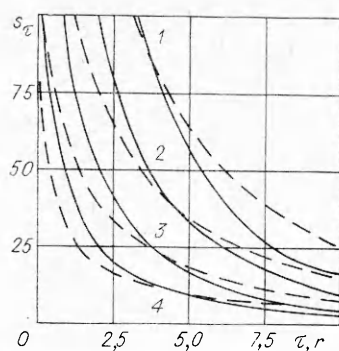
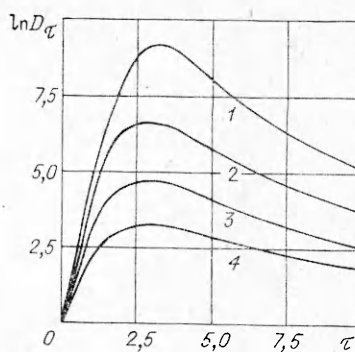




Р и с. 5



Р и с. 6

на рис. 5). Видно, что наибольшая величина амплитуды изгибных возмущений в начале движения растет практически экспоненциально, а затем начинает сравнительно медленно уменьшаться.

В результате роста возмущений разрушение пленки произойдет в момент τ_1 , когда $\chi(\tau_1) = -1$. Характерный размер кусков, на которые пленка распадается, равен при этом $l_1 = 2\pi R_0(\tau_1)/s_\tau(\tau_1)$.

Авторы признательны В. М. Ентову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. М., Шер Е. Н. Об устойчивости течения идеальной жидкости в полосе и кольце // ПМТФ.— 1964.— № 2.
2. Ентов В. М., Султанов Ф. М., Ярин А. Л. Распад жидких пленок под действием перепада давления окружающего газа // ДАН СССР.— 1985.— Т. 284, № 5.
3. Ентов В. М., Султанов Ф. М., Ярин А. Л. Распад жидких пленок под действием перепада давления окружающего газа // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 3.
4. Стебновский С. В. Развитие начальных возмущений внешней границы расширяющегося газожидкостного кольца // ПМТФ.— 1982.— № 5.
5. Стебновский С. В., Чернобаев Н. Н. Энергетический порог импульсного разрушения жидкого объема // ПМТФ.— 1986.— № 1.
6. Султанов Ф. М., Ярин А. Л. О радиальном расширении цилиндрических слоев вязких и реологически сложных жидкостей // ИФЖ.— 1986.— Т. 50, № 6.
7. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров.— М.: Химия, 1984.
8. Ентов В. М. Динамика пленок вязких и упругих жидкостей.— М., 1979.— (Препринт/ИИМ АН СССР; № 130).
9. Entov V. M. On the dynamics of films of viscous and elastoviscous liquids // Arch. Mech. Stosow.— 1982.— V. 34, N 4.
10. Виноградов Г. В., Малкин А. Я. Реология полимеров.— М.: Химия, 1977.
11. Ярин А. Л. Изгибные возмущения свободных струй жидкостей Максвелла и Дой-Эдвардса // ПМТФ.— 1986.— № 6.

Поступила 29/I 1987 г.

УДК 532.5:531.001.362

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРОНИКАНИЯ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ В ИДЕАЛЬНУЮ СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ (СВЕРХЗВУКОВОЙ СЛУЧАЙ)

Ф. М. Бородич
(Москва)

В линейной постановке рассматривается пространственная задача проникания затупленного тела в полупространство идеальной сжимаемой жидкости, когда скорость расширения границы смоченной поверхности тела больше скорости звука в жидкости (сверхзвуковой случай).

Известно, что решение таких задач в общей постановке дается формулой запаздывающего потенциала [1—5]. В работе выделяется класс автомодельных задач проникания затупленных тел в сжимаемую жидкость. Показано, что для осесимметричных автомодельных задач общие формулы упрощаются. Приведены результаты некоторых

численных расчетов. Для автомоделной задачи о проникании затупленного конуса результаты совпадают с полученными в [1, 4].

1. Постановка задачи. Пусть жесткое затупленное тело проникает со скоростью $V(t)$ в идеальную невесомую слабо сжимаемую жидкость, занимающую в состоянии покоя полупространство $x_3 \geq 0$. Скорость тела принимается перпендикулярной плоскости $x_3 = 0$. Предполагается, что $V(t)$ на всем протяжении процесса мала по сравнению с a (скоростью звука в жидкости), а также, что скорость расширения области взаимодействия тела с жидкостью в каждой точке ее границы в любой момент времени больше скорости звука (скорость расширения вычисляется по нормали к границе).

