$$(49) \qquad -1 < \nu < 0.$$

Таким образом, материал (44) традиционный изотропный, и для него коэффициент Пуассона в пределах (48). Материал (45) качественно другой: при растяжении стержня в продольном направлении он увеличивается в поперечных размерах; для него коэффициент Пуассона в пределах (49).

Для (37) $\nu = 0$. Класс материалов (37) как бы лежит между классом материалов (44), сокращающихся в поперечнике при продольном растяжении стержня, и классом материалов (45), расширяющихся в поперечнике при тех же условиях.

Во многих руководствах по теории упругости [1, с. 114; 4, с. 25; 12, с. 100; 14, с. 256] говорится, что в опытах не обнаружено материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона. В [5] рекомендуется для разыскания материалов с отрицательным ν проводить опыты при очень низких температурах, близких к абсолютному нулю, а также дается ссылка на опыты, в которых $\nu = -0{,}102$.

Приведенные примеры показывают полезность предложенной классификации упругих материалов. В дальнейшем следует изучить все 32 класса упругих материалов более детально. В [15—17] предлагается аналогичный подход к выяснению структуры обобщенного закона Гука. В [16] собственные тензоры t_{ijpq} построены в общем виде в зависимости от 15 произвольных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляв А.** Математическая теория упругости.— М.— Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.
2. **Новацкий В.** Теория упругости.— М.: Мир, 1975.
3. **Новожилов В. В.** Теория упругости.— Л.: Судпромгиз, 1958.
4. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости.— М.: Наука, 1965.
5. **Бехтерев П.** Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение учения о потенциальной энергии и начала наименьшей работы.— Журн. Рус. физ.-хим. о-ва при Ленинград. ун-те. Часть физ., 1925, т. 57, вып. 3—4.
6. **Бехтерев П. В.** Определяющие коэффициенты упругости и деформаций с приложением к изотропии.— ЖЭТФ, 1934, т. 4, вып. 9.
7. **Черных К. Ф.** Симметричные функции симметричных тензоров в анизотропной теории упругости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 3.
8. **Новожилов В. В., Черных К. Ф.** Об упругих постоянных линейной теории упругости.— В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982.
9. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры.— М.: Физматгиз, 1962.
10. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц.— М.: Наука, 1966.
11. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике.— М.: Наука, 1968.
12. **Папкович П. Ф.** Теория упругости.— Л.— М.: Оборонгиз, 1939.
13. **Лурье А. И.** Теория упругости.— М.: Наука, 1970.
14. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.
15. **Рыхлевский Я.** О законе Гука.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 3.
16. **Остросаблин Н. И.** О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1984, вып. 66.
17. **Чанышев А. И.** О пластичности анизотропных сред.— ПМТФ, 1984, № 2.

Поступила 2/II 1984 г.

УДК 548.571

УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ОДНОСКОРОСТНОМ ПОТОКЕ ДИСЛОКАЦИЙ

Ш. Х. Ханнанов

(*Уфа*)

Известные трудности в теории пластичности связаны с тем, что для пластических дисторсий β^P_{ik} [1] в отличие от упругих β_{ik} не существует простых конечных соотношений типа закона Гука [2]. Это обусловлено зависимостью β^P_{ik} от истории нагружения. В классических теориях пластичности принимаются различного вида определяющие соотношения, которые являются обобщениями эмпирических зависимостей, полученных при испытании макроскопических образцов [2].

Принципиально иной подход открывает физическая теория пластичности, в которой пластическая деформация рассматривается как коллективный эффект движения дислокаций и других дефектов кристаллической решетки. Такое описание пластической деформации статистическое и требует решения системы уравнений кинетики для функций распределения дефектов [3—5]. При этом математически задача ставится весьма сложной и преимущества феноменологического подхода, заключающиеся в большой простоте, теряются. Однако польза физической теории, возможно, заключается не столько в решении конкретных задач, сколько в обосновании различных гипотез, лежащих в основе феноменологических теорий, и, в частности, определяющих соотношений.

В данной работе дается попытка перебросить некий мост между физической (дислокационной) и феноменологическими теориями пластичности. Получены определяющие соотношения для скорости пластической дисторсии $\dot{\beta}^P_{ik}$ на основе представлений о дислокациях в случае односкоростного их потока и сформулирована замкнутая система уравнений как частный и простой вариант теории пластичности. Даны некоторые конкретные приложения этих уравнений.

