

AMS subject classification: 45D05, 45G05, 45J99, 45E99, 65R20

Об интегро-дифференциальном дробном нелинейном уравнении Вольтерра–Капуто

С. Гемар¹, Х. Геббай², С. Лемита³

¹Université Yahia Fares Médéa. Pôle urbain, Médéa, 26000, Algérie

²Laboratoire des Mathématiques Appliquées et de Modélisation, Université 8 Mai 1945, Guelma. B.P. 401, Guelma, 24000, Algérie

³École Normale Supérieure de Ouargla, Cité Ennacer, Ouargla, 30000, Algérie

E-mails: sou.guemar@gmail.com (Гемар С.), guebbaihamza@yahoo.fr; guebbai.hamza@univ-guelma.dz (Геббай Х.), lem.samir@gmail.com (Лемита С.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 14, 2021.

Гемар С., Геббай Х., Лемита С. Об интегро-дифференциальном дробном нелинейном уравнении Вольтерра–Капуто // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 4. — С. 365–382.

В данной статье мы изучаем нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра с дробной производной Капуто. Основываясь на методах, полученных из исследования классических уравнений Вольтерра, а именно: итерационной последовательности Пикара и методе интегрирования произведения, мы предлагаем полное аналитическое и численное исследование этого уравнения. В конце исследования приводятся два численных примера.

DOI: 10.15372/SJNM20210402

Ключевые слова: уравнение Вольтерра, интегро-дифференциальное дробное уравнение, неподвижная точка, нелинейное уравнение, метод интегрирования произведения.

Guemar S., Guebbai H., Lemita S. On an integro-differential fractional nonlinear Volterra–Caputo equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 4. — P. 365–382.

In this paper, we study a nonlinear integro-differential Volterra equation with a fractional Caputo derivative. Based on techniques derived from a study of classical Volterra equations, namely Picard’s iterative sequence and the product integration method, we propose a complete analytical and numerical study of this equation. Our study is closed by the development of two numerical examples.

Keywords: Volterra equation, integro-differential-fractional equation, fixed point, nonlinear equation, product integration method.

1. Введение

Исторически задачи, описывающие меняющиеся во времени природные явления, или задачи с начальными значениями обычно представлены уравнениями типа Вольтерра. Такое представление обеспечивает лучший аналитический и численный подход [1–4]. Это значительно повышает интерес к уравнениям такого типа в области математического моделирования с применениями в физике, инженерии и биологии.

Недавно авторов статей [1, 5–7] заинтересовал новый тип уравнений Вольтерра, а именно их интегро-дифференциальная версия. Новизна их работы заключается в том,

что производная решения появляется под знаком интеграла в нелинейном виде. Этот тип уравнения происходит от так называемой задачи модели землетрясения [8], когда положение движущейся массы нелинейно зависит от ее скорости.

С другой стороны, у нас есть дробное исчисление, новая популярная концепция, к которой имеется большой интерес в исследованиях в области прикладной математики [9, 10]. Мы будем использовать эту дробную производную для построения нового дробного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра с целью представления нового подхода к задачам, которые встречаются при изучении его классической формы.

Интегро-дифференциальное уравнение в его дробном обобщении, которое мы представим в данной статье, изучалось Х. Геббаем с соавторами в [1]:

$$\forall t \in [a, b] \quad u(t) = \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s)) ds + f(t),$$

где u — неизвестная функция, а f задана в $C^1[a, b]$. Авторы показывают, что это уравнение допускает решение $u \in C^1[a, b]$, если верны следующие гипотезы:

$$(H0) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad f \in C^1[a, b] \text{ и } \frac{\partial K}{\partial t} \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2); \\ 2) \quad \exists M > 0 \quad \forall t, s \in [a, b], \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \max \left(|K(t, s, x, y)|, \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \right) \leq M; \\ 3) \quad \exists A, B, \bar{A}, \bar{B} > 0 \quad \forall t, s \in [a, b], \quad \forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R} \\ \left\{ \begin{array}{l} |K(t, s, x, y) - K(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq A|x - \bar{x}| + B|y - \bar{y}|, \\ \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \bar{x}, \bar{y}) \right| \leq \bar{A}|x - \bar{x}| + \bar{B}|y - \bar{y}|. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Однако для единственности этого решения необходимо добавить следующее ограничительное условие: $B < 1$. Цель данной статьи — изучение дробной версии предыдущего уравнения и получение аналитических и численных результатов без предположения, что $B < 1$.

Уравнение, которое мы изучаем в данной статье, имеет вид

$$\forall t \in [a, b] \quad u(t) = \int_a^t K(t, s, u(s), D_c^\alpha u(s)) ds + f(t), \quad (1)$$

где u — неизвестная функция, D_c^α — стандартная дробная производная Капуто порядка $0 < \alpha < 1$. Сначала изучим это уравнение в аналитическом смысле: найдем условия, достаточные для обеспечения существования и единственности решения. Затем изучим его в численном смысле: используем метод интегрирования произведения для аппроксимации решения. Наконец, представим численные примеры.

2. Предварительная информация

Введем некоторые необходимые определения и теоремы, которые будут использоваться в дальнейшем. Эти определения можно найти в современной литературе [9].

Определение 1. Дробная производная Капуто $\alpha > 0$ непрерывной функции φ задается следующим образом:

$$D_c^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{\varphi^{(n)}(s)}{(t - s)^{\alpha - n + 1}} ds,$$

где n — наименьшее целое число, которое больше или равно α , а $\Gamma(\cdot)$ — известная гамма-функция Эйлера.

В данной статье мы используем дробную производную Капуто порядка $\alpha \in]0, 1[$:

$$D_c^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{-\alpha} \varphi'(s) ds.$$

Рассмотрим векторное пространство

$$C^1[a, b] := \{ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi, \varphi' \text{ — непрерывны на } [a, b] \},$$

снабженное нормой

$$\forall \varphi \in C^1[a, b] \quad \|\varphi\|_\alpha = \max_{t \in [a, b]} |\varphi(t)| + \max_{t \in [a, b]} |D_c^\alpha \varphi(t)|.$$

Лемма 1. Нормированное пространство $(C^1[a, b], \|\cdot\|_\alpha)$ не является полным.

