

Полученные закономерности показывают, что стабилизация пламени в канале смесителя, оказывая сильное влияние на его практические характеристики и организацию всего процесса горения, в свою очередь зависит от первичных гидродинамических процессов внедрения и разрушения. Изучение этих процессов на «холодных» моделях смесителя значительно расширяет и углубляет представления о газожидкостном горении. Одновременность смесеобразования и горения позволяет воздействовать непосредственно на скорость преобразования топлива за счет характеристик струйной системы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеев. Теория детонации. М.: ГИТТЛ, 1955.
2. Г. Ф. Кнорре. Сравнительный анализ характеристик факельных топок. М., 1947.
3. М. Е. Рудяк. ФГВ, 1983, 19, 3, 77.
4. Дж. Э. Дрюри. РТК, 1978, 16, 4, 40.
5. G. C. Ogg, G. A. Scetz. AIAA-Paper, 1980, N 80-0298.
6. Эббот, Клайн. Тр. амер. об-ва инж.-мех. Серия Д. Техническая механика, 1962, 3, 20.
7. Б. С. Дубинкин, М. С. Натанзон, А. Э. Чальян. ФГВ, 1978, 14, 6, 3.
8. В. К. Баев, Е. А. Соловова, П. К. Третьяков. — В кн.: Вопросы газодинамики. Новосибирск: ИТПМ, 1975.
9. Б. П. Леонов, С. В. Штейнман, А. В. Куликов. ФГВ, 1971, 7, 4, 572.
10. S. L. Plee, A. M. Mellor. Comb. Flame, 1978, 32, 2, 193.
11. Б. Льюис, Г. Эльбе. Горение, пламя и взрывы в газах. М.: Мир, 1968.
12. В. К. Баев, Б. В. Бошенатов, Ю. А. Пронин и др. ФГВ, 1981, 17, 3, 72.
13. М. Е. Рудяк. Изв. вузов. Авиационная техника, 1983, 3, 32.
14. Р. Б. Эдельман, С. С. Шмотолоха, С. Слуцкий. РТК, 1971, 9, 7, 180.
15. В. Л. Зимонт, Ю. М. Трушин. ФГВ, 1967, 3, 1, 86.
16. А. С. Соколик. Самовоспламенение, пламя и детонация в газах. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
17. В. Ф. Соколенко, Р. С. Тюльпанов, Ю. В. Игнатенко. ФГВ, 1971, 7, 4, 566.
18. С. И. Барановский. — В кн.: Исследование рабочего процесса в элементах двигателей и энергетических устройств с двухфазным рабочим телом/Под ред. Г. Н. Абрамовича, И. А. Лепешинского. М., 1980.
19. J. M. Hoyt, J. J. Taylor. Trans. of the ASME. J. fluids engineering, 1979, 101, 3, 304.
20. W. T. Pimbley, H. C. Lee. IBM J. of research and development, 1977, 21, 1, 21.
21. H. Tsuji, J. Yamaoka. Thirteenth Symp. (Interm.) on Combustion. Pittsburgh, 1971.

Поступила в редакцию 25/III 1985

### ДЕТОНАЦИЯ В РЕЛАКСИРУЮЩЕМ ГАЗЕ И РЕЛАКСАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

*Н. М. Кузнецов, В. А. Копотев*  
(Москва)

Теоретически исследуется одномерная детонация в газе, внутренние степени свободы которого (не связанные непосредственно с необратимым энерговыделением) характеризуются конечным временем релаксации  $\tau$ . В предельных случаях малых или больших значений параметра  $\alpha = \tau/\tau_q$  (где  $\tau_q$  — характерное время тепловыделения) такой процесс переходит соответственно в классическую детонацию (теория Зельдовича — Неймана — Деринга) или детонацию с эндотермической стадией реакции [1, 2]. Релаксирующий газ является, по существу, вариантом системы с конечными скоростями реакций (системы с дисперсией скорости звука), детонация которой подробно изучалась в работах [3—5], где впервые был поставлен и рассмотрен вопрос отбора скорости детонации в такой среде.

Применив метод характеристик к реагирующим газовым смесям (при анализе использовался факт распространения характеристик с замороженной скоростью звука), авторы [3] показали, что в одномерном

течении волну разрежения можно гладко сплечь со стационарной зоной детонационной волны (ДВ) только в той точке (Жуге), где скорость газа  $u$  относительно ДВ равна замороженной (по реакциям) скорости звука  $c_f$ . Однако в [4, 5] показано, что при монотонном выделении тепла скорость продуктов реакции  $u$  в стационарной зоне волны не может превысить значения равновесной скорости звука  $c_e$ , для которой всегда выполняется неравенство  $c_e < c_f$  [6—8]. Исследование немонотонного тепловыделения (так называемой «патологической» детонации) показало [1, 2, 6, 9, 10], что в этом случае точка Жуге с  $u = c_f$  располагается над равновесной детонационной адиабатой (где система неравновесна) и конечная скорость продуктов реакции больше  $c_f$ . Сверхзвуковая (по отношению к  $c_f$ ) скорость продуктов реакции может получиться также и в результате воздействия на поток пограничного слоя у стенок детонационной трубы [11]. Таким образом, трудности, связанные с неоднозначностью скорости звука, были устранены лишь в частных случаях детонации. В общем же случае оставался открытым вопрос о том, почему волна разрежения, движущаяся со скоростью  $c_f$ , не ослабляет скачок уплотнения и каким образом происходит отбор скорости детонации.

Теоретическое исследование волн разрежения в реагирующих средах показало, что с замороженной скоростью  $c_f$  движется только передний фронт волны [12, 13]. Максимум же энергии приходится на некоторую среднюю часть волны, скорость которой меньше  $c_f$ . На основе этого делался качественный вывод о том, что ДВ может не ослабевать и при  $u < c_f$ , и предпочтение отдавалось отбору скорости детонации по равновесной скорости звука (т. е. по условию в точке Жуге  $u = c_e$ , соответствующей касанию прямой Релея равновесной детонационной адиабаты), как наименее противоречивому в такой ситуации [6—8, 14—17]. Авторы многих расчетных работ по детонации (см., например, [14—17]) использовали в точке Жуге равенство  $u = c_e$ , хотя экспериментальные данные в ряде случаев [18—21] лучше отвечали условию  $u = c_f$ . Дополнительные трудности возникли в связи с экспериментами [18, 22, 23], в которых наблюдались скорости ДВ, соответствующие равенству  $u$  (в точке Жуге) скорости звука, замороженной не только по составу газа, но и по энергии некоторых внутренних степеней свободы молекул.

