рические размеры частиц и параметры, характеризующие потенциал их взаимодействия, взяты из [4].

Результаты вычислений приведены в таблице. Звездочка над символом коэффициента вязкости означает, что он получен путем линейной экстраполяции экспериментальных данных [3] в область рассматриваемой температуры. Если принять во внимание, что на практике нередко требуется знать лишь порядок величины константы реакции, то соответствие между теоретическими и экспериментальными данными [5] сравнительно хорошее.

Поступила 27 X 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kramers H. A.** Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions.— Physica (The Hague), 1940, vol. 7, N 4.
2. **Решетняк С. А., Шелепин Л. А.** К диффузионной теории химических реакций.— ПМТФ, 1981, № 5.
3. **Таблицы** физических величин. Справочник/Под ред. И. К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976.
4. **Краткий** справочник физико-химических величин/Под ред. К. П. Мищенко и А. А. Равделя. Л.: Химия, 1972.
5. **Кондратьев В. Н.** Константы скорости газофазных реакций. Справочник. М.: Наука, 1970.

УДК 532.516

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАДИАЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ, ОБРАЗОВАННОМ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

П. И. Саньков, Е. М. Смирнов

(Ленинград)

Известные аналитические частные решения уравнений Навье — Стокса для задачи о течении жидкости между двумя дисками, вращающимися с одинаковой [1—2] или разными [3] угловыми скоростями, представляются в виде рядов по степеням безразмерных параметров, один из которых пропорционален угловой скорости вращения, а другой — средней по зазору величине радиальной скорости на данном радиусе. В настоящей работе решение задачи представляется в виде ряда только по степеням второго из безразмерных параметров. Множители при различных степенях выбранного параметра, являющиеся функциями поперечной координаты и параметра, характеризующего интенсивность вращения, находятся путем численного интегрирования последовательных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученное решение в нулевом приближении совпадает с известными автомодельными численными решениями уравнений Навье—Стокса для течения с нулевым радиальным расходом между двумя вращающимися дисками [4—5], а в целом пригодно для анализа течения в более широком по сравнению с решениями [1—3] диапазоне изменения параметров задачи. Подробно представлены результаты решения и сравнение с экспериментальными данными [6—7] в случае вращения дисков с одинаковыми скоростями.

1. Рассмотрим осесимметричное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в узком зазоре между двумя параллельными дисками, которые в общем случае вращаются с различными скоростями вокруг единой оси. Начало цилиндрической системы координат r, θ, z поместим в точку пересечения оси вращения с внутренней поверхностью одного из дисков, угловую скорость вращения которого положим равной величине ω. Внутренняя поверхность второго диска находится на расстоянии $z = h$ и вращается с постоянной угловой скоростью $\alpha\omega(-1 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. На оси вращения в зазоре имеется источник (сток) жидкости заданной мощности $2\pi Q$.

Течение жидкости в зазоре описывается системой уравнений Навье—Стокса

$$u\frac{\partial v}{\partial r}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1.1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial r}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{uv}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),\quad \frac{\partial (ru)}{\partial r}+\frac{\partial (rw)}{\partial z}=0$$

при следующих граничных условиях по координате z:

$$u=0,\ v=\omega r,\ w=0 \text{ при } z=0,$$
$$u=0,\ v=\alpha\omega r,\ w=0 \text{ при } z=h. \tag{1.2}$$

Здесь u, v, w — составляющие скорости по координатам r, θ, z; p, ρ, ν — давление, плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Примененный в работе полуаналитический метод построения частного решения системы (1.1) не использует граничных условий по координате r. Пригодность полученного решения для анализа течения при произвольных распределениях $u(z)$, $v(z)$ на цилиндрических поверхностях, ограничивающих зазор, обсуждается ниже.

Из уравнения неразрывности при заданных граничных условиях следует условие

$$\int_0^h rudz=Q=\text{const}. \tag{1.3}$$

2. Введем функцию тока

$$u=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad w=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{2.1}$$

и безразмерные величины

$$\xi=z/h,\quad \psi=-\frac{1}{2}\omega r^2hH, \tag{2.2}$$

$$u=-\frac{1}{2}\omega rU=-\frac{1}{2}\omega r\frac{\partial H}{\partial\xi},\quad v=\omega rG.$$

Подставим (2.1), (2.2) в систему (1.1) и условия (1.2), (1.3). Перейдем к новому аргументу ε, связанному с радиальной координатой соотношением $\varepsilon=2Q/\omega r^2h$.