Доказательство. Ясно, что $\|\cdot\|_\alpha$ является нормой для $C^1[a, b]$. Пусть $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ — последовательность в $C^1[-1, 1]$, такая что

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -t - 1, & -1 \leq t \leq \frac{-1}{n}, \\ \frac{n}{2} t^2 + \frac{1}{2n} - 1, & \frac{-1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ t - 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Для всех $p > n$ имеем

$$\begin{aligned} \max_{t \in [a, b]} |\varphi_n(t) - \varphi_p(t)| &\leq \frac{1}{2n}, \\ \max_{t \in [a, b]} |D_c^\alpha \varphi_n(t) - D_c^\alpha \varphi_p(t)| &\leq \frac{2^{2-\alpha} + 1}{\Gamma(3 - \alpha)(n^{1-\alpha})}, \\ \forall t \in [-1, 1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) &= |t| - 1. \end{aligned}$$

Поэтому $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ — последовательность Коши в $C^1[-1, 1]$, но она не имеет предела в $C^1[-1, 1]$. $\square$

Мы понимаем, что на данной стадии пространство $C^1[a, b]$ не является достаточным для проведения аналитического и численного исследования нашего уравнения (1), поскольку банахово пространство является минимальной структурой, в которой мы можем выполнить надежную численную аппроксимацию интегральных уравнений такого типа. Для этого мы должны построить пополнение нормированного пространства $C^1[a, b]$ с использованием процедуры, разработанной для метрических пространств в [11].

Определение 2. Нормированное пространство (X^*, N^*) называется пополнением нормированного пространства (X, N) , если X^* является полным, а X изометрично плотному подмножеству X^* .

Пусть $\mathcal{C}(C^1[a, b])$ — векторное пространство всех последовательностей Коши в $C^1[a, b]$, и пусть $\mathcal{R}$ — соотношение в $\mathcal{C}(C^1[a, b])$, определяемое следующим образом:

$$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(C^1[a, b]) \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R} (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - b_n\|_\alpha = 0.$$

Ясно, что $\mathcal{R}$ — соотношение эквивалентности в $\mathcal{C}(C^1[a, b])$. Обозначим при помощи $\mathbf{FD}_c^\alpha[a, b]$ фактор-множество $\mathcal{C}(C^1[a, b]) / \mathcal{R}$, т.е. $\mathbf{FD}_c^\alpha[a, b]$ состоит из классов эквивалентности $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ последовательностей Коши $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(C^1[a, b])$. Пусть $|||\cdot|||_\alpha$ — функция, определяемая как

$$\forall \varphi = [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \mathbf{FD}_c^\alpha[a, b] \quad |||\varphi|||_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_\alpha.$$

Теорема 1. $(\mathbf{FD}_c^\alpha[a, b], |||\cdot|||_\alpha)$ — единственное пополнение $(C^1[a, b], \|\cdot\|_\alpha)$.

Доказательство. Легко видно, что $(\mathbf{FD}_c^\alpha[a, b], |||\cdot|||_\alpha)$ — нормированное полное, т.е. банахово, пространство. Теперь для каждого $\varphi \in C^1[a, b]$ последовательность $(\varphi, \varphi, \varphi, \dots) \in \mathcal{C}(C^1[a, b])$, тогда $C^1[a, b]$ изометрично множеству

$$Y = \{(\varphi, \varphi, \varphi, \dots) : \varphi \in C^1[a, b]\},$$

и Y плотно в $\mathbf{FD}_c^\alpha[a, b]$. Для доказательства единственности см. [11, лемма 14.9]. $\square$

Поскольку норма $|||\cdot|||_\alpha$ частично содержит обычную норму $C^0[a, b]$, мы можем идентифицировать пространство $\mathbf{FD}_c^\alpha[a, b]$ следующим образом:

$$\mathbf{FD}_c^\alpha[a, b] = \{\varphi \in C^0[a, b] : \|\varphi\|_\alpha < +\infty\},$$

и $|||\cdot|||_\alpha = \|\cdot\|_\alpha$.

3. Уравнение

Пусть K — функция, определяемая как

$$K : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, s, x, y) \mapsto K(t, s, x, y).$$

Предположим, что K удовлетворяет следующим гипотезам:

$$(H1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \frac{\partial K}{\partial t} \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2); \\ 2) \quad \exists M_1, M_2, M_3 \geq 0, \quad \exists \gamma_1, \gamma_2 > 0 \quad \forall t, s \in [a, b], \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \max \left(|K(t, s, x, y)|, \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) \right| \right) \leq M_1 |x|^{\gamma_1} + M_2 |y|^{\gamma_2} + M_3; \\ 3) \quad \exists A, B, \bar{A}, \bar{B} \geq 0 \quad \forall t, s \in [a, b], \quad \forall x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R} \\ \left\{ \begin{array}{l} |K(t, s, x, y) - K(t, s, \bar{x}, \bar{y})| \leq A |x - \bar{x}| + B |y - \bar{y}|, \\ \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \bar{x}, \bar{y}) \right| \leq \bar{A} |x - \bar{x}| + \bar{B} |y - \bar{y}|. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ясно, что $H1$ слабее $H0$. Кроме того, $H1$ позволяет нам вычислить производную Капуто в обеих частях уравнения (1) и получить

$$\forall t \in [a, b] \quad D_c^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} K(s, s, u(s), D_c^\alpha u(s)) ds + \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} \int_a^s \frac{\partial K}{\partial s}(s, \theta, u(\theta), D_c^\alpha u(\theta)) d\theta ds + D_c^\alpha f(t).$$

Определим функционал ϕ_f как

$$\forall \xi \in \mathbf{FD}^\alpha[a, b], \forall t \in [a, b] \quad \phi_f(\xi)(t) := \int_a^t K(t, s, \xi(s), D_c^\alpha \xi(s)) ds + f(t).$$

Предложение 1. Для всех $f \in \mathbf{FD}^\alpha[a, b]$ функционал ϕ_f непрерывен из $\mathbf{FD}^\alpha[a, b]$ в себя.

Доказательство. Пусть $\xi \in \mathbf{FD}^\alpha[a, b]$. Ясно, что $\phi_f(\xi)$ непрерывен на $[a, b]$. Для всех $t \in [a, b]$ имеем

$$D_c^\alpha \phi_f(\xi)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} K(s, s, \xi(s), D_c^\alpha \xi(s)) ds + \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} \int_a^s \frac{\partial K}{\partial s}(s, \theta, \xi(\theta), D_c^\alpha \xi(\theta)) d\theta ds + D_c^\alpha f(t),$$

которая непрерывна на $[a, b]$ и для всех $t \in [a, b]$

$$|D_c^\alpha \phi_f(\xi)(t)| \leq 3 \max(M_1, M_2, M_3) \left(\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{(b-a)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right) \times \\ (\max(1, \|\xi\|_\alpha))^{\max(1, \gamma_1, \gamma_2)} + \|f\|_\alpha.$$

Тогда $\phi_f(\xi) \in \mathbf{FD}^\alpha[a, b]$. Пусть $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность в $\mathbf{FD}^\alpha[a, b]$, сходящаяся к $\xi \in \mathbf{FD}^\alpha[a, b]$. Мы имеем

$$\max_{t \in [a, b]} |\phi_f(\xi)(t) - \phi_f(\xi_n)(t)| \leq (b-a) \max(A, B) \|\xi - \xi_n\|_\alpha, \\ \max_{t \in [a, b]} |D_c^\alpha \phi_f(\xi)(t) - D_c^\alpha \phi_f(\xi_n)(t)| \leq \left(\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \max(A, B) + \frac{(b-a)^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \max(\bar{A}, \bar{B}) \right) \|\xi - \xi_n\|_\alpha.$$

Поэтому ϕ_f непрерывна из $\mathbf{FD}^\alpha[a, b]$ в себя. $\square$

3.1. Аналитическое исследование

Рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения уравнения (1). Для этого выберем метод последовательных приближений, называемый также методом Пикара [2], но с подынтервальным подходом [5].