Изложенные трудности теории детонации в среде с дисперсией скорости звука (все равно, вызвана ли такая дисперсия конечными скоростями реакций или релаксацией энергии внутренних степеней свободы молекул) часто трактовались как противоречия, присущие самой классической теории детонации [7, 8, 24]. В связи с этим далее рассмотрены режимы самоподдерживающейся (нормальной) и пересжатой одномерной детонации при произвольном значении параметра  $\alpha$ . Определены основные качественные черты таких режимов на примере идеального газа с релаксирующей колебательной энергией молекул. Исследована «топология» непрерывной по  $\alpha$  эволюции нормальных (Жуге) и пересжатых режимов детонации на плоскости  $p-v$  (давление, удельный объем газа) при изменении  $\alpha$ . Показано существование значений  $\alpha_*$  и  $\alpha_{**} < \alpha_*$  порядка единицы таких, что при  $\alpha > \alpha_*$  выделение тепла в поступательные степени свободы газа немонотонно (аналог «патологической» детонации) и в точке Жуге (неравновесной)  $u = c_f$ ; при  $\alpha_* > \alpha > \alpha_{**}$  тепловыделение становится монотонным, а в точке Жуге (теперь равновесной) выполняются неравенства  $c_f > u > c_e$ ; при  $\alpha < \alpha_{**}$  тепловыделение по-прежнему остается монотонным и в равновесной точке Жуге  $u = c_e$ .

Скорость нормальной детонации  $D_J$  в пределе  $\alpha \rightarrow \infty$  соответствует касанию прямой Релея «замороженной» детонационной адиабаты  $F_f$  (адиабаты, рассчитанной при полностью замороженных колебательных степенях свободы молекул). Уменьшению  $\alpha$  отвечает падение  $D_J$ , которая при  $\alpha \leq \alpha_{**}$  принимает минимальное значение, соответствующее касанию прямой Релея равновесной детонационной адиабаты  $F_e$ . Решен вопрос о сопряжении стационарной зоны ДВ с волной разрежения. Ка-

чественно обсуждается процедура расчета параметров в точке Жуге и скорости нормальной детонации в других газовых системах с релаксацией. Предсказан новый (релаксационный) механизм неустойчивости ДВ. Показано, что при  $\alpha > \alpha_{**}$  существует бесконечно сильная зависимость состояния в конце стационарной зоны волны от ее интенсивности: бесконечно малое изменение интенсивности приводит к конечному изменению давления, температуры и плотности на границе стационарной зоны. Перемещается на конечное расстояние и сама граница. Такая зависимость приводит к конечным перепадам давления в направлении, перпендикулярном невозмущенному потоку, следовательно, и к газодинамическим пульсациям. В случае  $\alpha_{**} < \alpha < \alpha_*$  эти пульсации, возникающие первоначально за пределами стационарной зоны волны, распространяются в релаксирующем газе вверх по стационарной зоне, догоняя и искривляя передний фронт волны. Пульсации исчезают в пересжатых волнах, интенсивность которых превышает некоторое критическое значение.

### Уравнения стационарного течения

В системе координат, связанной с фронтом волны, уравнения, описывающие стационарное течение газа за скачком уплотнения, в обычных обозначениях имеют вид

$$u/v = D/v_0 = j, \quad u^2/v + p = D^2/v_0 + p_0, \quad (1)$$

$$\gamma_f(\gamma_f - 1)^{-1} p v + E + u^2/2 + Q(1 - \omega) = \gamma_e(\gamma_e - 1)^{-1} p_0 v_0 + D^2/2 + Q, \quad (2)$$

$$dE/dt = (E_e - E)/\tau, \quad E = \nu p_0 v_0 \text{ при } t = 0. \quad (3)$$

На скачке уплотнения время  $t = 0$ ; индекс 0 отвечает состоянию перед скачком;  $D$  — скорость детонационной волны;  $E, E_e$  — удельная колебательная энергия и ее равновесное значение;  $\gamma_f, \gamma_e = [1 + (\gamma_f - 1)(\gamma + 1)]/[1 + (\gamma_f - 1)\nu]$  — замороженное (при  $E = 0$ ) и равновесное (при  $E = E_e$ ) значения показателя адиабаты газа;  $\nu$  — число колебательных степеней свободы;  $Q$  — удельная теплота химической реакции. Неотрицательная и монотонная (при  $t \geq 0$ ) функция  $\omega(t/\tau_0)$  характеризует кинетику необратимого тепловыделения и по определению удовлетворяет соотношениям

$$\omega(0) = 0, \quad \omega' = 0 \text{ при } \omega = 1. \quad (4)$$

Значение  $E_e$  зависит только от температуры. Для простоты используются классическое приближение  $E_e = \nu p v$  и постоянная величина  $\tau$ , одинаковая для всех осцилляторов.

Из (1), (2) можно получить квадратное уравнение для  $v$

$$A v^2 - B v + c = 0, \quad (5)$$

$$A = 1/2(\gamma_f + 1)(\gamma_f - 1)^{-1} j^2, \quad B = \gamma_f(\gamma_f - 1)^{-1} j^2 v_0(1 + \varepsilon),$$

$$c(t) = Q\omega - E + \gamma_e(\gamma_e - 1)^{-1} p_0 v_0 + D^2/2, \quad \varepsilon \equiv p_0 v_0/D^2.$$

Течению за скачком уплотнения отвечает следующее решение (5):

$$v = (B - \sqrt{B^2 - 4Ac})/2A. \quad (6)$$

Формулы (6), (3) определяют  $v$  как функцию только времени  $t$  (с помощью (1) как функции  $t$  могут быть выражены так же  $p, u$ ). Из (5) легко получить производную  $v$  по времени на прямой Релея

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dc/dt}{B - 2Av} = \frac{\gamma_f - 1}{\gamma_f + 1} \frac{Q d\omega/dt - dE/dt}{j^2(v_f - v)}. \quad (7)$$

На любой прямой Релея в точках  $v = v_f \equiv (1 + \varepsilon)\gamma_f(\gamma_f + 1)^{-1} v_0$  и  $v = v_e \equiv (1 + \varepsilon)\gamma_e(\gamma_e + 1)^{-1} v_0$  выполняются соответственно равенства  $u^2 = c_f^2 \equiv \gamma_f p v$  и  $u^2 = c_e^2 \equiv \gamma_e p v$ . Это видно из соотношений

$$u^2 = c_f^2 - j^2(\gamma_f + 1)(v_f - v)v = c_e^2 - j^2(\gamma_e + 1)(v_e - v)v, \quad (8)$$

вытекающих из (1). При детонации, как правило,  $\varepsilon \ll 1$  (сильные ДВ). В этом случае  $u = c_f$  и  $u = c_e$  с хорошей точностью выполняются соответственно на изохорах  $v = v_f$  и  $v = v_e$ . Далее для простоты полагаем неравенство  $\varepsilon \ll 1$  выполненным.