Начало декартовой системы координат берется в первоначальной точке касания тела со свободной поверхностью. Ось x_3 направлена в глубь жидкости, а оси x_1 и x_2 — по первоначальной свободной поверхности.

Проникающие тела затуплены, т. е. считаем, что угол между касательной плоскостью к телу и плоскостью $x_3 = 0$ мал на всем интервале времени рассмотрения задачи; глубина проникания мала и решение задачи проникания можно искать на основе линеаризованных уравнений гидродинамики [1—3]. Граничные условия с границы контакта тела с жидкостью сносятся на плоскость $x_3 = 0$. Возникшее течение считается потенциальным.

Скорость частиц жидкости $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ и давление $p(\mathbf{x}, t)$ определяются через потенциал Φ по формулам [1—5]

$$(1.1) \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \text{grad } \Phi(\mathbf{x}, t), \quad p = -\rho \partial \Phi(\mathbf{x}, t) / \partial t$$

(ρ — начальная плотность жидкости). Тогда задача проникания сводится к отысканию потенциала $\Phi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющего волновому уравнению

$$(1.2) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall t > 0,$$

граничному условию

$$(1.3) \quad \partial \Phi(x_1, x_2, 0, t) / \partial x_3 = V(t), \quad (x_1, x_2) \in G(t)$$

($G(t)$ — область взаимодействия тела с жидкостью) и условию

$$(1.4) \quad \Phi \equiv 0$$

на фронте волны и перед ним.

Область взаимодействия $G(t)$ в сверхзвуковом случае непосредственно определяется по форме поверхности проникающего тела. А именно, если поверхность затупленного тела задается функцией $x_3 = -f(x_1, x_2)$, то точки $(x_1^*(t), x_2^*(t))$, лежащие на границе $\partial G(t)$ области взаимодействия, в момент времени t удовлетворяют условию

$$(1.5) \quad f(x_1^*, x_2^*) = \int_0^t V(\xi) d\xi.$$

2. Пространственные автомоделные задачи. Общие методы выделения преобразований подобия, допускаемых дифференциальными уравнениями, излагаются в [6]. Ниже рассматривается только одно преобразование, допускаемое уравнением (1.2) — преобразование растяжения координат, т. е. автомоделные задачи. В этом классе задач для тел, поверхность которых определяется положительной гладкой однородной функцией степени d ($d \geq 1$), получено следующее утверждение подобия.

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть форма поверхности тела задается функцией f такой, что

$$(2.1) \quad \forall \lambda \geq 0 \quad f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^d f(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in R^2, \\ f(x_1, x_2) \in C^1(R^2 \setminus \{0\}), \quad f(x_1, x_2) > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in R^2 \setminus \{0\},$$

а скорость проникания — степенная функция вида

$$(2.2) \quad V(t) = V(1)t^{(d-1)}$$

($V(1)$ — постоянная).

Тогда, если решение задачи (1.2)—(1.5), задаваемое потенциалом Φ , известно в момент времени t_1 ($t_1 > 0$), то для произвольного момента времени t ($t > 0$) решение определяется по подобию соотношением

$$(2.3) \quad \Phi(x, t) = \lambda^{-d} \Phi(\lambda x, t_1) \quad (\lambda = t_1/t).$$

При этом область $G(t)$ будет получаться из $G(t_1)$ гомотетией с центром в начале координат: $((x_1, x_2) \in G(t)) \Leftrightarrow ((\lambda x_1, \lambda x_2) \in G(t_1))$. Доказательство этого утверждения проводится непосредственной проверкой того, что выражение (2.3) с учетом (2.1), (2.2) удовлетворяет условиям (1.2)—(1.5). Проверка осуществляется таким же образом, как и при доказательстве теоремы подобия в пространственной контактной задаче теории упругости (см., например, [7]).

С л е д с т в и е. Из утверждения 1 и условий (1.1) вытекает, что в рассматриваемом случае вектор скоростей и давление в точке жидкости также определяются по подобию: $v(x, t) = \lambda^{(1-d)} v(\lambda x, t_1)$, $p(x, t) = \lambda^{(1-d)} \times \times p(\lambda x, t_1)$.

З а м е ч а н и е. Аналогичное утверждение о подобии справедливо и в дозвуковом случае рассматриваемой задачи.