Теорема 2. При гипотезах $H1$ уравнение (1) имеет единственное решение в $\mathbf{FD}_c^\alpha[a, b]$.

Доказательство. Можно заметить, что существуют точки $a = T_0, T_1, \dots, T_N = b$, $N \in \mathbb{N}^*$, такие что $\exists \rho \in]0, \frac{1}{3}[$ для всех $0 \leq i \leq N-1$, для всех $t \in [T_i, T_{i+1}]$, для всех $1 \leq p \leq 6$ имеем

$$\alpha_p(i, t) \leq \rho, \quad (2)$$

где

$$\begin{cases} \alpha_1(i, t) = A \int_{T_i}^t ds, \\ \alpha_2(i, t) = B \int_{T_i}^t ds, \\ \alpha_3(i, t) = \frac{A}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{T_i}^t (t-s)^{-\alpha} ds, \\ \alpha_4(i, t) = \frac{B}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{T_i}^t (t-s)^{-\alpha} ds, \\ \alpha_5(i, t) = \frac{\bar{A}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{T_i}^t (t-s)^{-\alpha} \int_a^s d\theta ds, \\ \alpha_6(i, t) = \frac{\bar{B}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{T_i}^t (t-s)^{-\alpha} \int_a^s d\theta ds. \end{cases}$$

Сначала используем метод Пикара, чтобы установить существование и единственность в интервале $[a, T_1]$. Затем покажем, что этот метод можно последовательно применять к интервалам $[T_1, T_2]$, $[T_2, T_3]$, $\dots$, чтобы охватить весь интервал $[a, b]$.

Рассмотрим интервал $[a, T_1]$. Определим последовательность Пикара:

$$\forall n \geq 0, \forall t \in [a, T_1] \quad \begin{cases} u_0(t) = f(t), \\ u_{n+1}(t) = \int_a^t K(t, s, u_n(s), D_c^\alpha u_n(s)) ds + f(t), \end{cases}$$

и пусть последовательность имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \varphi_0 = u_0, \\ \varphi_{n+1} = u_{n+1} - u_n, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, мы получим

$$u_n = \sum_{i=0}^n \varphi_i, \quad n \geq 0.$$

Используя гипотезы $H1$, для всех $t \in [a, T_1]$ получим

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(t)| &= \left| \int_a^t \left\{ K(t, s, u_n(s), D_c^\alpha u_n(s)) - K(t, s, u_{n-1}(s), D_c^\alpha u_{n-1}(s)) \right\} ds \right| \\ &\leq \int_a^t \left\{ A |u_n(s) - u_{n-1}(s)| + B |D_c^\alpha u_n(s) - D_c^\alpha u_{n-1}(s)| \right\} ds \\ &\leq A \int_a^t |\varphi_n(s)| ds + B \int_a^t |D_c^\alpha \varphi_n(s)| ds \\ &\leq \alpha_1(0, t) \max_{t \in [a, T_1]} |\varphi_n(t)| + \alpha_2(0, t) \max_{t \in [a, T_1]} |D_c^\alpha \varphi_n(t)| \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& |D_c^\alpha \varphi_{n+1}(t)| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} \left\{ K(s, s, u_n(s), D_c^\alpha u_n(s)) - K(s, s, u_{n-1}(s), D_c^\alpha u_{n-1}(s)) \right\} ds + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} \int_a^s \left\{ \frac{\partial K}{\partial s}(s, \theta, u_n(\theta), D_c^\alpha u_n(\theta)) - \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. \frac{\partial K}{\partial s}(s, \theta, u_{n-1}(\theta), D_c^\alpha u_{n-1}(\theta)) \right\} d\theta ds \right| \\
&\leq \frac{A}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} |\varphi_n(s)| ds + \frac{B}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} |D_c^\alpha \varphi_n(s)| ds + \\
&\quad \frac{\bar{A}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} \int_a^s |\varphi_n(\theta)| d\theta ds + \frac{\bar{B}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} \int_a^s |D_c^\alpha \varphi_n(\theta)| d\theta ds \\
&\leq \alpha_3(0, t) \max_{t \in [a, T_1]} |\varphi_n(t)| + \alpha_4(0, t) \max_{t \in [a, T_1]} |D_c^\alpha \varphi_n(t)| + \alpha_5(0, t) \max_{t \in [a, T_1]} |\varphi_n(t)| + \\
&\quad \alpha_6(0, t) \max_{t \in [a, T_1]} |D_c^\alpha \varphi_n(t)|.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\varphi_{n+1}\|_\alpha \leq 3\rho \|\varphi_n\|_\alpha \implies \|\varphi_{n+1}\|_\alpha \leq (3\rho)^{n+1} \|\varphi_0\|_\alpha,$$

что дает

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|\varphi_i\|_\alpha \leq \|\varphi_0\|_\alpha \frac{1}{1-(3\rho)}.$$

Поэтому $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно сходится к $u \in \mathbf{FD}_c^\alpha[a, T_1]$. Мы можем записать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(t). \quad (3)$$

Нам необходимо показать, что u удовлетворяет уравнению (1). Предположим, что

$$u(t) = u_{n+1}(t) + \Delta_{n+1}(t), \quad n \geq 0.$$

Для $n \geq 0$ мы можем записать

$$u(t) - \Delta_{n+1}(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s) - \Delta_n(s), D_c^\alpha u(s) - D_c^\alpha \Delta_n(s)) ds.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& u(t) - f(t) - \int_a^t K(t, s, u(s), D_c^\alpha u(s)) ds \\
&= \Delta_{n+1}(t) + \int_a^t \left\{ K(t, s, u(s) - \Delta_n(s), D_c^\alpha u(s) - D_c^\alpha \Delta_n(s)) - K(t, s, u(s), D_c^\alpha u(s)) \right\} ds.
\end{aligned}$$

Используем гипотезы $H1$, чтобы получить

$$\begin{aligned}
& \left| u(t) - f(t) - \int_a^t K(t, s, u(s), D_c^\alpha u(s)) ds \right| \\
& \leq |\Delta_{n+1}(t)| + A \int_a^t |\Delta_n(s)| ds + B \int_a^t |D_c^\alpha \Delta_n(s)| ds \\
& \leq |\Delta_{n+1}(t)| + (b-a)A \max_{t \in [a, T_1]} |\Delta_n(s)| + (b-a)B \max_{t \in [a, T_1]} |D_c^\alpha \Delta_n(s)| \\
& \leq |\Delta_{n+1}(t)| + (b-a) \max(A, B) \|\Delta_n\|_\alpha.
\end{aligned}$$