На первый взгляд из (7) следует, что за скачком уплотнения при любом  $\alpha$  существует единственная особая точка  $v = v_f$  (где  $u = c_f$ ) и что в случае нормальной детонации в этой точке должен обращаться в ноль числитель (аналогичный вывод делался в работах [3, 25]). С другой стороны, если сначала перейти к пределу  $\alpha \rightarrow 0$ , приняв, согласно (3),  $dE/dt = dE_e/dt$ , то

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e + 1} \frac{Q d\omega/dt}{j^2 (v_e - v)} = (\gamma_e - 1) \frac{Q d\omega/dt}{c_e^2 - u^2},$$

и особая точка находится на равновесной изохоре  $v = v_e$ . Для разъяснения этого парадокса нужно исследовать решение уравнения (7) при вариации параметров  $j$  и  $\alpha$ .

### Качественный анализ интегральных кривых в $p-v$ -плоскости

В плоскости  $p-v$  траектория движения точки, характеризующей состояние газа (далее будем называть ее изображающей точкой), есть отрезок соответствующей прямой Релея. При заданной функции тепловыделения  $\omega$  и фиксированном начальном состоянии траектория изображающей точки определяется только двумя параметрами  $j$  и  $\alpha$ . Введем на такой траектории безразмерное лагранжево время  $\xi = t/\tau_0$ . Для решения уравнения (7) в плоскости  $p-v$  удобно (7) и (3) переписать так:

$$v' = \frac{\gamma_f - 1}{\gamma_f + 1} \frac{Q\omega' - E'}{j^2 (v_f - v)} = \frac{\gamma_f - 1}{\gamma_f + 1} \frac{Q(\Psi + \alpha\omega' + \omega - 1)}{\alpha j^2 (v_f - v)}, \quad (9)$$

$$E' = \alpha^{-1} (E_e - E), \quad (10)$$

где  $\Psi(j, v) \equiv Q^{-1} j^2 [v^2 (a + v - 1/2) - vv_0 (1 + \varepsilon) (a + v) + v_0^2 (1/2 + \varepsilon a + \varepsilon v)] + 1$ ;  $a = \gamma_f (\gamma_f - 1)^{-1}$ ; штрихом обозначены производные по  $\xi$ .

На рис. 1 показаны равновесная  $F_e$  (т. е. при  $E = E_e$ ) и замороженная  $F_f$  (при  $E = 0$ ) детонационные адиабаты газа. Для сильных ДВ изохоры  $v = v_e$  и  $v = v_f$  проходят соответственно через равновесную  $J_e$  и замороженную  $J_f$  точки Жуге (в этих точках прямые Релея касаются соответственно детонационных адиабат  $F_e$  и  $F_f$ ). Функция  $\Psi$  положительна ниже и отрицательна выше равновесной адиабаты  $F_e$ ; на адиабате  $F_e$   $\Psi = 0$  (то же самое можно сказать относительно функции  $\Psi - 1$  и равновесной ударной адиабаты газа). Исходный ударно-сжатый газ при  $Q\omega' > E'$  расширяется ( $v' > 0$ , см. (9)), и изображающая точка перемещается по прямой Релея вверх вниз. (При достаточно малых  $\alpha$  в начале необратимого процесса может быть  $Q\omega' < E'$ , и стадии расширения в этом случае предшествует кратковременная стадия сжатия, соответствующая колебательной релаксации в ударной волне (УВ). Эта стадия, отвечающая формированию структуры УВ, не представляет интереса для рассматриваемой задачи.) Если в процессе такого расширения достигается изохора  $v = v_f$  при  $Q\omega' - E' > 0$ , то на ней  $v' = \infty$  (происходит так называемое заклинивание потока [8]), что указывает на невозможность существования стационарного режима. Если прежде обращается в ноль числитель (9) и тепловыделение еще не закончилось ( $\omega \neq 1$ ), то при этом расширение сменяется сжатием. Точка с максимальным значением  $v$  на такой траектории, соответствующей пересечением детонации, представляет собой особую точку возврата на действительной кривой [26]. Далее такую точку будем для краткости называть точкой возврата. При сложной (например, ступенчатой) функции тепло-

Рис. 1. Зависимость нормальных и переска-  
тых режимов детонации от  $\alpha$ .

$F_f, L_{\alpha_1}, L_{\alpha_2}, L_{\alpha_3}$  и  $J_f, J_1, J_2, J_e$  — соответствующие  
линии возврата и точки Жуге при  $\alpha = \infty, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$   
( $\alpha_1 > \alpha_* > \alpha_2 > \alpha_{**} > \alpha_3$ ).

выделения движение изображающей точки вдоль прямой Релея может быть гораздо сложнее: с рядом чередующихся расширений и сжатий газа. В этом случае для дальнейшего анализа важна лишь точка возврата с наибольшим значением  $v$ , и именно ее и назовем точкой возврата. Множество точек возврата при фиксированном  $\alpha$  и различных значениях  $j$  назовем линией возврата  $L_\alpha$  переска-тых режимов (только для них  $L_\alpha$  и определена).

При любом  $\alpha$  линии  $L_\alpha$  расположены выше равновесной адиабаты  $F_e$ . В самом деле, только в этой части плоскости  $p - v$  функция  $\Psi$  отрицательна и числитель (9) может изменить знак на прямой Релея с плюса на минус, оставаясь затем отрицательным до достижения изображающей точкой адиабаты  $F_e$ . С помощью уравнений (9), (10) можно показать, что при фиксированном  $\alpha$  меньшим значениям  $j$  отвечают точки возврата (если они существуют) с большей величиной  $v$  и что при уменьшении  $\alpha$  линии  $L_\alpha$  смещаются на плоскости  $p - v$  вниз. Первое утверждение следует из того, что на траекториях с меньшим  $j$  (при фиксированном  $\alpha$ ) каждому  $v$  соответствует большее  $v'$  (см. второе равенство (9)) и меньшее  $E_e$ , а значит, и  $E'$  (см. (10)). В результате точка возврата, где  $Q\omega' = E'$ , достигается при больших значениях  $v$ . Второе утверждение вытекает из первого и из того, что при фиксированном  $j$  меньшим  $\alpha$  соответствуют точки возврата с меньшей величиной  $v$  (так как уменьшению  $\alpha$  отвечает увеличение  $E'$  вдоль траектории движения). На прямой Релея энтропия газа без учета колебательных степеней свободы достигает максимума в точке пересечения с линией  $L_\alpha$ . Температура же газа при движении вниз по прямой Релея растет, если  $v < v_m = 1/2(1 + \epsilon)v_0$ , и падает, если  $v > v_m$ . В дальнейшем будем называть  $v = v_m$  — изохорой максимальной температуры. Для  $dp/dv$  вдоль прямой Релея всюду в соответствии с (1) выполняется равенство