1. Упругое поведение тела под действием внешней нагрузки определяется динамическими уравнениями [2]

$$\sigma^0_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}^0_i. \tag{1.1}$$

Здесь σ^0_{ij} — тензор внешних упругих напряжений; f_i — плотность объемных сил; ρ — плотность тела; u^0_i — упругие смещения; индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей декартовой координате, точка сверху — производную по времени. Для замыкания уравнений (1.1) необходимо записать соотношения, выражающие упругие дисторсии β^0_{ik} через упругие смещения u^0_i [2]:

$$\beta^0_{ik} = u^0_{k,i}, \tag{1.2}$$

и закон Гука [2]

$$\sigma^0_{ij} = c_{ijkl}\beta^0_{kl} = c_{ijkl}e^0_{kl}, \tag{1.3}$$

где c_{ijkl} — упругие константы материала; e^0_{kl} — упругие деформации (симметричная часть β^0_{kl}).

Упругопластическое поведение тела определяется как упругими β^0_{kl}, так и пластическими $\hat{\beta}^P_{kl}$ дисторсиями, причем для $\hat{\beta}^P_{kl}$ не существует простых соотношений вида (1.3). Физически это связано со сложным характером эволюции дислокационных ансамблей, участвующих в процессе пластического деформирования. В общем случае физическое (дислокационное) описание пластической деформации сопряжено с решением уравнений кинетики для функций распределения дислокаций [3—5]. Сложность задачи не позволяет получить определяющие соотношения непосредственно для скорости пластической дисторсии $\dot{\beta}^P_{kl}$. Однако иное положение возникает в частном случае односкоростного потока дислокаций. Здесь необходимость решения кинетических уравнений отпадает, и удается получить (из первых принципов) определяющее уравнение для $\dot{\beta}^P_{kl}$.

В континуальной теории дислокаций, которая широко применяется при их статистическом описании, основные характеристики — тензоры плотности α_{pl} и плотности потока J_{kl} дислокаций, связанные с тензором пластической дисторсии β^P_{ik} формулами [3]

$$\alpha_{pl} = -\varepsilon_{pnk}\beta^P_{kl,m}; \tag{1.4}$$

$$J_{kl} = \dot{\beta}^P_{kl} \tag{1.5}$$

(ε_{pmk} — единичный антисимметричный тензор). С другой стороны, тензоры α_{pl}, J_{kl} можно выразить через функцию распределения дислокаций $f(\tau, \mathbf{b}; \mathbf{r}, t)$ с помощью соотношений [4, 5]

$$\alpha_{pl} = \sum \tau_p b_l f(\tau, \mathbf{b}; \mathbf{r}, t); \tag{1.6}$$

$$(1.7)\qquad J_{kl} = \varepsilon_{pmk} \sum \tau_p b_l v_m(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b}) f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b}; \mathbf{r}, t),$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной к линии дислокации; $\mathbf{b}$ — вектор Бюргерса; $\mathbf{v}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b})$ — вектор скорости дислокаций; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки тела; t — время. Суммирование в (1.6), (1.7) ведется по всем возможным значениям пар векторов $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b})$. Формулы (1.4)—(1.7) выражают взаимосвязь между макроскопической $\dot{\beta}^P_{kl}$ и микроскопической $f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b}; \mathbf{r}, t)$ характеристиками.

Вектор скорости дислокаций $\mathbf{v}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b})$ в общем случае зависит от типа дислокации, т. е. от векторов $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b})$. Рассмотрим частный случай односкоростного потока дислокаций, когда вектор скорости $\mathbf{v}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b})$ не зависит от $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b})$ — для всех дислокаций одинаков. Тогда v_m выносится из-под знака суммы в (1.7), а оставшаяся сумма оказывается равной α_{pl}. Отсюда следует, что тензоры α_{pl} и J_{kl} в этом случае взаимосвязаны:

$$(1.8)\qquad J_{kl} = \varepsilon_{pmk}\alpha_{pl}v_m.$$

Подставляя в (1.8) выражения (1.4), (1.5) для тензоров α_{pl}, J_{kl}, получаем после некоторых преобразований