Мы используем

$$\forall t \in [a, T_1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_{n+1}(t)| = 0$$

для получения результата. Чтобы показать единственность, предположим существование другого решения $\tilde{u}$. Тогда

$$\forall t \in [a, T_1] \quad |u(t) - \tilde{u}(t)| \leq \int_a^t \left\{ A|u(s) - \tilde{u}(s)| + B|D_c^\alpha u(s) - D_c^\alpha \tilde{u}(s)| \right\} ds \leq \rho \|u - \tilde{u}\|_\alpha$$

и таким же образом,

$$\forall t \in [a, T_1] \quad |D_c^\alpha u(t) - D_c^\alpha \tilde{u}(t)| \leq 2\rho \|u - \tilde{u}\|_\alpha.$$

Из этого следует, что

$$\|u - \tilde{u}\|_\alpha \leq 3\rho \|u - \tilde{u}\|_\alpha \Rightarrow (1 - 3\rho) \|u - \tilde{u}\|_\alpha = 0 \Rightarrow u = \tilde{u}.$$

Установив существование и единственность в $[a, T_1]$, перейдем к следующему интервалу $[T_1, T_2]$. Для $t \in [T_1, T_2]$ запишем наше уравнение в следующем виде:

$$u(t) = F(t) + \int_{T_1}^t \tilde{K}(t, s, u(s), D_{c,1}^\alpha u(s)) ds \quad (4)$$

при

$$\begin{aligned}
D_{c,1}^\alpha u(s) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{T_1}^s (s-\theta)^{-\alpha} u'(\theta) d\theta, \\
\tilde{K}(t, s, u(s), D_{c,1}^\alpha u(s)) &= K(t, s, u(s), D_{c,1}^\alpha u(s) + V(s)), \\
F(t) &= f(t) + \int_a^{T_1} K(t, s, \tilde{u}(s), D_c^\alpha \tilde{u}(s)) ds, \\
V(s) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{T_0}^{T_1} (s-\theta)^{-\alpha} \tilde{u}'(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

и $\tilde{u}$ — единственном решении, полученном на первом шаге. Поскольку мы знаем, что $C^1[T_0, T_1]$ является плотным в $\mathbf{FD}_c^\alpha[T_0, T_1]$, то имеется последовательность $\{\tilde{u}_p\}_{p \geq 1} \subset C^1[T_0, T_1]$, такая что

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\tilde{u} - \tilde{u}_p\|_{\mathbf{FD}_c^\alpha[T_0, T_1]} = 0.$$

Используя эту последовательность, построим $(v_p)_{p \in \mathbb{N}^*} \subset C^1[T_0, T_2]$ следующим образом:

$$v_p(s) = \begin{cases} \tilde{u}_p(s), & T_0 \leq s \leq T_1, \\ \tilde{u}_p(T_1) + \frac{h}{2p^2} \tilde{u}'_p(T_1) - \frac{h}{2p^2} \tilde{u}'_p(T_1) \left(\frac{T_1 + \frac{h}{p} - s}{\frac{h}{p}} \right)^{2p}, & T_1 \leq s \leq T_1 + \frac{h}{p}, \\ \tilde{u}_p(T_1) + \frac{h}{2p^2} \tilde{u}'_p(T_1), & T_1 + \frac{h}{p} \leq s \leq T_2. \end{cases}$$

Ясно, что $(v_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ — последовательность Коши в $\mathbf{FD}^\alpha[T_0, T_2]$. Таким образом, существует $v \in \mathbf{FD}^\alpha[T_0, T_2]$, такое что

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|v - v_p\|_{\mathbf{FD}_c^\alpha[T_0, T_2]} = 0.$$

Однако $\forall s \in]T_1, T_2] \exists p \geq 1$, такое что $v'_p(s) = 0$. Тогда $\forall s \in]T_1, T_2] \quad v'(s) = 0$, что дает

$$\begin{aligned} \forall s \in [T_1, T_2] \quad |D_c^\alpha v(s)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{T_0}^s (s-\theta)^{-\alpha} v'(\theta) d\theta \right| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{T_0}^{T_1} (s-\theta)^{-\alpha} v'(\theta) d\theta \right| = |V(s)|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\max_{s \in [T_1, T_2]} |V(s)| \leq \|v\|_{\mathbf{FD}_c^\alpha[T_0, T_2]}.$$

Пусть $s, t \in [T_0, T_2]$, $x, y \in \mathbb{R}$, тогда

$$\begin{aligned} |\tilde{K}(t, s, x, y)| &\leq |K(t, s, x, y + V(s)) - K(t, s, x, V(s))| + |K(t, s, x, V(s))| \\ &\leq B|y| + M_1|x|^{\gamma_1} + M_2\|v\|_{\mathbf{FD}_c^\alpha[T_0, T_2]}^{\gamma_2} + M_3, \\ \left| \frac{\partial \tilde{K}}{\partial t}(t, s, x, y) \right| &\leq \bar{B}|y| + \bar{M}_1|x|^{\gamma_1} + \bar{M}_2\|v\|_{\mathbf{FD}_c^\alpha[T_0, T_2]}^{\gamma_2} + \bar{M}_3. \end{aligned}$$

Это означает, что $\tilde{K}$ подтверждает гипотезу 2 из H1 с $\tilde{M}_1 = M_1$, $\tilde{M}_2 = \max(B, \bar{B})$, $\tilde{M}_3 = M_2\|v\|_{\mathbf{FD}_c^\alpha[T_0, T_2]}^{\gamma_2} + M_3$, $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1$ и $\tilde{\gamma}_2 = 1$. Ясно, что $\tilde{K}$ подтверждает гипотезу 3 из H1 при наличии тех же постоянных $A, \bar{A}, B$ и $\bar{B}$. Поэтому мы можем снова применить основной шаг. Таким образом, (4) имеет единственное решение в $[T_1, T_2]$, скажем, w . Теперь мы видим, что

$$\lim_{t \rightarrow T_1^+} w(t) = \lim_{t \rightarrow T_1^-} \tilde{u}(t) = F(T_1),$$

так что продолжение от $\tilde{u}$ до w непрерывно, и мы имеем единственное решение в $[a, T_2]$.

Этот аргумент можно повторить, и, поскольку существует только конечное число подынтервалов в $[a, b]$, мы тем самым строим единственное решение $u \in \mathbf{FD}_c^\alpha[a, b]$ для (1). $\square$

Предыдущая теорема показывает полезность дробной производной Капуто по сравнению с классической производной. Действительно, нам не нужно условие $B < 1$ в отличие от работы Х. Геббай с соавторами [1], где это ограничительное условие было нужно для получения единственности решения. Этот результат объясняет наш выбор, когда мы изменили u' на $D_c^\alpha u$. С другой стороны, мы получим слабо сингулярное ядро, для которого необходим численный подход, аналогичный разработанному в [5].