Используя формулы перехода

$$r\frac{\partial}{\partial r}=-2\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon},\quad r^2\frac{\partial}{\partial r^2}=2\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}+2\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(2\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right),$$

получим в результате следующую систему уравнений:

$$U''-R\left(HU'+2G^2-\frac{1}{2}U^2\right)=2R\,\Pi+R\varepsilon\left(U\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}+U'\frac{\partial H}{\partial\varepsilon}\right)+O\left(\frac{h^2}{r^2}\varepsilon\right), \tag{2.3}$$

$$G''+R\,(GU-HG')=R\varepsilon\left(U\frac{\partial G}{\partial\varepsilon}-G'\frac{\partial H}{\partial\varepsilon}\right)+O\left(\frac{h^2}{r^2}\varepsilon\right),$$

$$U=H',\quad p=p^*+O\left(\frac{h^2}{r^2}\varepsilon\right).$$

Граничные условия к системе (2.3) имеют вид

$$U=0,\ G=1,\ H=0 \text{ при } \xi=0,\ U=0,\ G=\alpha,\ H=-\varepsilon \text{ при } \xi=1. \tag{2.4}$$

Здесь штрихом обозначена операция дифференцирования по ξ. Величина $R = \omega h^2/\nu$ является параметром задачи. Значения функции $\Pi = -\frac{1}{\rho\omega^2 r}\frac{dp^*}{dr}$, где $p^* = \int\limits_0^1 p d\xi$, определяются при удовлетворении граничному условию для безразмерной функции тока $H(\xi = 1) = -\varepsilon$. Безразмерные величины U, G, H имеют порядок единицы. Полагая $(h/r)^2\varepsilon \ll \ll 1$, в дальнейшем опустим в (2.3) члены этого порядка малости.

Точка $\varepsilon = 0$ является особой точкой уравнений системы (2.3), в которой уравнения (2.3) совпадают с уравнениями Кармана, используемыми в задачах на нахождение автомодельных решений для течения вблизи вращающихся поверхностей или в пристенном слое жидкости, когда последняя вдалеке от поверхности вращается как твердое тело.

Подчеркнем, что величина ε может стать сколь угодно малой не только при уменьшении мощности источника, но и при конечных фиксированных значениях Q, если только величины ω или r достаточно велики.

Решение $H_0(\xi)$, $U_0(\xi)$, $G_0(\xi)$ системы (2.3) при $\varepsilon = 0$ полностью определяется граничными условиями (2.4). Это решение, казалось бы, можно использовать как начальное условие для интегрирования системы (2.3), (2.4). Однако в области $\varepsilon \geqslant 0$ для любого α всегда найдется участок, внутри которого величина U, по крайней мере на части интервала изменения ξ, отрицательна, что делает поставленную задачу некорректной [8]. Разыскание решения численным интегрированием системы (2.3) с использованием функций H_0, U_0, G_0 в качестве начальных условий возможно лишь в случае $\varepsilon < 0$ для ограниченного диапазона изменения параметров α и R.

Применяя полуаналитический метод интегрирования системы (2.3), (2.4), использующий разложение искомых функций в ряд по степеням ε и численное интегрирование последовательных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, удается построить решение задачи (2.3), (2.4) в широком диапазоне изменения аргумента ε и параметров α и R. Вопрос о радиусе сходимости ряда остается открытым, однако поведение масштабов вычисленных величин, соответствующих возрастающим степеням ε, указывает на достаточно быструю сходимость ряда при не слишком больших значениях R. В полученном таким образом решении неавтомодельность задачи учитывается через суммарное действие источника (стока). Влияние другой причины неавтомодельности рассматриваемой задачи, а именно заданных распределений U и G на входе и выходе из зазора, исчезает на расстояниях, масштабом которых является ширина зазора, в то время как влияние источника (стока) в целом ощущается вдоль всего зазора. Таким образом, для любых граничных условий в случае $h/r \ll 1$ характеристики потока при перемещении рассматриваемого сечения внутрь зазора асимптотически приближаются к разыскиваемому частному, но практически главному решению поставленной задачи, которое вслед за [1] названо асимптотическим.