$$(1.9)\qquad \dot{\beta}^P_{kl} = -\beta^P_{kl,m}v_m + \beta^P_{ml,k}v_m.$$

Уравнения (1.9) можно рассматривать как определяющие соотношения (в дифференциальной форме) для пластической дисторсии β^P_{kl}, связывающие тензор скорости пластической дисторсии $\dot{\beta}^P_{kl}$ с тензором эффективных напряжений σ^+_{ij}. Последние входят в (1.9) через зависимость вектора скорости дислокаций $\mathbf{v}$ от σ^+_{ij}. Динамический закон для дислокаций будем считать первичным, т. е. известным либо из эксперимента, либо из микроскопической теории подвижности дислокаций (см., например, [6]). Не конкретизируя до конца, запишем динамический закон для дислокаций в виде

$$(1.10)\qquad \mathbf{v} = A\left[\sigma^+_{ij}(\mathbf{r}, t)\right],$$

где A — векторно-значная функция от эффективного упругого напряжения σ^+_{ij}. Эффективные напряжения складываются из внешних σ^0_{ij} и внутренних (связанных с несовместностью пластической деформации) σ_{ij}:

$$(1.11)\qquad \sigma^+_{ij} = \sigma^0_{ij} + \sigma_{ij}.$$

Внутренние напряжения можно определить, как и внешние, с помощью (1.3), подставив вместо β^0_{kl} упругие дисторсии β_{mn}, обусловленные несовместимостью пластической дисторсии. Для β_{mn}, согласно [7], находим

$$(1.12)\qquad \beta_{mn}(\mathbf{r}, t) = -\int c_{ijkl}G_{jn,im}(\mathbf{R}, T)\,\beta^P_{kl}(\mathbf{r}', t')\,d\mathbf{r}'dt' - \beta^P_{kl}(\mathbf{r}, t).$$

Здесь G_{jn} — динамическая функция Грина упругой задачи; $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$; $T = t - t'$.

Таким образом, уравнения (1.9), дополненные динамическим законом для дислокаций (1.10) и соотношениями (1.1)—(1.3), (1.11), (1.12), для определения эффективных напряжений составляют замкнутую систему, описывающую развитие пластической дисторсии во времени. Особенность данной системы — то, что она описывает пластическое поведение непосредственно на основе физических законов движения дислокаций — элементарных носителей пластической деформации.

Необычная форма полученных уравнений может вызвать некоторое недоумение. Действительно, с одной стороны, их совокупность включает в себя динамический закон движения дислокаций (1.10), с другой — в ней не содержится никакой информации о размножении и других превращениях дислокаций, которые существуют в общем случае [6]. Дело в том, что принятое выше предположение об односкоростном потоке дислокаций

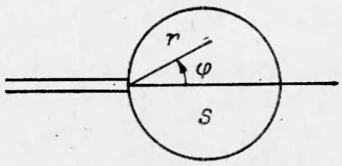

Рис. 1

как раз и запрещает размножение дислокаций в объеме. Всякий физический процесс размножения в объеме тела привел бы к образованию дислокаций разного знака, которые, находясь в одном и том же поле эффективных напряжений σ^+_{ij}, должны были бы иметь векторы скорости противоположного знака, что противоречило бы предположению об односкоростном потоке дислокаций. Именно исключение процессов размножения дислокаций в объеме (но не на поверхности тела) дает столь сильное упрощение в описании пластического поведения. При этом дислокации зарождаются на поверхности тела и распространяются с фронтом пластической дисторсии. Градиент пластической дисторсии полностью определяет плотность дислокаций в соответствии с (1.4). Дислокации такого типа принято называть геометрически необходимыми [8].

Во избежание недоразумений следует указать еще на некоторые важные моменты. Во-первых, предположение об односкоростном потоке относится фактически к указанным геометрически необходимым дислокациям. Геометрически же необходимые дислокации одного сорта могут быть реально представлены физическими дислокациями нескольких сортов. Так, дислокационная субграница в кристалле при заданной разориентации может быть представлена различными системами дислокаций [6]. Во-вторых, хотя размножение для геометрически необходимых дислокаций в объеме запрещено, для представляющих их физических дислокаций допустимы процессы типа перезарядки, когда дислокация аннигилирует, порождая тут же другую. Физически это может быть, например, в поликристаллическом материале при эстафетной передаче скольжения от зерна к зерну через границу между ними.

В целом полученные уравнения применимы в условиях больших градиентов пластической дисторсии. Такие условия реализуются, в частности, при распространении упругопластических волн.