3.2. Численное исследование

При выведении уравнения в смысле Капуто мы получим слабую сингулярность в следующих интегральных членах:

$$\int_a^t (t-s)^{-\alpha} K(s, s, u(s), D_c^\alpha u(s)) ds, \quad \int_a^t (t-s)^{-\alpha} \int_a^s \frac{\partial K}{\partial t}(s, \theta, u(\theta), D_c^\alpha u(\theta)) d\theta ds.$$

Тогда нам нужно будет использовать метод интегрирования произведения (см. [2, 5, 12–14]) для численной аппроксимации единственного решения u нашего уравнения (1). Этот метод выполняется в два этапа. Сначала займемся регулярными частями с использованием кусочно-линейных функций на разбиении $\{t_j\}_{0 \leq j \leq n}$, $t_j = a + jh$, $h = \frac{b-a}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_{n,1}[\Theta](t, s) = \frac{s-t_j}{h} \Theta(t, t_{j+1}) + \frac{t_{j+1}-s}{h} \Theta(t, t_j),$$

где Θ — непрерывная функция. Что касается подхода с использованием интегрального члена, не содержащего слабой сингулярности, воспользуемся правилом трапеций. Это приводит к следующим формулам интегрирования для $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} \int_a^{t_i} K(t_i, s, u(s), D_c^\alpha u(s)) ds &\simeq \frac{h}{2} K(t_i, t_0, u(t_0), D_c^\alpha u(t_0)) + h \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i, t_j, u(t_j), D_c^\alpha u(t_j)) + \\ &\frac{h}{2} K(t_i, t_i, u(t_i), D_c^\alpha u(t_i)), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int_a^{t_i} (t_i-s)^{-\alpha} K(s, s, u(s), D_c^\alpha u(s)) ds &\simeq \sum_{j=0}^{i-1} \left[\hat{\beta}_{i,j} K(t_{j+1}, t_{j+1}, u(t_{j+1}), D_c^\alpha u(t_{j+1})) + \right. \\ &\left. \hat{\gamma}_{i,j+1} K(t_j, t_j, u(t_j), D_c^\alpha u(t_j)) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_a^{t_i} (t_i-s)^{-\alpha} \int_a^s \frac{\partial K}{\partial t}(s, \theta, u(\theta), D_c^\alpha u(\theta)) d\theta ds &\simeq \sum_{j=0}^{i-1} \left\{ \hat{\beta}_{i,j} \left[\frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_{j+1}, t_0, u(t_0), D_c^\alpha u(t_0)) + h \sum_{k=1}^j \frac{\partial K}{\partial t}(t_{j+1}, t_k, u(t_k), D_c^\alpha u(t_k)) + \right. \right. \\ &\left. \frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_{j+1}, t_{j+1}, u(t_{j+1}), D_c^\alpha u(t_{j+1})) \right] + \\ &\hat{\gamma}_{i,j+1} \left[\frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_j, t_0, u(t_0), D_c^\alpha u(t_0)) + h \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial K}{\partial t}(t_j, t_k, u(t_k), D_c^\alpha u(t_k)) + \right. \\ &\left. \left. \frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_j, t_j, u(t_j), D_c^\alpha u(t_j)) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где для $0 \leq j \leq i-1$

$$\begin{cases} \hat{\beta}_{i,j} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i-s)^{-\alpha} (s-t_j) ds, \\ \hat{\gamma}_{i,j+1} = \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_i-s)^{-\alpha} (t_{j+1}-s) ds. \end{cases}$$

Затем вычислим $\hat{\beta}_{i,j}$ и $\hat{\gamma}_{i,j+1}$ явным образом. Заменим (5), (6) и (7) в исходном уравнении (1) для получения

$$U_0 = f(a), \quad (8)$$

$$V_0 = D_c^\alpha f(a), \quad (9)$$

$$U_i = f(t_i) + \frac{h}{2} K(t_i, t_0, U_0, V_0) + h \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i, t_j, U_j, V_j) + \frac{h}{2} K(t_i, t_i, U_i, V_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} V_i = D_c^\alpha f(t_i) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{i-2} \hat{\beta}_{i,j} & \left[K(t_{j+1}, t_{j+1}, U_{j+1}, V_{j+1}) + \frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_{j+1}, t_0, U_0, V_0) + \right. \\ & \left. h \sum_{k=1}^j \frac{\partial K}{\partial t}(t_{j+1}, t_k, U_k, V_k) + \frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_{j+1}, t_{j+1}, U_{j+1}, V_{j+1}) \right] + \\ & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{i-1} \hat{\gamma}_{i,j+1} \left[K(t_j, t_j, U_j, V_j) + \frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_j, t_0, U_0, V_0) + \right. \\ & \left. h \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial K}{\partial t}(t_j, t_k, U_k, V_k) + \frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_j, t_j, U_j, V_j) \right] + \\ & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\beta}_{i,i-1} \left[\frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_0, U_0, V_0) + h \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_k, U_k, V_k) \right] + \\ & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\beta}_{i,i-1} \left[K(t_i, t_i, U_i, V_i) + \frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_i, U_i, V_i) \right], \quad \leq i \leq n, \end{aligned} \quad (11)$$

где U_i приближается к $u(t_i)$ и V_i приближается к $D_c^\alpha u(t_i)$ для всех $1 \leq i \leq n$.

3.2.1. Системное исследование

Теорема 3. Для достаточно малого h система (8)–(11) имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим, что пространство $\mathbb{R}^2$ имеет норму

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\|_1 = |X| + |Y|.$$

Для всех $1 \leq i \leq n$ мы определим

$$\Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} S + \frac{h}{2} K(t_i, t_i, X, Y) \\ \hat{S} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\beta}_{i,i-1} \left[K(t_i, t_i, X, Y) + \frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_i, X, Y) \right] \end{pmatrix},$$

где

$$S = f(t_i) + \frac{h}{2} K(t_i, t_0, U_0, V_0) + h \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i, t_j, U_j, V_j),$$

$$\hat{S} = D_c^\alpha f(t_i) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{i-2} \hat{\beta}_{i,j} \left[K(t_{j+1}, t_{j+1}, U_{j+1}, V_{j+1}) + \frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_{j+1}, t_0, U_0, V_0) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& h \sum_{k=1}^j \frac{\partial K}{\partial t}(t_{j+1}, t_k, U_k, V_k) + \frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_{j+1}, t_{j+1}, U_{j+1}, V_{j+1}) \Big] + \\
& \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{i-1} \hat{\gamma}_{i,j+1} \left[K(t_j, t_j, U_j, V_j) + \frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_j, t_0, U_0, V_0) + \right. \\
& \left. h \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial K}{\partial t}(t_j, t_k, U_k, V_k) + \frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_j, t_j, U_j, V_j) \right] + \\
& \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\beta}_{i,i-1} \left[\frac{h}{2} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_0, U_0, V_0) + h \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_k, U_k, V_k) \right].
\end{aligned}$$