3. Решение задач для тел вращения. Известно [1, 3, 7], что потенциал скоростей в задаче для тела произвольной формы можно записать в виде

$$(3.1) \quad \Phi(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \int \frac{\partial \Phi / \partial x_3(\xi, \eta, 0, t - r_1/a)}{r_1} d\xi d\eta,$$

где $r_1 = \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2 + x_3^2}$. При этом сила F , с которой тело действует на жидкость, определяется из выражения [5]

$$(3.2) \quad F(t) = \rho a S V(t)$$

(S — площадь области $G(t)$). Отметим, что функция $\partial \Phi / \partial x_3(\xi, \eta, 0, t - r_1/a)$ известна: если $(\xi, \eta) \in G(t - r_1/a)$, то она равна $V(t - r_1/a)$, в противном случае она равна нулю. Таким образом, задача в принципе решена для тела произвольной формы. Однако решение конкретных задач встречает определенные трудности [1—4].

Для тела вращения в цилиндрической системе координат r, θ, z ($x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, $x_3 = z$) получим, что форма тела в начальный момент удовлетворяет уравнению $z = -f(r)$.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть затупленное тело вращения, форма которого описывается произвольной монотонно возрастающей гладкой функцией $f(r)$, $f(0) = 0$, со скоростью $V(t)$ проникает в полупространство идеальной сжимаемой жидкости. При этом

$$(3.3) \quad V(t) = cf'(ct)$$

(c — положительная постоянная). Тогда скорость распространения границы области взаимодействия $\partial G(t)$ постоянна и равна c .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r_*(t)$ — радиус границы области взаимодействия $\partial G(t)$. Тогда из (1.5) и (3.3) имеем $f(r_*(t)) = \int_0^t V(\tau) d\tau = f(ct)$, отсюда получаем $r_*(t) = ct$, т. е. справедливо утверждение 2.

Если обозначить через M отношение постоянной скорости c расширения радиуса r_* к скорости звука a , то $r_*(t) = Mat$, $M = c/a$, $M > 1$. Если тело вращения определяется степенной функцией $z = -Ar^d$ ($A > 0$), а скорость тела — выражением (2.2), то $c = (V(1)/Ad)^{1/d}$.

Для тела, форма которого описывается степенной функцией, сила взаимодействия с жидкостью с учетом (3.2) $F(t) = \pi \rho (Ad)^{-(2/d)} V(1)^{(1+2/d)} t^{(d+1)}$.

Выражение (3.4) для потенциала скоростей примет вид

$$(3.4) \quad \Phi(r, z, t) = -\frac{V(t)}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{(t-r_1/a)^{(d-1)}}{r_1} \psi d\psi d\theta,$$

где $r_1 = \sqrt{r^2 + z^2 + \psi^2 - 2r\psi \cos \theta}$; $\psi = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$; θ — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\boldsymbol{\psi}$.

Для предельных значений $(\theta)_{1,2}$ и $(\psi)_{1,2}$ (аналогично тому, как это сделано в автомоделной задаче о тупом конусе [1, 4]) с учетом (3.3) получим: при $r^2 + z^2 \leq a^2 t^2$

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 2\pi, \quad \psi_1 = 0,$$

$$\psi_2 = -\frac{M}{M^2 - 1} [at - Mr \cos \theta - \sqrt{(at - Mr \cos \theta)^2 + (a^2 t^2 - r^2 - z^2)(M^2 - 1)}],$$

при $r^2 + z^2 > a^2 t^2$

$$\psi_{1,2} = -\frac{M^2}{(M^2 - 1)} [at - Mr \cos \theta \pm \sqrt{(at - Mr \cos \theta)^2 + (a^2 t^2 - r^2 - z^2)(M^2 - 1)}],$$

$$\theta_1 = -\theta_*, \quad \theta_2 = \theta_*, \quad \theta_* = \arccos \left[\frac{at + \sqrt{(1 - M^2)(a^2 t^2 - r^2 - z^2)}}{Mr} \right].$$

Введем безразмерные переменные $r_0, z_0, \psi_0, (\psi_*)_0, V_0, \Phi_0, p_0$ по формулам $r_0 = r/(at)$, $z_0 = z/(at)$, $\psi_0 = \psi/(at)$, $(\psi_*)_0 = \psi_*/(at)$, $V_0 = V/a$, $\Phi_0 = \Phi/(a^2 t)$, $p_0 = p/(a^2 V_0)$. Далее будем пользоваться только безразмерными переменными, а индекс нуль опустим. Тогда выражение (3.4) запишем как

$$(3.5) \quad \Phi(r, z, t) = -\frac{V(t)}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{(1-r_1)^{(d-1)}}{r_1} \psi d\psi d\theta.$$