3. Представим решение в виде

$$F = F_0 + F_1\varepsilon + F_2\varepsilon^2 + F_3\varepsilon^3 + \ldots, \tag{3.1}$$

где F — любая из функций H, U, G, Π.

Подставим разложения (3.1) в систему (2.3) и, сохраняя члены, пропорциональные ε^3 включительно, получим четыре системы дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями. Вид системы и граничных условий для определения начального приближения легко получается из системы (2.3), (2.4) при $\varepsilon = 0$. Для систем следующих приближений введем общую форму записи

$$U_i'' - RH_0U_i' + A_i^1U_i = B_i^1,\quad G_i'' - RH_0G_i' + A_i^2G_i = B_i^2,\quad U_i = H_i',$$

Таблица 1

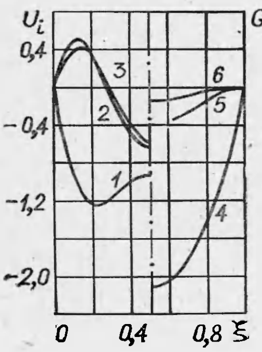
i	1	2	3
A_i^1	0	$-RU_0$	$-2RU_0$
A_i^2	0	$-RU_0$	$-2RU_0$
B_i^1	$2R\Pi_1+4RG_0G_1$	$2R\Pi_2+R\left[\frac{1}{2}U_1^2-H_2U_0'+ +2\left(G_1^2+2G_0G_2\right)\right]$	$2R\Pi_3+R\left(2U_1U_2-U_1'H_2+4G_1G_2+ +4G_0G_3-2U_0'H_3\right)$
B_i^2	$-RU_1G_0$	$-R\left(G_0'H_2+G_0U_2\right)$	$-R\left(U_1G_2+U_3G_0+2G_0'H_3+G_1'\overline{H_2}\right)$

где выражения для коэффициентов при производных функций и правых частей представлены в табл. 1. При этом все граничные условия имеют вид $U_i = G_i = H_i = 0$ при $\xi = 0$ и $\xi = 1$, за исключением условия $H_1 = -1$ при $\xi = 1$.

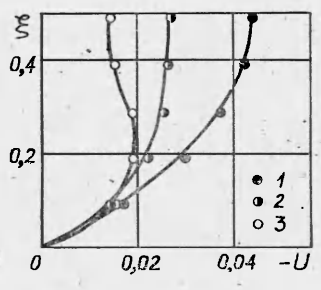
Полученные системы обыкновенных дифференциальных уравнений интегрировались последовательно численным методом. Для первых производных использовалась центральная аппроксимация на сетке с равномерным шагом, для вторых производных — обычная трехточечная аппроксимация. При решении систем применялся метод установления. На каждом временном шаге системы алгебраических уравнений решались методом прогонки для сложных систем [9]. Процесс установления считался законченным, когда достигалось условие $\sum\limits_{m=0}^{M} \left| F_{im}^{k+1} - F_{im}^{k} \right| \Big/ \sum\limits_{m=0}^{M} \left| F_{im}^{k+1} \right| \leqslant \delta$, где F_i — любая из функций H_i, U_i, G_i ($i = 0, 1, 2, 3$); m — номер узла сетки; M — общее число узлов; k — номер временного шага.

Систематические расчеты проведены при $M = 50$ и $\delta = 10^{-4}$. Результаты решения системы нулевого приближения в случае $\alpha = 0$ (вращающийся и неподвижный диски) вплоть до $R = 100$ согласуются с [4, 5]. Основные расчеты проведены для случая $\alpha = 1$ (вращение дисков с одинаковой скоростью), когда $U_0 = 0$, $G_0 = 1$. В качестве примера на фиг. 1 приведены результаты расчета функций F_i в разложении (3.1) для осевой и окружной составляющих скорости при $R = 10,0$. Кривые *1—3* соответствуют U_i, где $i = 1, 2, 3$, кривые *4—6* — G_i. Как видно, даже при достаточно большом значении параметра R величина функций F_i с увеличением номера i не только не возрастает, но заметно падает. Наиболее интересные с практической точки зрения интегральные характеристики течения представлены в табл. 2.