Если мы знаем $U_0, U_1, \dots, U_{i-1}, V_0, V_1, \dots, V_{i-1}$, то (8)–(11) — неявные уравнения, определяющие U_i и V_i :

$$\begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix} = \Psi_i \left(\begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix} \right).$$

Мы имеем

$$\begin{aligned}
& \left\| \Psi_i \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - \Psi_i \left(\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right) \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right\|_1, \\
& d_1 = \frac{h}{2} \left(K(t_i, t_i, X, Y) - K(t_i, t_i, X', Y') \right), \\
& d_2 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\beta}_{i,i-1} \left[\left(K(t_i, t_i, X, Y) - K(t_i, t_i, X', Y') \right) + \right. \\
& \left. \frac{h}{2} \left(\frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_i, X, Y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_i, X', Y') \right) \right].
\end{aligned}$$

Для достаточно малого h

$$\begin{aligned}
|d_1| & \leq \frac{h}{2} (A |X - X'| + B |Y - Y'|), \\
|d_2| & \leq \frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \left[(A |X - X'| + B |Y - Y'|) + \frac{h}{2} (\bar{A} |X - X'| + \bar{B} |Y - Y'|) \right].
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\left\| \Psi_i \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - \Psi_i \left(\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right) \right\|_1 & \leq \left[\frac{h}{2} \max(A, B) + \frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \max(A, B) + \frac{h^{2-\alpha}}{2\Gamma(3-\alpha)} \max(\bar{A}, \bar{B}) \right] \times \\
& \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{h}{2} \max(A, B) + \frac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \max(A, B) + \frac{h^{2-\alpha}}{2\Gamma(3-\alpha)} \max(\bar{A}, \bar{B}) \right] = 0,$$

Ψ_i — сжатие для достаточно малого h . Используя теорему Банаха, мы получим наш результат. $\square$

3.2.2. Анализ ошибки

Пусть u — решение (1). Функция

$$\Delta(h, t_n) = |\delta(h, t_n)| + |\hat{\delta}(h, t_n)|$$

есть локальная ошибка совместимости (1), где

$$\begin{aligned} \delta(h, t_n) &= \int_a^{t_n} K(t_n, s, u(s), D_c^\alpha u(s)) ds - \sum_{j=0}^n w_{nj} K(t_n, t_j, u(t_j), D_c^\alpha u(t_j)), \\ \hat{\delta}(h, t_n) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \int_a^{t_n} (t_n - s)^{-\alpha} K(s, s, u(s), D_c^\alpha u(s)) ds - \right. \\ &\quad \sum_{j=0}^{n-1} \left[\hat{\beta}_{n,j} K(t_{j+1}, t_{j+1}, u(t_{j+1}), D_c^\alpha u(t_{j+1})) + \right. \\ &\quad \left. \hat{\gamma}_{n,j+1} K(t_j, t_j, u(t_j), D_c^\alpha u(t_j)) \right] + \\ &\quad \int_a^{t_n} (t_n - s)^{-\alpha} \int_a^s \frac{\partial K}{\partial t}(s, \theta, u(\theta), D_c^\alpha u(\theta)) d\theta ds - \\ &\quad \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \hat{\beta}_{n,j} \left[\sum_{k=0}^{j+1} w_{nk} \frac{\partial K}{\partial t}(t_{j+1}, t_k, u(t_k), D_c^\alpha u(t_k)) \right] + \right. \\ &\quad \left. \hat{\gamma}_{n,j+1} \left[\sum_{k=0}^j w_{nk} \frac{\partial K}{\partial t}(t_j, t_k, u(t_k), D_c^\alpha u(t_k)) \right] \right\} \Bigg\} \end{aligned}$$

при

$$w_{nj} = \begin{cases} \frac{h}{2}, & \text{если } j = 0, n; \\ h, & \text{если } 1 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

Предложение 2. $\max_{1 \leq j \leq i} |\Delta(h, t_j)| \leq 2(b-a) \max(A, B) (\omega_\alpha(h, f) + \omega_\alpha(h, H)) + (b-a) \max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} \omega_\alpha(h, K(t, \cdot, x, y)) + (b-a) (\max_{x, y \in \mathbb{R}} \omega_\alpha(h, K(\cdot, \cdot, x, y)) + \omega_\alpha(h, I)),$
где

$$\omega_\alpha(h, \varphi) = \max_{|\tau-\theta|<h} |\varphi(\tau) - \varphi(\theta)| + \max_{|\tau-\theta|<h} |D_c^\alpha \varphi(\tau) - D_c^\alpha \varphi(\theta)|,$$

$$H(t) = \int_a^t K(t, s, u(s), D_c^\alpha u(s)) ds,$$

$$I(t) = \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), D_c^\alpha u(s)) ds.$$

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned} |\delta(h, t_i)| &\leq \max_{|\tau-\theta|<h} \left(|K(t_i, \tau, u(\tau), D_c^\alpha u(\tau)) - K(t_i, \tau, u(\theta), D_c^\alpha u(\theta))| + \right. \\ &\quad \left. |K(t_i, \tau, u(\theta), D_c^\alpha u(\theta)) - K(t_i, \theta, u(\theta), D_c^\alpha u(\theta))| \right) \int_a^{t_i} ds \end{aligned}$$

$$\leq (b-a) \max(A, B) \omega_{\alpha}(h, u) + \\ (b-a) \max_{|\tau-\theta|<h} \left(\max_{a \leq t \leq b; x, y \in \mathbb{R}} |K(t, \tau, x, y) - K(t, \theta, x, y)| \right).$$

Но

$$\omega_{\alpha}(h, u) \leq \omega_{\alpha}(h, f) + \omega_{\alpha}(h, H).$$

Используя аналогичные шаги, получим

$$|\hat{\delta}(h, t_i)| \leq (b-a) \max(A, B) (\omega_{\alpha}(h, f) + \omega_{\alpha}(h, H)) + \\ (b-a) \left(\max_{x, y \in \mathbb{R}} \omega_{\alpha}(h, K(\cdot, \cdot, x, y) + \omega_{\alpha}(h, I)) \right). \quad \square$$

Пусть $\{E_i\}_{0 \leq i \leq N}$ — ошибка дискретизации:

$$E_i = |\varepsilon_i| + |\hat{\varepsilon}_i|,$$

где

$$\begin{cases} \varepsilon_i = U_i - u(t_i), \\ \hat{\varepsilon}_i = V_i - D_c^{\alpha} u(t_i). \end{cases}$$

Метод считается сходящимся, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq i \leq N} E_i \right) = 0.$$