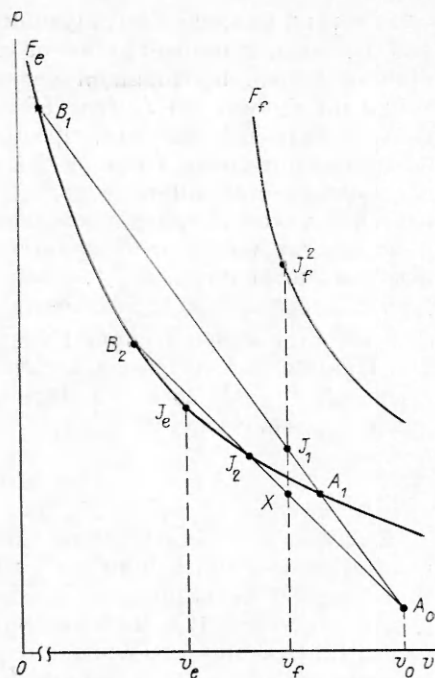
$$-v^2 dp/dv = u^2. \quad (11)$$

Нормальной детонации при фиксированном  $\alpha$  соответствует минимальный по  $j$  режим  $j_1(\alpha)$ .

Перейдем к рассмотрению результатов качественного анализа уравнения (9).

#### Зависимость нормальных и переска- тых режимов детонации от параметра $\alpha$

1. При  $\alpha \rightarrow \infty$  на стадии тепловыделения всюду (и в том числе на линии  $L_\alpha$ )  $E' = E \approx 0$ . Следовательно,  $L_\alpha$  практически совпадает с переска-той ветвью «замороженной» адиабаты  $F_f$  (см. рис. 1). При переска-тых режимах детонации (которым соответствуют прямые Релея, идущие выше точки  $J_1$ ) изображающая точка вначале опускается по прямой Релея до адиабаты  $F_f$  (за характерное время  $\tau_0$ ), а затем по ней же начинает обратное движение и при  $t/\tau \rightarrow \infty$  останавливается на переска-той ветви  $F_e$ .



В режимах, соответствующих прямым Релея, проходящим под точкой  $J_f$ , поток запирается на изохоре  $v_f$ . Нормальной детонации отвечает прямая Релея, проходящая через точку Жуге  $J_f$ ; изображающая точка, дойдя по прямой до  $J_f$  (где обращаются одновременно в ноль и числитель, и знаменатель (9)), продолжает движение вниз. При детонации в безграничной среде (или на достаточном удалении от внешних границ) дальнейшее стационарное движение, теперь уже сверхзвуковое, заканчивается в точке  $A_f$  на равновесной адиабате  $F_e$ . Этот предельный случай, по существу, ничем не отличается от немоного тепловыделения, впервые рассмотренного в [1]. Зависимость от времени  $v$  (а через него и других переменных) в области сверхзвукового стационарного течения определяется вторым корнем уравнения (5) [10]:  $v = (B + \sqrt{B^2 - 4Ac})/2A$ .

Прямая  $A_0J_f$  касается в точке  $J_f$  адиабаты  $E_f$  и совпадающей с ней (выше  $J_f$ ) линии возврата. В точке  $J_f$  имеют место (см. (8), (11)) следующие равенства:

$$-v^2 dp/dv = u^2 = c_f^2. \quad (12)$$

2. Случай конечных значений  $\alpha$ , удовлетворяющих  $\alpha > \alpha_*$ , где  $\alpha_*$  — некоторая величина порядка единицы (см. ниже). Линии возврата  $L_\alpha$  таких режимов детонации лежат ниже  $F_f$  и оканчиваются также на изохоре  $v_f$  (см. (9)). Но в отличие от рассмотренного выше случая здесь уже существенно возбуждение колебательных степеней свободы. Рассмотрим одну из таких линий  $L_{\alpha_1}$ , соответствующую некоторому фиксированному значению  $\alpha = \alpha_1 > \alpha_*$  (см. рис. 1). Все, что сказано ранее относительно движения изображающей точки по прямым Релея, соответствующим пересжатой и нормальной детонации, а также расположенным под точкой Жуге (в данном случае эта точка  $J_1$ ), справедливо и для  $\alpha = \alpha_1$ . В точке  $J_1$  также имеют место равенства (12), для выполнения которых достаточно условия  $v(J_1) = v_f$  (см. (8), (11)). Здесь  $v(J_1)$  — значение  $v$  в точке  $J_1$ . Аналогичные обозначения используются и далее. Проведем через точку  $J_1$  неравновесную детонационную адиабату  $F_{J_1}$  с фиксированными значениями  $E = E(J_1)$  и  $\omega = \omega(J_1)$ . Нетрудно видеть, что  $E(J_1) < E_e(J_1)$  и  $\omega(J_1) \leq 1$ . Это вытекает из того, что адиабата  $F_{J_1}$  расположена выше  $F_e$ , где  $Q\omega(J_1) - E(J_1) > Q - E_e(J_1)$ . Из выполнения в точке  $J_1$  равенств (12) следует, что прямая Релея  $A_0J_1$  касается  $F_{J_1}$ . Можно показать, что на линии возврата  $L_{\alpha_1}$  значение  $Q\omega - E$  не превышает величины  $Q\omega(J_1) - E(J_1)$ , поскольку с увеличением  $j$  на всей траектории возрастают  $E_e$  и  $E'$  (см. (9), (10)). Таким образом, в окрестности точки  $J_1$  линия  $L_{\alpha_1}$  заключена между адиабатой  $F_{J_1}$  и прямой Релея, проходящей через  $J_1$ . Следовательно, все три рассматриваемые линии ( $F_{J_1}$ ,  $L_{\alpha_1}$  и  $A_0J_1$ ) имеют общую точку касания  $J_1$ . Энтропия системы без учета колебательных степеней свободы имеет в точке Жуге  $J_1$  максимум на прямой  $A_0J_1$ . Граница стационарной зоны нормальной детонации определяется точкой  $A_1$ .

По мере уменьшения  $\alpha$  соответствующие линии  $L_\alpha$  опускаются все ниже. Падает и скорость нормальной детонации. При некотором достаточно малом значении  $\alpha \equiv \alpha_*$  линия  $L_{\alpha_*}$  оканчивается в точке  $J_*$  пересечения равновесной адиабаты  $F_e$  и изохоры  $v_f$  (см. рис. 1). Линия  $L_{\alpha_*}$  и точка  $J_*$  соответствуют наименьшему значению параметра  $\alpha$ , для которого в нормальном режиме детонации скорость газа достигает в точке Жуге величины  $c_f$ . При этом изображающая точка опускается по прямой Релея до точки  $J_*$  (это и есть в данном случае точка Жуге), где и оканчивается стационарная область течения.