В [7] для случая $\alpha = 1$ измерены составляющие скорости жидкости при ее подаче в отверстие вблизи центра дисков. На фиг. 2 приведены экспериментальные [7] и рассчитанные в данной работе профили радиаль-

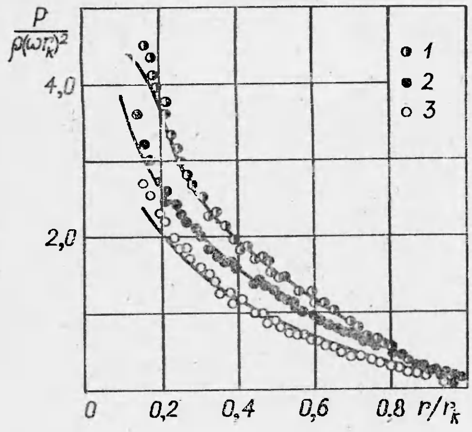


Фиг. 1



Фиг. 2

ной скорости: $1 - R = 4{,}0$, $\varepsilon = 0{,}0304$; $2 - R = 9{,}0$, $\varepsilon = 0{,}0203$; $3 - R = 16{,}0$, $\varepsilon = 0{,}0152$. Можно отметить хорошее согласие опытных и расчетных данных. Из сравнения результатов для окружной составляющей скорости следует аналогичный вывод.



Фиг. 3

Результаты измерения распределения давления вдоль зазора при подводе жидкости с периферии дисков, полученные в [6], приведены на фиг. 3 ($1 - R = 4{,}29$; $\varepsilon_k = -0{,}0468$; $2 - R = 2{,}17$; $\varepsilon_k = -0{,}319$; $3 - R = 7{,}11$; $\varepsilon_k = -0{,}280$; индекс k отмечает величину, определенную на внешней кромке дисков, где $r = r_k$). Расчетные данные (сплошные кривые) отклоняются от опытных лишь вблизи центрального отверстия. Отметим, что даже при весьма больших местных значениях $\varepsilon = (r/r_k)^{-2}\varepsilon_k$ при $r/r_k = 0{,}2$, а именно при $R = 4{,}29$, $\varepsilon = 11{,}7$; $R = 2{,}17$, $\varepsilon = 7{,}98$; $R = 7{,}11$, $\varepsilon = 7{,}00$ согласие результатов расчета и эксперимента хорошее. Однако дальнейшее увеличение ε (уменьшение r) приводит к резкому расхождению результатов. Определяя значения ε (при заданных R), соответствующие началу резкого отклонения расчетного значения величины dp^*/dr от экспериментального, можно предложить следующую оценку диапазона применимости полученного решения для расчета распределения давления: $R|\varepsilon| < 50$.

Таблица 2

R	1,0	2,0	4,0	9,0	16,0	25,0	49,0
Π_0	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0	−1,0
Π_1	6,2407	3,4833	2,4618	2,7578	3,8034	4,9598	7,0321
Π_2	−0,4002	−0,4459	−0,6202	−1,4343	−2,9205	−4,6150	−8,5520
Π_3	−0,0029	−0,0080	−0,0254	−0,1916	−0,9373	−2,2767	−4,5398
$G_0'(0)$	0	0	0	0	0	0	0
$G_1'(0)$	−0,4987	−0,9981	−1,9989	−4,5019	−8,0109	−12,5322	−24,6459
$G_2'(0)$	0,0004	0,0017	0,0027	0,0039	0,0109	0,0322	0,1764
$G_3'(0)$	0,0000	−0,0002	−0,0008	0,0004	0,0041	0,0240	0,1573

Сравнение настоящего решения с приведенными в [10] результатами численного интегрирования уравнений движения при подаче жидкости с периферии также указывает на хорошее согласие результатов на достаточном удалении от входа в зазор. Течение в узком зазоре на входном участке приближенным методом анализировалось в [11]. Сопоставление данных [10, 11] с результатами настоящего решения позволяет заключить, что влияние начального распределения при $R|\varepsilon| < 10$ исчезает для течения от центра при $r/r_i > 1{,}2$ (r_i — радиус внутренней кромки дисков), а для течения с периферии — при $r/r_k < 0{,}9$. Приведенные неравенства, конечно, следует рассматривать только как оценочные.