Теорема 4. При выполнении гипотез $H1$ и предположении, что интервал $[a, b]$ может быть разбит на конечное число подынтервалов $[a = z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{m-1}, z_m = b]$, таких что для всех достаточно малых $h > 0$, если j_v обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное z_v/h , и $\kappa_{ij} = \hat{\kappa}_{ij} = 0$ для $j > i$, веса $\kappa_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{j=j_v}^{j_{v+1}-1} \left| \frac{\left[\frac{h \max(\bar{A}, \bar{B})}{\Gamma(1-\alpha)} \kappa_{ij} + \frac{\max(A, B)}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\kappa}_{ij} + h \max(A, B) \right]}{1 - \left[\frac{h \max(\bar{A}, \bar{B})}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\beta}_{i, i-1} + \frac{\max(A, B)}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\beta}_{i, i-1} + h \max(A, B) \right]} \right| \leq 3\rho < 1, \quad i \geq 1, \quad 0 \leq v \leq m,$$

при

$$\kappa_{ij} = \begin{cases} \hat{\beta}_{i, i-1}, & j = 0, \\ \sum_{k=j-1}^{i-3} \hat{\beta}_{ik} + \sum_{k=j}^{i-1} \hat{\gamma}_{i, k+1} + \hat{\beta}_{i, i-1}, & 1 \leq j \leq i-2, \\ \sum_{k=j}^{i-1} \hat{\gamma}_{i, k+1} + \hat{\beta}_{i, i-1}, & j = i-1, \end{cases}$$

$$\hat{\kappa}_{ij} = \begin{cases} \hat{\gamma}_{i, j+1}, & j = 0, \\ \hat{\beta}_{i, j-1} + \hat{\gamma}_{i, j+1}, & 1 \leq j \leq i-1. \end{cases}$$

Это разбиение должно быть независимым от h . Тогда

$$\max_{1 \leq j \leq i} |E_j| \leq \left(\frac{1}{1-3\rho} \right)^{m+2} \max_{1 \leq j \leq i} |\Delta(h, t_j)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \sum_{j=0}^i w_{ij} \left\{ K(t_i, t_j, U_j, V_j) - K(t_i, t_j, u(t_j), D_c^\alpha u(t_j)) \right\} - \delta(h, t_i), \\ \hat{\varepsilon}_i &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} \hat{\beta}_{i,j} \left[\left(K(t_{j+1}, t_{j+1}, U_{j+1}, V_{j+1}) - K(t_{j+1}, t_{j+1}, u(t_{j+1}), D_c^\alpha u(t_{j+1})) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=0}^{j+1} w_{ik} \left(\frac{\partial K}{\partial t}(t_{j+1}, t_k, U_k, V_k) - \frac{\partial K}{\partial t}(t_{j+1}, t_k, u(t_k), D_c^\alpha u(t_k)) \right) \right] + \\ &\quad \sum_{j=0}^{i-1} \hat{\gamma}_{i,j+1} \left[\left(K(t_j, t_j, U_j, V_j) - K(t_j, t_j, u(t_j), D_c^\alpha u(t_j)) \right) + \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{k=0}^j w_{ik} \left(\frac{\partial K}{\partial t}(t_{j+1}, t_k, U_k, V_k) - \frac{\partial K}{\partial t}(t_{j+1}, t_k, u(t_k), D_c^\alpha u(t_k)) \right) \right) \right] \right\} - \\ &\quad \hat{\delta}(h, t_i). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} E_i &\leq \sum_{j=0}^{i-1} \left[\frac{h \max(\bar{A}, \bar{B})}{\Gamma(1-\alpha)} \kappa_{ij} + \frac{\max(A, B)}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\kappa}_{ij} + h \max(A, B) \right] E_j + \\ &\quad \left[\frac{h \max(\bar{A}, \bar{B})}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\beta}_{i,i-1} + \frac{\max(A, B)}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\beta}_{i,i-1} + h \max(A, B) \right] E_i + \\ &\quad \Delta(h, t_i). \end{aligned}$$

Для достаточно малого h получим

$$\begin{aligned} E_i &\leq \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\left[\frac{h \max(\bar{A}, \bar{B})}{\Gamma(1-\alpha)} \kappa_{ij} + \frac{\max(A, B)}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\kappa}_{ij} + h \max(A, B) \right]}{1 - \left[\frac{h \max(\bar{A}, \bar{B})}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\beta}_{i,i-1} + \frac{\max(A, B)}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\beta}_{i,i-1} + h \max(A, B) \right]} E_j + \\ &\quad \frac{\Delta(h, t_i)}{1 - \left[\frac{h \max(\bar{A}, \bar{B})}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\beta}_{i,i-1} + \frac{\max(A, B)}{\Gamma(1-\alpha)} \hat{\beta}_{i,i-1} + h \max(A, B) \right]}. \end{aligned}$$

Применив теорему 8.1 из [2], мы получим наш результат. $\square$

В предыдущей теореме мы использовали идею, развитую в [2]. На практике постоянную m трудно получить.

3.2.3. Численные примеры

Чтобы показать эффективность нашего метода, рассмотрим уравнение

$$\forall t \in [0, 1] \quad u(t) = \frac{1}{10} \int_0^t \cos \left(\sqrt{s} \left(\sqrt{s} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) + 2t + u(s) - D_c^{0.5} u(s) \right) ds + f(t), \quad (12)$$

где

$$f(t) = t + \frac{\sin(2t)(4\sin^2(t) - 1)}{20},$$

а точное решение и его дробная производная задаются следующим образом:

$$u(t) = t, \quad D_c^{0.5}u(t) = \sqrt{\frac{4t}{\pi}}.$$

Мы видим, что ядро $K(s, t, x, y) = \cos\left(\sqrt{s}\left(\sqrt{s} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) + 2t + x - y\right)$ удовлетворяет гипотезе $H1$. Теперь используем квадратуру трапеций с методом интегрирования произведения для получения систем (8)–(11). Кроме того, вспомним, что функция $D_c^{0.5}f(t)$ сложнее и не может быть вычислена точно, поэтому используем квадратуру трапеции для приближения $D_c^{0.5}f(t)$ в нашей системе. После этого приближаем члены U_n и V_n для $n \geq 1$, используя итерационный метод Банаха с условием останова

$$|X_{\text{new}} - X_{\text{old}}| + |Y_{\text{new}} - Y_{\text{old}}| \leq 10^{-7}.$$

Ошибку, полученную нашим методом, обозначим

$$E_n = \max_{0 \leq i \leq n} \left\{ |u(t_i) - U_i| + |D_c^{0.5}u(t_i) - V_i| \right\}.$$

Из таблицы 1 мы видим, что наш метод дает хорошие результаты за счет уменьшения шага разбиения h_n .