2. Рассмотрим теперь конкретные приложения изложенного выше формализма. В качестве первого возьмем задачу о трещине сдвига в упругопластическом теле (рис. 1). Трещину будем считать полубесконечной, а пластическую зону S — малой, так что напряжения в пластической зоне полностью определяются коэффициентом интенсивности напряжений в вершине трещины K [9]. Развитие пластического течения представим как радиальное движение винтовых дислокаций, испускаемых из вершины трещины. Тензор плотности дислокаций α_{pl} имеет единственную отличную от нуля компоненту $\alpha_{zz} = \alpha$, и уравнение (1.9) запишем как (в цилиндрических координатах r, φ, z, ось z нормальна плоскости чертежа и направлена вдоль фронта трещины)

$$\dot{\beta}^P_{\varphi z} = -\beta^P_{\varphi z,r} v_r. \tag{2.1}$$

Здесь учтено, что вектор $\mathbf{v}$ имеет только радиальную компоненту v_r, которая зависит от напряжений сдвига $\sigma_{\varphi z} = \sigma$ в радиальной плоскости. Пусть эта зависимость имеет вид

$$v_r = 0, \ \sigma^+ \leqslant \sigma_1; \ v_r = F(\sigma^+), \ \sigma^+ > \sigma_1,$$

где σ_1 — критическое напряжение движения дислокаций; $F(\sigma^+)$ — скалярная функция. В квазистатическом случае, используя (1.1)—(1.3), (1.12), можно получить для внешних $\sigma^0_{z\varphi}$ и внутренних $\sigma_{z\varphi}$ напряжений в пластической зоне выражения

$$\sigma^0_{z\varphi} = -\,\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{i}\,\frac{K}{\sqrt{2\pi\zeta}}\,e^{i\varphi}\right\},$$

$$\sigma_{z\varphi} = \int\limits_S M(r, \varphi; r', \varphi')\, \beta^P_{\varphi z, r}(r', \varphi')\, dS'.$$

Здесь M — ядро:

$$M(r, \varphi; r', \varphi') = -\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{i}\frac{\mu}{2\pi}\sqrt{\frac{\zeta'}{\zeta}}\frac{1}{\zeta - \zeta'}e^{i\varphi}\right\};$$

$\zeta = re^{i\varphi}$; $\zeta' = r'e^{i\varphi'}$; μ — модуль сдвига; S — область, занимаемая пластической зоной в плоскости r, φ; Im — мнимая часть комплексной функции.

Ограничимся статическим решением, отвечающим состоянию при $t \to \infty$, когда пластическая зона сформировалась и движение дислокаций прекратилось. При $v_r = 0$ и $\dot{\beta}^P_{\varphi z} = 0$ уравнение (2.1) удовлетворяется тождественно, а условие предельного равновесия дислокаций ($\sigma^+ = \sigma_1$) сводится к

$$\int\limits_S M(r, \varphi; r', \varphi')\, \beta^P_{\varphi z, r}(r', \varphi')\, dS' - \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{i}\frac{K}{\sqrt{2\pi\zeta}}e^{i\varphi}\right\} = \sigma_1. \tag{2.2}$$

Решением (2.2), как можно убедиться прямой подстановкой, будет

$$\beta^P_{\varphi z} = \frac{K^2}{\pi\mu\sigma_1}\frac{\cos\varphi}{r}, \quad r \leqslant R_0\cos\varphi,$$

где $R_0 = K^2/\pi\sigma_1^2$, оно согласуется с известным решением, полученным обычными методами [10].

В качестве второго приложения рассмотрим распространение плоской пластической волны в однородно-напряженном бесконечном теле (рис. 2). Распространение пластической волны в отличие от упругой связано с диссипацией энергии, и незатухающее движение должно поддерживаться за счет работы внешних сил (в данном случае упругих однородных растягивающих напряжений $\sigma_{yy} = \text{const}$). Уравнение (1.9) допускает однородное решение $\beta^P_{kl} = \text{const}$ в области, где $\mathbf{v} = 0$. Пластическую волну можно представить как кусочно-однородное решение. Пусть пластическая волна распространяется вдоль оси x и в данный момент времени фронт волны совпадает с плоскостью $x = 0$ (см. рис. 2). Для волны простейшей формы положим $\beta^P_{kl} = 0$ при $x > 0$, $\beta^P_{yy} = \beta^P_- = \text{const}$ при $x < 0$, остальные компоненты β^P_{kl} не равны нулю. Подставляя такое разрывное решение (1.9) в (1.4), обнаружим, что на фронте пластической волны имеется поверхностная плотность геометрически необходимых дислокаций

$$\alpha_{zy} = \beta^P_-\delta(x), \tag{2.3}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Плотность дислокаций вида (2.3) характерна также для дислокационной модели фронта ударной волны, предложенной Смитом [11].