В заключение отметим, что при проведении расчетов для $\alpha = 0$ и -1 дополнительных трудностей не было.

Поступила 15 XII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Matsch L., Rice W.** An asymptotic solution for laminar flow of an incompressible fluid between rotating disks.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, vol. 35, N 3.
2. **Мисюра В. И.** Ламинарное течение несжимаемой жидкости между двумя вращающимися дисками.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 5.
3. **Kreith F., Viviand H.** Laminar source flow between two parallel coaxial disks rotating at different speeds.— Trans. ASME. Ser E. J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, N 3.
4. **Pearson C. E.** Numerical solution for time dependent viscous flow between two rotating coaxial disks.— J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, pt 4.
5. **Barret K. E.** Numerical study of the flow between rotating coaxial discs.— J. Appl. Math. and Phys., 1975, vol. 26, N 6.
6. **Adams R., Rice W.** Experimental investigation of the flow between co-rotating disks.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, N 3.
7. **Мисюра В. И.** Экспериментальное исследование течения несжимаемой жидкости между двумя вращающимися дисками.— Изв. высш. учеб. заведений. Энергетика, 1977, № 5.
8. **Тихонов А. Н., Арсенин В. И.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
9. **Самарский А. А., Николаев Е. С.** Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
10. **Boyd K. E., Rice W.** Laminar inward flow of an incompressible fluid between rotating disks with full peripheral admission.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, vol. 35, N 2.
11. **Шиляев М. И., Арбузов В. Н.** Начальный гидродинамический участок течения жидкости между вращающимися дисками.— В кн.: Методы гидроаэромеханики в приложении к некоторым технологическим процессам. Томск: изд. Томск. ун-та, 1977.

УДК 532.51 + 532.62

СТАЦИОНАРНЫЕ ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОЙ ПЛЕНКЕ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Ю. А. Буевич, С. В. Кудымов

(Свердловск)

Нелинейные уравнения, описывающие волновое течение тонкой жидкой пленки, получают обычно при помощи дополнительного предположения о характере распределения продольной компоненты скорости по толщине пленки. Такой подход реализован при использовании системы двух уравнений для расхода жидкости и отклонения толщины пленки от значения, соответствующего неволновому ламинарному течению, в [1—3]. В [4—6] единственное эволюционное уравнение для толщины пленки также получается при помощи метода типа обычного метода Кармана — Польгаузена. При этом неизбежно возникает вопрос о пределах применимости получаемых уравнений и о допускаемой ими точности описания волнового процесса. Для ответа на этот вопрос необходимо, очевидно, использовать прямые методы вывода эволюционного уравнения, предполагающие одновременное определение профиля скорости в пленке [7—9]. Ниже это сделано при небольших пленочных числах Рейнольдса для течения по наклонной плоскости (рассматривавшегося ранее в [6, 10, 11]). Одно из полученных уравнений применено к исследованию слабонелинейных стационарных бегущих волн. В отличие от прежних исследований стационарных режимов все параметры таких волн определены однозначно.

1. Течение в пленке. Введем безразмерные переменные и параметры

$$t = \frac{u_0}{\lambda} t', \quad x = \frac{x'}{\lambda}, \quad y = \frac{y'}{h_0}, \quad \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{u_0} \begin{Bmatrix} v'_x \\ v'_y \end{Bmatrix}, \tag{1.1}$$

$$\varphi = \frac{h - h_0}{h_0}, \quad p = \frac{\mathrm{Re}}{\rho u_0^2} p', \quad \mathrm{Re} = \frac{u_0 h_0}{\nu}, \quad \varepsilon = \frac{h_0}{\lambda},$$

$$T = \frac{3\varepsilon^3 \mathrm{We}}{\cos\alpha}, \quad \mathrm{We} = \frac{\sigma}{\rho g h_0^2}, \quad u_0 = \left(\frac{\cos\alpha}{3} \frac{g}{\nu}\right)^{1/3} Q^{2/3}, \quad h_0 = \left(\frac{3}{\cos\alpha} \frac{\nu Q}{g}\right)^{1/3}.$$

Здесь штрихами обозначены соответствующие размерные переменные; α — угол наклона плоскости к вертикали; λ — характерный про-