + 3x_{12})],\ K_{35} = \nu D(1 + kx_{12}),$$
$$K_{44} = K_{11},\ K_{55} = DA_i l.$$

Одна из особенностей данной формулировки задачи состоит в том, что конечный элемент оболочки содержит нижеследующие узловые, а также внеузловые неизвестные, которые образуют вектор обобщенных координат **q**:

$$\mathbf{q}^T = |x_{11}^\vee,\ x_{21}^\vee,\ \varphi_1^\vee,\ x_{12}^\vee,\ x_{22}^\vee,\ \varphi_2^\vee,\ \varepsilon,\ k^\vee|$$

($\varphi_i^\vee$ — угол поворота нормали в i-м узле).

Таблица 2

α	μ				
	0	1	2	5	10
	$\sigma_*^* r/Eh$				
0,5	0,032 (0,031)	0,088 (0,094)	0,121 (0,156)	0,127	0,103
1	0,133 (0,125)	0,234 (0,250)	0,273 (0,375)	0,254	0,205
1,5	0,309 (0,281)	0,413 (0,469)	0,433 (0,656)	0,377	0,306
2	0,531 (0,500)	0,594 (0,750)	0,584 (1,000)	0,494	0,404
2,5	0,748 (0,781)	0,758 (1,094)	0,723 (1,406)	0,605	0,501
3	0,935 (1,125)	0,903 (1,500)	0,848 (1,875)	0,712	0,594

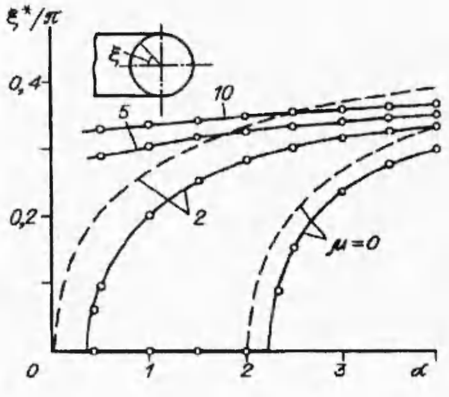

Рис. 1

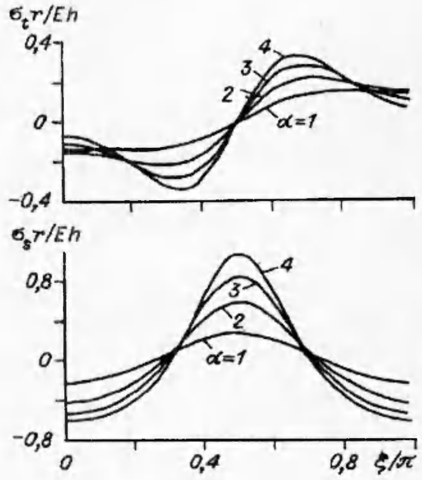

Рис. 2

Запишем разложение потенциальной энергии элемента в ряд Тейлора по приращениям обобщенных координат $\delta \mathbf{q}$ в окрестности некоторого деформированного состояния:

$$\Pi = \Pi_0 + \delta\Pi + \frac{1}{2}\delta^2\Pi + \ldots, \tag{6}$$

$$\delta\Pi = \mathbf{g}^{\mathrm{T}}\delta\mathbf{q}, \quad \delta^2\Pi = \delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\delta\mathbf{q}$$

($\mathbf{g}$, $\mathbf{H}$ — градиент и матрица Гесса потенциальной энергии). Для потенциальной энергии П, являющейся квадратичной формой относительно компонент вектора $\mathbf{u}$, можно получить следующие выражения [21]:

$$\mathbf{g} = \mathbf{u}'\mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{u},$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{u}'\mathbf{K}\mathbf{u}'^{\mathrm{T}} + P_i\mathbf{u}''_i \quad (i = 1,\ldots,5)$$

($\mathbf{u}'$, $\mathbf{u}''_i$ — матрицы, содержащие первые и вторые производные от компонент вектора $\mathbf{u}$ по обобщенным координатам).