Таблица 1. Численные результаты для (12)

n	E_n
10	$3.46 E - 1$
50	$1.49 E - 1$
100	$1.04 E - 1$
200	$7.39 E - 2$
500	$4.66 E - 2$
1000	$3.29 E - 2$

Рассмотрим второе уравнение, определенное для произвольного значения $0 < \alpha < 1$ следующим образом:

$$u(t) = f(t) + \int_0^t \frac{k(s)(s+1)}{5 + \left(u(s) + D_c^\alpha u(s) + 1 - \frac{s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^2} ds, \quad t \in [0, 1], \quad (13)$$

где

$$k(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t - t^2), & t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(t^2 - t), & t > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$f(t) = t - \frac{k(t)}{2} \ln(6 + 2t + t^2) + \ln(\sqrt{6})k(t).$$

Это уравнение изучалось в [1], но в нашем случае мы берем дробную производную, а в [1] авторы использовали уравнение с классической производной. Точное решение также задается как $u(t) = t$, а его дробная производная — как $D_c^\alpha u(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$.

Мы видим, что ядро $K(t, s, x, y) = \frac{k(t)(s+1)}{5 + \left(x + y + 1 - \frac{s^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^2}$ удовлетворяет гипотезе

$H1$. Мы также используем те же шаги, что и в предыдущем примере, для аппроксимации этого уравнения, и берем такое же условие остановки. Обозначим ошибку, полученную нашим методом для $0 < \alpha < 1$, как

$$E_n^\alpha = \max_{0 \leq i \leq n} \left\{ |u(t_i) - U_i| + |D_c^\alpha u(t_i) - V_i| \right\}.$$

В этом примере мы выбрали то же уравнение, что в [1], чтобы показать влияние α при изменении его значений в численных тестах, поскольку мы знаем, что использование дробной производной Капуто не является удобным, если $\alpha \rightarrow 1$, что будет численно продемонстрировано в наших результатах.

Таблица 2. Численные результаты для (13)

n	$E_n^{0.1}$	$E_n^{0.5}$	$E_n^{0.9}$	Результаты [1] (классическая производная)
10	$7.57 E - 2$	$2.57 E - 1$	$7.65 E - 1$	$6.52 E - 3$
50	$1.66 E - 2$	$1.12 E - 1$	$6.58 E - 1$	$1.47 E - 3$
100	$8.86 E - 3$	$7.90 E - 2$	$6.14 E - 1$	$7.46 E - 4$
200	$4.73 E - 3$	$5.58 E - 2$	$5.74 E - 1$	$3.75 E - 4$
500	$2.06 E - 3$	$3.53 E - 2$	$5.52 E - 1$	$1.51 E - 4$
1000	$1.10 E - 3$	$2.49 E - 2$	$4.89 E - 1$	$7.55 E - 5$

В табл. 2 мы видим, что для $\alpha = 0.1$ и $\alpha = 0.5$ ошибка уменьшается при уменьшении шага h_n . Однако для $\alpha = 0.9$ ошибка $E_n^{0.9}$ почти фиксирована, что показывает теоретический предел дробной производной Капуто. Это явление вызвано двумя причинами: во-первых, $\lim_{\alpha \rightarrow 1} D_c^\alpha u \neq u'$, что нарушает свойства нашей нормы $\|\cdot\|_\alpha$; во-вторых, при $\alpha \approx 1$ ядро становится сильно сингулярным из-за члена $(t-s)^{-\alpha}$, который делает метод интегрирования произведения абсолютно неэффективным. Поэтому нам приходится рассматривать другую форму дробной производной, которая является более подходящей, такую как дробная производная Халила [15] или как дробная производная Геббая–Гиата [10].

4. Выводы

Мы исследовали интегро-дифференциальное дробное нелинейное уравнение Вольтерра, чтобы получить гипотезу, обеспечивающую существование и единственность решения. Гипотезы, необходимые для аналитического исследования, применимы на практике. Используя идею из [2], мы построили численный метод для численного приближения решения. В качестве перспективы на будущее мы рассмотрим случай, когда ядро является слабо сингулярным.

Благодарности. Мы очень благодарны рецензентам за потраченное время и предложенные исправления для улучшения статьи. Огромное спасибо ответственному секретарю редколлегии журнала Людмиле Васильевой за помощь и терпение.

Литература

1. Guebbai H., Aissaoui M.Z., Debbar I., Khalla B. Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation // Applied Mathematics and Computation.— 2014.— Vol. 229.— P. 367–373.

2. **Linz P.** Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. — Philadelphia: SIAM, 1985.
3. **Brunner H.** The numerical treatment of Volterra integro-differential equations with unbounded delay // J. Comp. Appl. Math. — 1989. — Vol. 28. — P. 5–23.
4. **Babaaghaie A., Maleknejad K.** Numerical solutions of nonlinear two-dimensional partial Volterra integro-differential equations by Haar wavelet // J. Comp. Appl. Math. — 2017. — Vol. 317. — P. 643–651.
5. **Ghiat M., Guebbai H.** Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation with weakly singular kernel // Comp. Appl. Math. — 2018. — Vol. 37, iss. 4. — P. 4661–4674.
6. **Segni S., Ghiat M., Guebbai H.** New approximation method for Volterra nonlinear integro-differential equation // Asian-European J. of Mathematics. — 2019. — Vol. 12, № 1. — P. 1950016. — DOI: 10.1142/S1793557119500165.
7. **Touati S., Lemita S., Ghiat M., Aissaoui M.Z.** Solving a nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equation with weakly singular kernels // Fasciculi Mathematici. — 2019. — Vol. 62, № 1. — P. 155–168.
8. **Salah S., Guebbai H., Lemita S., Aissaoui M.Z.** Solution of an integro-differential nonlinear equation of volterra arising of earthquake model // Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica. — 2020. — DOI: 10.5269/bspm.48018
9. **Kilbas A.A., Srivastava H.H., Trujillo J.J.** Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Vol. 204. — Elsevier Science, 2006.
10. **Guebbai H., Ghiat M.** New conformable fractional derivative definition for positive and increasing functions and its generalization // Advances in Dynamical Systems and Applications. — 2016. — Vol. 11, № 2. — P. 105–111.
11. **Lipschutz S.** General Topology // Schaum's Outlines. — New York: McGraw-Hill, 1965.
12. **Gu Z., Guo X., Sun D.** Series expansion method for weakly singular Volterra integral equations // Applied Numerical Mathematics. — 2016. — Vol. 105, iss. C. — P. 112–123.
13. **Zhu L., Wang Y.** Numerical solutions of Volterra integral equation with weakly singular kernel using SCW method // Applied Mathematics and Computation. — 2015. — Vol. 260, iss. C. — P. 63–70.
14. **Atkinson K., Han W.** Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework. — New York: Springer-Verlag, 2001.
15. **Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M.** A new definition of fractional derivative // J. Comp. Appl. Math. — 2014. — Vol. 264. — P. 65–70.

*Поступила в редакцию 18 июля 2019 г.
После исправления 15 января 2021 г.
Принята к печати 14 июля 2021 г.*