В случае, когда d — натуральное число, из (3.5) следует

$$\Phi = -\frac{V(t)}{2\pi} \left[\Phi_1 + \sum_{n=1}^K \frac{(d-1)(d-2)\dots(d-2n)}{(2n)!} P_{2n-1} - \sum_{n=1}^L \frac{(d-1)\dots(d-2n+1)}{(2n-1)!} P_{2n-2} \right],$$

где $K = N - 1$, $L = N$ при $d = 2N$, $\forall N = 1, 2, \dots$; $K = N$, $L = N + 1$ при $d = 2N + 1$, $\forall N = 0, 1, \dots$. Здесь введены обозначения:

$$(3.6) \quad \Phi_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{1}{r_1} d\psi d\theta, \quad P_{2n-2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} (r_1^2)^{(n-1)} \psi d\psi d\theta,$$

$$P_{2n-1} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} (r_1)^{(2n-1)} \psi d\psi d\theta.$$

Внутренние интегралы в выражениях (3.6) можно взять явным образом.

В качестве примера рассмотрим случай $d = 2$, т. е. задачу о равноускоренном проникании в жидкость параболоида. При этом

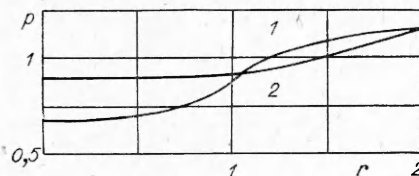
$$\Phi = -\frac{V(t)}{2\pi} [\Phi_1 - P_0] = -\frac{V(t)}{2\pi} \left[\Phi_1 - \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\psi_2^2 - \psi_1^2) d\theta \right].$$

Функцию Φ_1 можно привести к виду

$$\Phi_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[r_1(\psi_2) - r_1(\psi_1) + r \cos \theta \ln \frac{\psi_2 - r \cos \theta + r_1(\psi_2)}{\psi_1 - r \cos \theta + r_1(\psi_1)} \right] d\theta,$$

который дает решение задачи о проникании в сжимаемую жидкость тупого конуса [1].

На рисунке представлены графики распределения давления p по смоченной поверхности тела в двух автомоделных задачах при $M = 2$: кривая 1 — проникание конуса ($d = 1$), 2 — параболоида ($d = 2$).



Автор благодарит А. Г. Хованского за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомонян А. Я., Поручиков В. Б. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. — М.: Изд-во МГУ, 1970.
2. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. — Л.: Судостроение, 1976.
3. Кубенко В. Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. — Киев: Наук. думка, 1981.
4. Шамгунов Ш. Д. Удар произвольным тупым телом вращения по границе полупространства, занятого сжимаемой жидкостью // Материалы Всесоюз. симпоз. по распространению упругопластических волн в сплошной среде. — Баку: Изд-во АН АзССР, 1966.
5. Skalak R., Feit D. Impact on the surface of a compressible fluid // Trans. ASME. — 1966. — V. B88, N 3. Рус. пер. Удар о поверхность сжимаемой жидкости // Конструирование и технология машиностроения. — М.: Мир, 1966. — Т. 88, № 3.
6. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
7. Бородин Ф. М. О задаче контакта двух предварительно искаженных полупространств // ПМТФ. — 1984. — № 2.

Поступила 16/III 1987 г.

УДК 532.517.4

О РАСЧЕТЕ ПУЛЬСАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ

В. А. Павловский

(Ленинград)

При описании поведения сплошной среды используются инварианты тензоров, характеризующих состояние среды [1—4]. Идеи, лежащие в основе определения связей между инвариантами в механике твердого деформируемого тела [2, 4], можно применить и в механике жидкости.

Инварианты тензора напряжений Рейнольдса. Тензор напряжений Рейнольдса R можно записать в бескомпонентной (бескоординатной) форме [1]

$$R = -\rho \overline{v' \otimes v'}.$$

Здесь v' — вектор пульсационной скорости; ρ — плотность жидкости; $\otimes$ — знак тензорного умножения; черта — осреднение по Рейнольдсу. Этот тензор, как и любой другой тензор второго ранга, может быть представлен в произвольном базисе e_i как $R = R^{ij} e_i \otimes e_j$. Его физические компоненты R_{ij} образуют матрицу, элементы которой хорошо поддаются измерениям в потоке с помощью термоанемометра. В базисе (e_1, e_2, e_3) с со-