Для определения скорости распространения w фронта пластической волны надо задаться физическим набором дислокаций, который имеет нужную плотность (2.3) и может консервативно двигаться в положительном направлении оси x под действием однородных растягивающих напряжений $\sigma^0_{yy} = \text{const}$. Указанным требованиям удовлетворяет система из двух сортов краевых дислокаций, скользящих в плоскостях, наклоненных под углом 45° к оси y (см. рис. 2). В силу симметрии каждая из этих систем дислокаций имеет одинаковую функцию распределения $f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b}; \mathbf{r}, t) = \frac{\beta^P_-}{2b_y}\delta(x - wt)$ и компоненту скорости v_x.

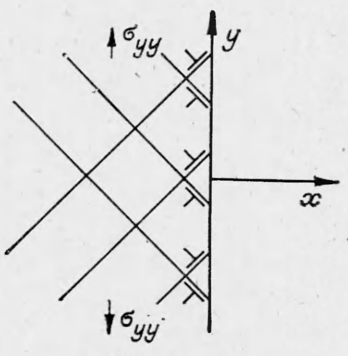

Рис. 2

Приравнивая плотности потоков дислокаций (1.7), (1.8), находим $w = v_x = v/\sqrt{2}$ (v — скорость физической дислокации в поле напряжений $\sigma_{yy}^0 = \mathrm{const}$).

В реальной ситуации пластические волны могут возникать и при распространении упругой ударной волны [11]. В связи с этим представляет интерес рассмотрение скорости размытия фронта пластической волны. С этой целью будем считать теперь $\beta_{yy}^P = \beta(x, t)$ гладкой функцией, сохраняя остальные предположения прежними. Из (1.9) следует тогда уравнение относительно $\beta(x, t)$

$$\dot{\beta}^P + v_x \beta^P_{,x} = 0. \tag{2.4}$$

Здесь $v_x = v_x(x, t)$ зависит от x и t. Функция $\beta^P(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\beta^P(-\infty, t) = \beta^P_-, \quad \beta^P(\infty, t) = 0.$$

Примем степенной закон для скорости движения дислокаций [6]

$$v = v_0 \left(\frac{\sigma^+}{\sigma_0}\right)^m, \tag{2.5}$$

где v_0, σ_0, m — константы; σ^+ — эффективные напряжения сдвига ($\sigma^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{yy}^+$). Для σ_{yy}^+ имеем в изотропном случае

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^0 - \frac{\mu}{1-\nu} \beta^P \tag{2.6}$$

(ν — коэффициент Пуассона).

Пусть $x = x(\beta_0^P, t)$ описывает движение точки постоянного значения $\beta^P = \beta_0^P$. Тогда из (2.4) следует с учетом (2.5), (2.6) [12]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \left\{\frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_0}\left[\sigma_{yy}^0 - \frac{\mu}{1-\nu}\beta^P(x_0)\right]\right\}^m, \tag{2.7}$$

$\beta^P(x_0) = \beta^P(x = x_0, t = 0)$. Решение (2.7) запишем как

$$x = x_0 + \frac{v_0}{\sqrt{2}} \left\{\frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_0}\left[\sigma_{yy} - \frac{\mu}{1-\nu}\beta^P(x_0)\right]\right\}^m t.$$

Далее положим $m = 1$. Пусть

$$\beta^P(x_0) = \beta^P_-, \quad x_0 < 0;$$

$$\beta^P(x_0) = \beta^P_- - \lambda x_0, \quad 0 \leqslant x_0 \leqslant \Delta x_0; \quad \beta^P(x_0) = 0, \quad x_0 > \Delta x_0,$$

где $\Delta x_0 = \beta^P_-/\lambda$ — начальная ширина фронта пластической волны; λ — константа. Из (2.7) находим в этом случае для ширины фронта пластической волны в произвольный момент времени t