3. Значениям  $\alpha < \alpha_*$  отвечают линии  $L_\alpha$ , лежащие ниже  $L_{\alpha_*}$ . На рис. 1 для некоторого  $\alpha_2 < \alpha_*$  изображена линия возврата  $L_{\alpha_2}$ , оканчивающаяся на адиабате  $F_e$  в точке  $J_2$ . Как уже говорилось,  $L_{\alpha_2}$  не может

продолжаться за  $F_e$ . В точке  $J_2$  обращаются в ноль одновременно  $v'$  и  $\Psi$ , и, следовательно (см. (9)),

$$\alpha\omega' + \omega - 1 = 0. \quad (13)$$

Используя (13), нетрудно доказать, что в точке  $J_2$  тепловыделение закончено, т. е.  $\omega = 1$ . Последнее равенство следует уже из того, что монотонная функция  $\omega$  произвольного вида (ограниченная лишь условиями (4)) может удовлетворить соотношению (13) для бесконечного множества значений  $\alpha$ , соответствующего бесконечному множеству точек типа  $J_2$  (расположенных на  $F_e$ ), только при  $\omega = 1$ , где по определению  $\omega' = 0$ .

Особенно наглядно проиллюстрировать сказанное можно на примере экспоненциальной функции тепловыделения  $\omega = 1 - \exp(-\xi)$ , для которой  $\omega' = 1 - \omega$  и соотношение (13) имеет место в единственной точке  $\omega = 1$  при любом  $\alpha$  (за исключением вырожденного случая  $\alpha = 1$ , см. ниже). Для произвольной функции  $\omega$  доказательство равенства  $\omega$  единице в точке  $J_2$  легко проводится графически, если рассматривать (13) как пересечение однозначных (в силу монотонной по определению зависимости  $\omega(\xi)$ ) функций  $\omega'(\omega)$  и  $\varphi(\omega) = (1 - \omega)/\alpha$  на отрезке  $0 \leq \omega \leq 1$ .

Если в точке  $J_2$   $\omega = 1$ , то система термодинамически равновесна ( $E = E_e$ ), поскольку эта точка лежит на  $F_e$ , где  $Q\omega - E = Q - E_e$ . Точка  $J_2$  одновременно служит и границей области стационарного течения и соответствует минимальной скорости детонации при  $\alpha = \alpha_2$ . В этом смысле  $J_2$  — точка Жуге. Из (8) видно, что в точке  $J_2$  выполняются неравенства

$$c_e^2 < -v^2 dp/dv = u^2 < c_f^2. \quad (14)$$

При движении по прямым Релея, расположенным ниже  $J_2$  (т. е. при  $j < j_J(\alpha_2)$ ), изображающая точка пересекает равновесную адиабату и перемещается вниз до изохоры  $v_f$ , где поток запирается. Это можно показать с помощью уравнений (9), (10), если учесть, что функция  $\Psi$  положительна ниже адиабаты  $F_e$  и что при  $j < j_J(\alpha_2)$  (с фиксированным  $\alpha$ ) расширение до объема  $v(J_2)$  происходит быстрее, чем при  $j = j_J(\alpha_2)$ .

Обозначим через  $\alpha_{**}$  значение  $\alpha$ , при котором линия  $L_{\alpha_{**}}$  оканчивается в равновесной точке Жуге  $J_e$ .

4. Если  $\alpha < \alpha_{**}$ , то линия возврата существует лишь при достаточно медленном тепловыделении на заключительной стадии колебательной релаксации.

На рис. 1 в качестве примера изображена одна из линий возврата  $L_{\alpha_3}$ , соответствующая некоторому  $\alpha_3 < \alpha_{**}$ , для случая тепловыделения с постоянной скоростью ( $\omega' = 1$  при  $\xi < 1$ ,  $\omega' = 0$  при  $\xi = 1$ ). Точка окончания линии возврата  $K$  заключена между  $J_e$  и точкой  $M$  пересечения изохоры  $v_m$  и адиабаты  $F_e$ . Чем меньше  $\alpha$ , тем ближе линия возврата к равновесной адиабате  $F_e$  и точка  $K$  — к точке  $M$ . Линия  $L_\alpha$  сливается с  $F_e$ , а точка  $K$  достигает  $M$  лишь в пределе  $\alpha = 0$ .

Для экспоненциального тепловыделения линии возврата имеют вид, аналогичный  $L_{\alpha_3}$  при  $1 < \alpha < \alpha_{**}$ . С уменьшением  $\alpha$  точка  $K$  перемещается к  $M$ , достигая ее при  $\alpha = 1$ . Линия возврата при этом полностью сливается с  $F_e$  и перестает существовать при  $\alpha < 1$ .

Для всех  $\alpha$ , удовлетворяющих условию  $\alpha < \alpha_{**}$ , минимальная скорость детонации соответствует прохождению прямой Релея через равновесную точку Жуге  $J_e$ , в которой  $-v^2 dp/dv = u^2 = c_e^2$ .

Конечные состояния при  $j > j_{J_e}$  лежат на пересжатой ветви  $F_e$ , как и для классической детонации. Если  $j < j_{J_e}$ , изображающая точка движется до изохоры  $v_f$ , где поток запирается. Можно, однако, доказать, что при таком движении на изохоре  $v = v_e$  производные по  $\xi$  от всех величин стремятся к бесконечности при  $\alpha \rightarrow 0$ . Иными словами, точка

запираания потока в пределе  $\alpha \rightarrow 0$  перемещается с изохоры  $v_j$  на изохору  $v_e$ .

Интересно отметить характер изменения  $E$  и  $E_e$  вдоль прямых Релея, соответствующих нормальным режимам детонации. Как уже говорилось, в процессе расширения температура идеального газа, а следовательно, и  $E_e$  увеличиваются при  $v < v_m$  и уменьшаются при  $v > v_m$  (см. определение  $v_m$ ). В случае  $\alpha > \alpha_*$  в области стационарного течения везде, и в том числе в точке Жуге,  $E < E_e$ . Равновесное состояние ( $E = E_e$ ) достигается в сверхзвуковом по отношению к  $c_j$  течении, в точках типа  $A$ , в результате встречного движения  $E$  и  $E_e$  — вследствие увеличения  $E$  и уменьшения после  $v = v_m$  величины  $E_e$ . При  $\alpha_* > \alpha > \alpha_{**}$  по-прежнему в области стационарного течения  $E < E_e$ , однако равновесие осуществляется в точке Жуге (типа  $J_2$ ).