Если ограничиться выписанными членами разложения (6), то применение принципа стационарности полной потенциальной энергии $\delta U = 0$ для ансамбля конечных элементов приводит к системе уравнений

$$\mathbf{H}\delta\mathbf{q} + \mathbf{g} - \mathbf{Q} = 0, \tag{7}$$

где $\mathbf{g}$, $\mathbf{H}$ — градиент и матрица Гесса ансамбля конечных элементов; $\mathbf{Q}$ — вектор обобщенных внешних сил. Решение системы уравнений (7) представляет собой один шаг итерационного процесса нахождения равновесного состояния дискретной системы. После определения $\delta\mathbf{q}$ новые значения неизвестных вычисляются по следующим формулам (по j не суммировать):

$$(x_{ij}^{\vee})^* = x_{ij}^{\vee} + \delta x_{ij}^{\vee}, \quad (\lambda_{ij}^{n\vee})^* = \lambda_{ij}^{n\vee}\cos\delta\varphi_j^{\vee} + \lambda_{ij}^{\vee}\sin\delta\varphi_j^{\vee},$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon + \delta\varepsilon, \quad (k^{\vee})^* = k^{\vee} + \delta k^{\vee}$$

($\lambda_{ij}^{\vee}$ — направляющие косинусы единичного вектора ортогонального $\mathbf{n}_j^{\vee}$). Процесс решения по схеме (7) повторяется до удовлетворения заданной точности нахождения неизвестных.

В качестве основных исходных данных при расчете тороидальных оболочек требуется задание значений координат и направляющих косинусов нормали в узлах рассматриваемого поперечного сечения.

Исследуем напряженное состояние тороидальных оболочек кругового поперечного сечения с радиусом r, характеризуемых различными значе-

Таблица 3

α	m	α	m
−4,8	−1,00	14,4	0,586
−2,4	−0,395	16,8	0,594
2,4	0,245	19,2	0,595
4,8	0,393	24	0,586
9,6	0,537		

ниями параметра кривизны $\mu = (12(1 - \nu^2))^{1/2} kr^2/h$ при $r/h = 100$, $\nu = 0$. В табл. 1, 2 представлены зависимости максимальных осевых σ_t^* и меридиональных (окружных) σ_s^* напряжений от параметра искривления осевой линии $\alpha = \mu^{v} - \mu$.

Отметим, что точка появления максимальных осевых напряжений σ_t^*, имеющая угловую координату ξ^*, в процессе деформирования оболочки смещается в направлении нейтральной линии (рис. 1). Причем наиболее заметно это смещение для оболочек, имеющих малый параметр кривизны ($\mu < 5$). Для $\mu > 10$ максимальные напряжения возникают вблизи нейтральной линии, и соответствующая координата ξ^* слабо изменяется при изгибе оболочки. Приближенные решения [7, 16], представленные штриховыми линиями на рис. 1 и значениями в скобках в табл. 1, 2, удовлетворительно описывают напряженное состояние оболочек лишь с малой начальной кривизной ($\mu \leq 1$). Наибольшую погрешность дают результаты [16] в определении максимальных окружных напряжений σ_s^*, которые возникают в точке $\xi = \pi/2$. Так, для $\mu = 1$ в области малых искривлений оси оболочки ($\alpha < 0,5$) относительная ошибка составляет 6 % и возрастает до 26 % при $\alpha = 2$.

На рис. 2 показано распределение напряжений по сечению оболочки с параметром $\mu = 2$ для различных значений α. В результате сплющивания поперечного сечения наибольшими по величине являются окружные напряжения σ_s, которые возникают в основном за счет изгиба стенки.

Рассмотрим изгиб тороидальной оболочки с некруговым сечением, форма которого описывается выражением [22]

$$\theta = \xi + 0,5\sin\xi - 0,9452\sin 2\xi + 0,3\sin 3\xi - 0,4\sin 4\xi, \quad \xi = s/r,$$

где θ — угол между нормалью n и осью x_1; $r = L/2\pi$ — приведенный радиус сечения; L — периметр сечения. Декартовы координаты определяются численным интегрированием соотношений $x_1' = -\sin\theta$, $x_2' = \cos\theta$.