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 + \frac{v_0}{2} \frac{\mu}{(1-\nu)\sigma_0} \beta^P_- t.$$

Как видно, $\Delta x(t)$ растет пропорционально времени t и амплитуде пластической волны β^P_-.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Де Вит Р.** Континуальная теория дисклинаций.— М.: Мир, 1977.
2. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1973, т. 2.
3. **Косевич А. М.** Дислокации в теории упругости.— Киев.: Наук. думка, 1978.
4. **Ханнанов Ш. Х.** О кинетике непрерывно распределенных дислокаций.— ФММ, 1978, т. 46, № 4.
5. **Ханнанов Ш. Х.** Кинетика дислокаций и дисклинаций.— ФММ, 1980, т. 49, № 1.
6. **Фридель Ж.** Дислокации.— М.: Мир, 1967.

7. **Kossecka E., De Wit R.** Disclination dynamics.— Archives of Mech., 1977, v. 29, N 6.
8. **Ashby M. F.** The deformation of plastically non-homogeneous alloys.— In.: Strengthening methods in crystals/Eds. A. Kelly, R. B. Nicholson. N. Y.: Wiley, 1971.
9. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения.— М.: Наука, 1974.
10. Разрушение/Под ред. Г. Либовица.— М.: Мир, 1975, т. 2.
11. **Дитер Г. Е.** Эффект упрочнения, вызванный ударными волнами.— В кн.: Механизмы упрочнения твердых тел/Под ред. М. Л. Бернштейна. М.: Металлургия, 1965.
12. **Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Уравнения в частных производных математической физики.— М.: Высш. шк., 1970.

Поступила 14/XII 1985 г.

УДК 532.5

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ПЛИТЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА СЛОЕ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. Н. Белоненко, О. Ю. Динариев, А. Б. Мосолов

(*Москва*)

Вопросы, связанные с устойчивостью колебаний механических систем, контактирующих с вязкой сжимаемой жидкостью, часто возникают в различных областях науки, техники и современного производства. Типичный пример — задача об устойчивости тяжело нагруженного узла трения, работающего в условиях повышенной вибрации.

При учете сжимаемости жидкости, описываемой ньютоновской моделью с линейной вязкостью, необходимо наряду со сдвиговыми вязкими напряжениями учитывать также и объемные вязкие напряжения (что обычно не делается) [1]. Предположение о равенстве нулю коэффициента объемной вязкости в большинстве случаев несправедливо, кроме того, для некоторых жидкостей коэффициент объемной вязкости может во много раз (иногда на порядки) превосходить коэффициент обычной сдвиговой вязкости. В связи с этим при интенсивных силовых воздействиях на жидкость нельзя пренебрегать диссипацией энергии при изменении объема. В колебательных процессах, сопровождающихся изменением объема, влияние объемной вязкости может оказаться весьма существенным.

1. Постановка задачи и определяющие уравнения. Рассмотрим одномерную задачу о вынужденных колебаниях массивного слоя S, лежащего на слое вязкой сжимаемой жидкости (рис. 1) под действием периодической вынуждающей силы $F(t)$.

Основные уравнения задачи:

уравнение движения

$$ml_{,tt} = p - \left(\eta_V + \frac{4}{3}\eta_s\right)\frac{l_{,t}}{l} - mg + F(t); \tag{1.1}$$

уравнение неразрывности (сохранения массы жидкости)

$$\rho l = \rho_0 l_0. \tag{1.2}$$

Здесь m — погонная масса слоя S; $l(t)$, l_0 — текущая и начальная толщина зазора; $\rho(t)$, ρ_0 — текущая и начальная плотность жидкости; p — давление в слое жидкости; η_V и η_s — коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости; g — ускорение силы тяжести.

Если в системе происходит разрыв сплошности (отрыв слоя S от слоя жидкости), то уравнение (1.2) перестает выполняться.

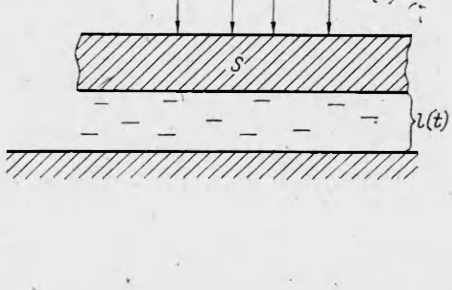

Рис. 1