При  $\alpha < \alpha_{**}$  текущее значение энергии  $E$  следует с очень малым запаздыванием («следит») за равновесной величиной  $E_e$ . Поэтому во время расширения газа после пересечения изохоры  $v = v_m$ , когда  $E_e$  начинает уменьшаться, вслед за ней уменьшается и  $E$ . Согласно (3), в этом случае в правой окрестности изохоры  $v = v_m$  происходит инверсия колебательной энергии: разность  $E_e - E$  меняет знак, и при дальнейшем расширении  $E \geq E_e$ . Поэтому при любом  $\alpha < \alpha_{**}$  на прямой Релея, проходящей через  $J_e$ ,  $Q\omega' - E' \geq 0$  и изображающая точка движется монотонно ( $v' \geq 0$ ). Отсутствие линий возврата (т. е. монотонность движения изображающей точки) на участке  $v(K) < v < v_e$  в пересжатых режимах детонации ( $j > j_{J_e}$ ) при  $\alpha < \alpha_{**}$  также объясняется инверсией  $E$  (здесь  $v(K)$  — значение  $v$  в точке  $K$ , см. рис. 1).

Из проведенного анализа видно, что граница стационарной зоны нормальной детонации по мере уменьшения  $\alpha$  от  $\infty$  до 0 монотонно перемещается в плоскости  $p-v$  по равновесной адиабате  $F_e$  от  $A_j$  к точке  $J_e$ .

Численные значения  $\alpha_*$  и  $\alpha_{**}$  определяются конкретным видом функции тепловыделения  $\omega$  и параметрами газа. Например, при тепловыделении с постоянной скоростью  $v_0 = 862$  см<sup>3</sup>/г,  $p_0 = 1$  атм,  $\gamma_j = 7/5$ ,  $\nu = 1$  (т. е.  $\gamma_e = 9/7$ ),  $Q = 1000$  кал/г имеем  $\alpha_* = 0,408$  и  $\alpha_{**} = 0,0742$ . В случае экспоненциального тепловыделения при указанных выше параметрах газа  $\alpha_* = 1,41$  и  $\alpha_{**} = 1,28$ . Скорости нормальной детонации, соответствующие  $\alpha_*$  и  $\alpha_{**}$  (определяемые лишь параметрами газа), в обоих случаях тепловыделения равны соответственно 2387,74 и 2384,95 м/с.

### Сопряжение детонационной волны с волной разрежения

Кратко обсудим вопрос о сопряжении стационарной зоны ДВ с волной разрежения. Согласно классической теории детонации, слабые возмущения из нестационарной области не проникают в стационарную зону, потому что скорость газа на границе стационарной зоны в точке Жуге равна скорости звука. В релаксирующем газе это условие неоднозначно вследствие дисперсии скорости звука. Максимальная скорость звука  $c_j$  соответствует пределу высоких частот. Высокочастотные возмущения не проникают вверх по течению газа за точку Жуге, вообще говоря, только при  $\alpha > \alpha_{**}$ . В случае более быстрой релаксации ( $\alpha < \alpha_*$ ), согласно неравенству (14), высокочастотные возмущения могут проникать за точку Жуге, приводя к своеобразным энтропийным потерям. В важном случае детонации в безграничной среде (или при диаметре заряда, значительно превышающем критический) эти потери могут быть существенны лишь в начальной стадии движения детонационной волны. Положение точки Жуге на такой стадии нестационарно и определяется интенсивностью тепловыделения и указанных потерь. Вдали от плоскости инициирования нестационарное сверхзвуковое течение «выползает»

вается» и становится изоэнтропическим (центрированная волна разрежения, в которой градиенты давления и других величин уменьшаются со временем пропорционально  $t^{-1}$ ). При этом спектр возмущений сдвигается в область низких частот и нестационарное течение перестает влиять на структуру стационарного детонационного комплекса в полном соответствии с классической теорией.

### Скорость нормальной детонации и параметры в точке Жуге для других систем с релаксацией

Рассмотренные на примере колебательной релаксации закономерности детонационных режимов в качественном отношении присущи и системам с химической релаксацией, например с диссоциацией инертных компонентов или с ионизацией (в очень сильных детонационных волнах). Для практических целей, как правило, нужны точные расчеты скорости нормальной детонации и параметров в точке Жуге. Для расчета термодинамических параметров в равновесной точке Жуге  $J_e$  (точке касания прямой Релея равновесной детонационной адиабаты) и соответствующей ей скорости детонации достаточно знать лишь константы равновесия конечных продуктов детонации. Существует ряд программ численного расчета параметров в точке  $J_e$  для различных комбинаций газовых смесей [14—17]. Однако, как видно из проведенного исследования, только в случае достаточно быстрой релаксации по отношению к скорости тепловыделения режим нормальной детонации соответствует равновесной точке Жуге  $J_e$ .

В реальных детонирующих средах за скачком уплотнения, как правило, протекает несколько релаксационных процессов: вращательная и колебательная релаксация, диссоциация и ионизация, теплопроводность (в гетерогенных системах) и другие. Если скорость  $i$ -го релаксационного процесса много больше скорости тепловыделения ( $\tau_i \ll \tau_q$ , обычно это условие выполняется для вращательной релаксации), то соответствующие степени свободы при определении точки Жуге и скорости детонации можно считать заселенными равновесно. Степени же свободы, для которых  $\tau_i \gg \tau_q$ , при движении газа от скачка уплотнения до точки Жуге заморожены. Эти соображения в ряде случаев могут существенно облегчить точный расчет детонационных параметров.

Наибольшие трудности при расчете нормальной скорости детонации и параметров в точке Жуге представляют релаксационные процессы, для которых величины  $\tau$  и  $\tau_q$  одного порядка. Оценка влияния таких процессов на параметры детонации может быть сделана в результате расчета (с помощью, например, уже имеющихся программ) точек типа  $J_f$  и  $J_e$ , отвечающих касанию прямых Релея «замороженной» и равновесной (по энергии рассматриваемых релаксационных процессов) детонационных адиабат газа. (Подобными расчетами в [14] показано весьма существенное влияние диссоциации на детонационные параметры.) Такая оценка позволяет установить границы неопределенности параметров нормальной детонации. Нетрудно показать, что при этом наибольшая неопределенность будет соответствовать газодинамическим параметрам в точке Жуге и относительно меньшая — скорости детонации. Если полученная неопределенность в детонационных параметрах допустима в практических приложениях, то на этом расчеты могут быть и остановлены. В противном случае точку Жуге и скорость детонации можно найти с любой степенью точности расчетом соответствующей данному релаксационному процессу линии возврата. Эта процедура более трудоемкая, требующая знания кинетических констант релаксационного процесса и реакций, определяющих тепловыделение при детонации. Результаты данной работы могут быть использованы для проведения и качественного анализа таких расчетов.