Исследование линейной задачи изгиба оболочек с различными параметрами кривизны осевой линии показывает, что в области больших зна-

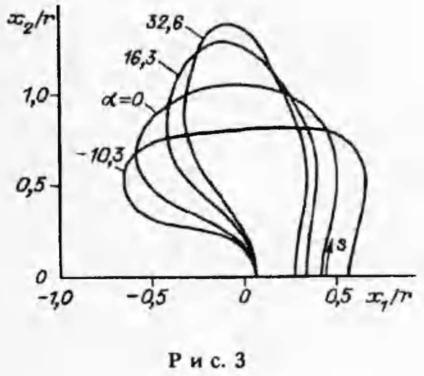

Рис. 3

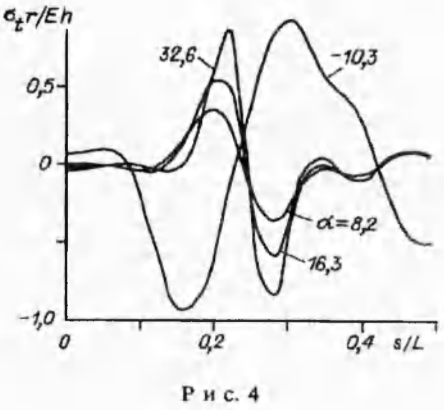

Рис. 4

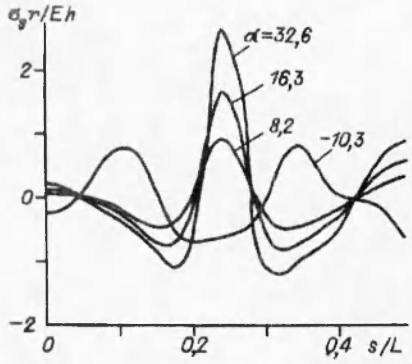

Рис. 5

чений $\mu > 30$ для коэффициента гибкости f справедлива формула $f = 0{,}155\mu$.

В табл. 3 представлена зависимость между безразмерными параметрами изгибающего момента $m = (12(1 - \nu^2))^{1/2}Mr^2/hEI$ (I — момент инерции поперечного сечения) и искривления осевой линии оболочки α для $r/h = 100$, $\nu = 0{,}3$, $\mu = 50$. Линейное решение задачи $m = \alpha/f$ приемлемо в узком диапазоне $-0{,}4 \leq \alpha \leq 0{,}4$. Значение предельного момента при сгибании оболочки ($\alpha > 0$) составляет $m \simeq 0{,}6$.

Формы деформированного поперечного сечения для различных значений α представлены на рис. 3. На рис. 4, 5 показано распределение напряжений по сечению оболочки. Осевые напряжения вычислялись для срединной поверхности, а меридиональные — для наружной поверхности оболочки. Отметим, что при $\alpha > 0$ напряжения локализуются вблизи нейтральной линии, причем меридиональные напряжения превосходят осевые в 2—2,5 раза.