## Релаксационный механизм неустойчивости детонационного фронта

Известная причина неустойчивости плоского фронта детонационной волны — сильная зависимость скорости тепловыделения от температуры [27—30] (условимся называть соответствующую неустойчивость тепловой). Далее рассматривается другая причина неустойчивости плоской ДВ. Из приведенного выше анализа следует, что в случае  $\alpha > \alpha_{**}$  существует бесконечно сильная зависимость состояния (давления, плотности, температуры) в конце стационарной зоны волны от интенсивности волны: бесконечно малое изменение интенсивности приводит к конечному изменению давления, плотности, температуры на границе стационарной зоны. При этом происходит и конечное изменение протяженности стационарной зоны. Такая зависимость обусловлена релаксационными процессами. Поэтому неустойчивость плоского детонационного фронта, к которой, согласно теоретическим оценкам, должны приводить указанные процессы, будем далее называть релаксационной.

Бесконечно малое изменение интенсивности УВ  $\delta r$  относительно УВ самоподдерживающейся детонации приводит к конечному перемещению границы стационарной зоны на плоскости  $p-v$  вверх или вниз в зависимости от знака  $\delta r$ . Если  $\alpha_{**} < \alpha < \alpha_*$ , то при  $\delta r > 0$  граница стационарной зоны перемещается от точки Жуге типа  $J_2$  (рис. 2) вверх в точку  $B_2$  первого пересечения прямой Релея с равновесной детонационной адиабатой  $F_e$ ; при  $\delta r < 0$  движение по прямой Релея возможно (если отвлечься от условия сопряжения стационарной зоны с волной разрежения) до пересечения с изохорой  $v = v_i$ . При  $\alpha > \alpha_*$  и  $\delta r > 0$  граница перемещается по прямой Релея от нижней до верхней точки пересечения с равновесной детонационной адиабатой. Такие перемещения границы в координатах  $p-v$  сопровождаются конечным изменением давления и плотности за ней. Реально это может происходить внутри некоторой достаточно широкой трубки тока, окруженной невозмущенным течением. (Трубка тока должна быть широкой для того, чтобы за время перемещения границы не произошло существенной боковой разгрузки.) При этом возникнут конечные перепады давления в направлении, поперечном основному потоку, а следовательно, и газодинамические пульсации.

Порядок амплитуды пульсаций давления определяется перепадом давления  $\Delta p$  на прямой Релея, отвечающей нормальной детонации, между точками ее верхнего пересечения с равновесной детонационной адиабатой ( $v = v(B_2)$ ) и с изохорой  $v = v_i$  в случае  $\alpha_{**} < \alpha < \alpha_*$ , или между верхней ( $v = v(B_1)$ ) и нижней ( $v = v(A_1)$ ) точками пересечения прямой Релея с равновесной детонационной адиабатой при  $\alpha > \alpha_*$  (см. рис. 2):

$$\Delta p = j_J^2 \Delta v = [p(J) - p_0] \Delta v / [v_0 - v(J)],$$

$$\Delta v = \begin{cases} v_i - v(B_2), & \alpha_{**} < \alpha < \alpha_*, \\ v(A_1) - v(B_1), & \alpha > \alpha_*. \end{cases} \quad (15)$$

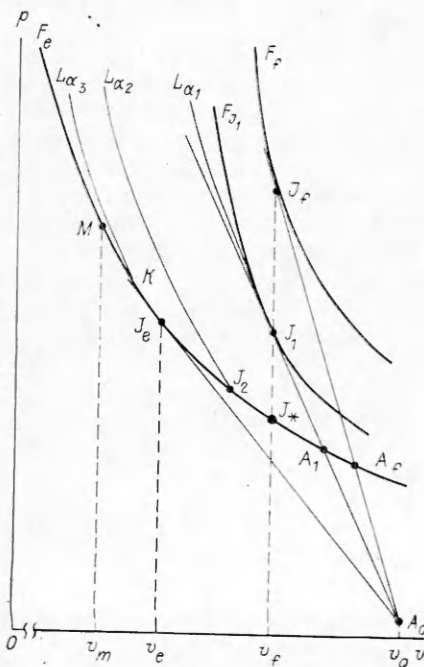


Рис. 2. Амплитуда  $\Delta p$  релаксационных пульсаций давления:  $\Delta p = p(B_1) - p(A_1)$  при  $\alpha > \alpha_*$  и  $\Delta p = p(B_2) - p(X)$  при  $\alpha_{**} < \alpha < \alpha_*$ .

Здесь  $p(J)$  и  $v(J)$  — давление и удельный объем в соответствующих точках Жуге. Значение удельного объема  $v(J)$  ограничено условиями

$$v_e \leq v(J) \leq v_f \quad (16)$$

и перемещается от верхней границы (16) к нижней при уменьшении параметра  $\alpha$ .

Оценивая  $\Delta p$  лишь по порядку величины, можно положить

$$\Delta v \approx v_f - v_e, \quad v_0 - v(J) \approx v_0 - v_e. \quad (17)$$

Для сильных ДВ в идеальном газе с релаксирующей энергией колебаний

$$v_f - v_e = \frac{\gamma_f - \gamma_e}{(\gamma_f + 1)(\gamma_e + 1)} v_0, \quad v_0 - v_e = \frac{1}{\gamma_e + 1} v_0. \quad (18)$$

Подстановка (17) и (18) в (15) дает

$$\Delta p/p(J) \approx (\gamma_f - \gamma_e)/(\gamma_f + 1). \quad (19)$$

Для двухатомного однокомпонентного газа  $\Delta p/p(J) \approx 0,05$ . Для многоатомных газов оно может быть в 2—3 раза больше. Амплитуда пульсаций уменьшается при снижении концентрации релаксирующей компоненты в детонирующей смеси газов.

Время рассматриваемых смещений границы стационарного течения по порядку величины равно времени релаксации  $\tau$ . (Строго говоря, такая оценка справедлива при не слишком малых возмущениях. Можно показать, что в пределе  $\delta p/p(J) \rightarrow 0$  время смещений возрастает пропорционально  $\ln(p(J)/|\delta p|)$ .) Минимальный радиус  $r$  трубки тока, при котором за это время еще не успеет выравняться давление в направлении, поперечном потоку, определяется соотношением

$$r = c\tau = c\alpha\tau_0 \sim \alpha d,$$

где  $c$  — скорость звука в точке Жуге ( $c \sim u$ );  $d$  — характерная ширина ДВ. Величина  $r$  и есть характерный масштаб поперечных пульсаций (по крайней мере в начале их развития) для рассматриваемого механизма неустойчивости, так как вероятность первоначального возмущения очень сильно убывает с ростом  $r$ . С повышением  $\alpha$  увеличивается и характерный поперечный масштаб пульсаций по отношению к ширине детонационной волны.

Рассматриваемые конечные неоднородности и пульсации возникают за точкой Жуге невозмущенного течения. Характерные частоты пульсаций имеют порядок  $\tau^{-1}$ . В частотном спектре таких пульсаций с большим весом представлены возмущения, распространяющиеся с «замороженной» скоростью звука  $c_f$ . Они могут распространяться вверх по потоку, достигая ударный фронт и сильно искривляя его, если скорость газа в точке Жуге меньше  $c_f$  (вследствие сравнительно больших градиентов и амплитуд давления в пульсациях скорость их распространения может быть и несколько больше звуковой). Такое условие для скорости в точке Жуге выполняется в конечном диапазоне значений параметра  $\alpha_{**} < \alpha < \alpha_*$ , там, где по порядку величины он равен единице<sup>1</sup>. В случае  $\alpha > \alpha_*$ , когда в точке Жуге  $u = c_f$ , пульсации происходят только за точкой Жуге, не проникая вверх по потоку и не влияя на скачок уплотнения. При этом релаксационными пульсациями охвачена только часть стационарной области течения от точки Жуге типа  $J_1$  до точки типа  $A_1$  на равновесной адиабате  $F_e$  (см. рис. 2). Такая пульсирующая зона стационарна лишь в среднем по времени. С уменьшением  $\alpha$  зона пульсаций расширяется и при  $\alpha_{**} < \alpha < \alpha_*$  охватывает всю стационарную область от скачка уплотнения до точки Жуге (типа  $J_2$ ). Релаксационная неустойчивость исчезает при достаточно большом пересжатии ДВ. Случайно возникшее возмущение  $\Delta p$ , характеризваемое амплитудой (19), не переведет пересжатую детонацион-

<sup>1</sup> Этот диапазон  $\alpha$  тем шире, чем больше теплоемкость релаксирующих степеней свободы.

ную волну в «режим»  $j < j_J$  (см. рис. 2), если давление пересжатой волны в точке  $v = v(J)$  удовлетворяет соотношению

$$p - p(J) > a \cdot \Delta p, \quad a \approx 1.$$

Отсюда и из (19) получаем для граничной степени пересжатия, разделяющей релаксационно устойчивые и неустойчивые волны,

$$\frac{j^2 - j_J^2}{j_J^2} \approx \frac{\gamma_f - \gamma_e}{\gamma_f + 1}, \quad \frac{D - D_J}{D_J} \sim \frac{\gamma_f - \gamma_e}{2(\gamma_f + 1)}.$$

### Заключение

Хорошо известно, что одномерная структура ДВ на практике встречается относительно редко. Как правило, детонационные волны имеют трехмерную пульсирующую структуру (тройные конфигурации [10, 24]). Рассмотренная здесь одномерная модель детонации безусловно не может и не претендует на описание характера и структуры трехмерных пульсаций, вызванных тепловой или релаксационной неустойчивостью фронта волны. В случае пульсирующей детонации предложенная модель, как и классическая теория (предел малых  $\alpha$ ), относится к осредненным по времени газодинамическим величинам и к правилу отбора скорости детонации. Кроме того, одномерная модель может быть использована (см. раздел, посвященный релаксационной неустойчивости) в качестве исходной для анализа устойчивости ДВ.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович, С. Б. Ратнер. ЖЭТФ, 1941, 11, 1, 170.
2. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1942, 12, 9, 389.
3. J. G. Kirkwood, W. W. Wood. J. Chem. Phys., 1954, 22, 11, 1915.
4. W. W. Wood, J. G. Kirkwood. J. Chem. Phys., 1956, 25, 6, 1276.
5. W. W. Wood, J. G. Kirkwood. J. Chem. Phys., 1958, 29, 4, 957.
6. W. W. Wood, Z. W. Salsburg. Phys. Fluids, 1960, 3, 4, 549.
7. Ф. А. Вильямс. Теория горения. М.: Наука, 1971.
8. Ф. Бартльме. Газодинамика горения. М.: Энергоиздат, 1981.
9. J. J. Erpenbeck. Phys. Fluids, 1961, 4, 4, 481.
10. Б. В. Войцеховский, В. В. Митрофанов, М. Е. Топчий. Структура фронта детонации в газах. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1963.
11. J. A. Fay. Phys. Fluids, 1959, 2, 3, 283.
12. W. W. Wood, F. R. Parker. Phys. Fluids, 1958, 1, 3, 230.
13. В. Н. Архипов. ПМТФ, 1962, 4, 40.
14. C. L. Eisen, R. A. Gross, T. J. Rivlin. Comb. Flame, 1960, 4, 2, 137.
15. С. Эйзен, Р. Гросс, Т. Ривлин. Вопросы ракетной техники, 1961, 1, 20.
16. Ю. А. Николаев, М. Е. Топчий. ФГВ, 1977, 13, 3, 393.
17. F. J. Zeleznik, S. Gordon. ARS J., 1962, 32, 606.
18. G. B. Kistiakowsky, P. H. Kydd. J. Chem. Phys., 1954, 22, 1940; 1955, 23, 271; 1956, 25, 824.
19. R. E. Duff, H. T. Knight, J. Rink. J. Chem. Phys., 1956, 25, 1301.
20. R. E. Duff, H. T. Knight, J. Rink. Phys. Fluids, 1958, 1, 393.
21. R. A. Gross, A. K. Oppenheim. ARS J., 1959, 29, 173.
22. H. M. Peek, R. G. Thrapp. J. Chem. Phys., 1957, 26, 740.
23. B. Levitt, D. F. Hornig. J. Chem. Phys., 1962, 36, 219.
24. Е. С. Петинков. Физика горения газов. М.: Наука, 1965.
25. S. R. Brinkley, J. M. Richardson. 4-th Symp. (Intern.) on Combustion, 1953.
26. Математическая энциклопедия. Т. 4. М.: СЭ, 1984.
27. К. И. Щелкин. ЖЭТФ, 1959, 36, 600.
28. К. И. Щелкин. Докл. АН СССР, 1965, 160, 1144.
29. Р. М. Зайдель, Я. Б. Зельдович. ПМТФ, 1963, 6, 59.
30. J. J. Erpenbeck. 9-th Symp. (Intern.) on Combustion, 1963.

Поступила в редакцию 2/VIII 1984,  
после доработки — 22/VII 1985