В заключение отметим, что для расчета напряженно-деформированного состояния оболочки в диапазоне искривлений $-4{,}8 < \alpha < 24$ потребовалось около 4 мин при проведении вычислений на компьютере PC AT 286 с двойной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дубяга К.М.** Изгиб тонкостенных кривых трубок // Изв. С.-Петербургского политехн. ин-та. — 1909. — Т. 11, № 2. — С. 663—675.
2. **Karman Th.** Die Formanderung dunnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausglichrohre // Z. VDI. — 1911. — Bd 55, N 45. — S. 1889—1895.
3. **Karl H.** Biegung gekrummter, dunnwandiger rohre // Z. angew. Math. Mech. — 1943. — Bd 23, N 6. — S. 331—345.
4. **Beskin L.** Bending of curved thin tubes // J. Appl. Mech. — 1945. — V. 12, N 1. — P. A1—A7.
5. **Clark R.A., Reissner E.** Bending of curved tubes // Advances in Applied mechanics. — N. Y.: Acad. Press, 1951. — V. 2. — P. 93—122.
6. **Cheng D.H., Thailer H.J.** On bending of curved circular tubes // Trans. ASME. Ser. B.J. Engng Industry. — 1970. — V. B92, N 1. — P. 62—66.
7. **Brazier L.G.** On the flexure of thin cylindrical shells and other «thin» sections // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1927. — V. 116, N 773. — P. 104—114.
8. **Heck O.S.** Über der Stabilität orthotroper elliptischer Zylinderschalen bei reiner Biegung // Luftfahrforschung. — 1937. — Bd 14, N 3. — S. 137—147.
9. **Коновалов Ю.В.** Изгиб бесконечной цилиндрической оболочки // ПММ. — 1940. — Т. 4, № 5, 6. — С. 35—54.
10. **Reissner E., Weinitschke H.J.** Finite pure bending of circular cylindrical tubes // Quart. Appl. Math. — 1963. — V. 20, N 4. — P. 305—312.
11. **Reissner E., Weinitschke H.J.** Corrections to «Finite pure bending of circular cylindrical tubes» // Quart. Appl. Math. — 1966. — V. 23, N 4. — P. 368.
12. **Perrone N., Kao R.** A general nonlinear relaxation iteration technique for solving nonlinear problems in mechanics // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. — 1971. — V. 38, N 2. — P. 371—376.
13. **Na T.Y., Turski C.E.** Solution of the nonlinear differential equations for finite bending of thin-walled tubes by parameter differentiation // Aeronaut. Quart. — 1974. — V. 25, N 1. — P. 14—18.
14. **Thurston G.A.** The critical bending moment of circular cylindrical tubes // Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech. — 1977. — V. 44. — P. 173—175.
15. **Spence J., Toh S.L.** Collapse of thin orthotropic elliptical cylindrical shells under combined bending and pressure loads // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. — 1979. — V. 46. — P. 363—371.
16. **Reissner E.** On finite bending of pressurized tubes // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. — 1959. — V. 26, N 3. — P. 386—392.
17. **Костовецкий Д.Л.** Изгиб кривых тонкостенных труб в области больших упругих перемещений // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1960. — № 3. — С. 49—54.
18. **Аксельрад Э.Л.** Изгиб тонкостенных стержней при больших упругих перемещениях // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1961. — № 3. — С. 124—132.

19. **Boyle J.T.** The finite bending of curved pipes // Int. J. Solids Structures. — 1981. — V. 17, N 5. — P. 515—529.
20. **Reissner E.** On the finite pure bending of curved tubes // Int. J. Solids Structures. — 1981. — V. 17, N 9. — P. 839—844.
21. **Кузнецов В.В., Левяков С.В.** Нелинейная задача Кармана для тороидальных оболочек произвольного поперечного сечения // Изв. РАН. МТТ. — 1992. — № 2. — С. 136—142.
22. **Whatham J.F.** Analysis of pipe bends with symmetrical noncircular cross sections // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. — 1987. — V. 54, N 3. — P. 604—610.

г. Новосибирск *Поступила 10/III 1994 г.*

УДК 539.3

М.А. Задоян, Н.Б. Сафарян

ПЛОСКОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОГО КЛИНА

Рассматривается напряженное состояние на крае контактной линии составного клиновидного тела со степенным законом упрочнения материалов в условиях плоского напряженного состояния. Обстоятельное исследование в этой области для линейно-упругих составных тел приведено в [1]. В [2] изучаются вопросы малонапряженности составных тел со степенным упрочнением материалов в условиях плоской деформации. Аналогичные вопросы на крае контактной поверхности неоднородно составного клина при продольном сдвиге и плоской деформации изучены в [3].

Исследование задачи малонапряженности в случае плоского напряженного состояния, очевидно, сложнее по сравнению с соответствующей задачей плоской деформации.

В настоящей работе для плоского напряженного состояния при помощи местного решения изучается поведение поля напряжений в окрестности края поверхности соединения составного тела, когда поверхности, образующие ребро, считаются свободными от напряжений (рис. 1).

В полярной системе координат угловая точка выбрана за начало системы координат, ось $\theta = 0$ направлена по контактной поверхности, а ось z — перпендикулярно к плоскости тела. В каждой области поперечного сечения имеем уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} = 0.$$

Закон упрочнения запишем в виде

$$\sigma_0 = k\varepsilon_0^m, \tag{2}$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{r\theta}^2};\ \varepsilon_0 = 2\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2 + \gamma_{r\theta}^2}$$

— соответственно интенсивности касательных напряжений и деформации сдвига; m — показатель упрочнения. Принимается, что степени упрочнения m обоих материалов одинаковы, а модули деформации k различны.

Соотношения между компонентами деформаций и перемещений:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r},\ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\ 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta};$$