УДК 519.6

Реализация критерия адаптации в технологии построения сеток для конструкций, ограниченных поверхностями вращения с параллельными осями вращения*

О.В. Ушакова[1,2]

[1]Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620108

[2]Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002

E-mail: uov@imm.uran.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 1, Vol. 16, 2023.

Ушакова О.В. Реализация критерия адаптации в технологии построения сеток для конструкций, ограниченных поверхностями вращения с параллельными осями вращения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 1. — С. 93–100.

Описывается реализация критерия адаптации в технологии построения трехмерных структурированных сеток, предназначенной для численного решения дифференциальных уравнений, моделирующих вихревые процессы многокомпонентной гидродинамики. Ранее в технологии построения сеток критерий был реализован в объемах вращения и в объемах вращения, деформированных другими объемами вращения. Критерий адаптации реализован в рамках вариационного подхода построения оптимальных сеток, удовлетворяющих критериям оптимальности: близости сетки к равномерной, ортогональной и адаптации под заданную функцию. При реализации критерия технология дополнена новым способом расчета граничных узлов и алгоритмом построения допустимого множества для минимизации функционала, формализующего критерии оптимальности. Приводятся примеры расчетов сеток, адаптирующихся под заданную функцию и ее первые производные.

DOI: 10.15372/SJNM20230107

Ключевые слова: *критерий адаптации, технология построения сеток, объемы, ограниченные поверхностями вращения с параллельными осями вращения.*

Ushakova O.V. Realization of the adaptation criterion in the grid generation technology for constructions bounded by the surfaces of revolution with parallel axes of revolution // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 1. — P. 93–100.

A realization of an adaptation criterion in the technology of generation of three-dimensional structured grids designed for the numerical solution of differential equations modeling the vortex processes of multicomponent hydrodynamics is described. Earlier the adaptation criterion was realized for volumes of revolution and volumes of revolution deformed by other volumes of revolution. The adaptation criterion is realized within a variational approach for the construction of optimal grids satisfying optimality criteria: closeness of the grid to a uniform and orthogonal one and adaptation to a given function. In the realization of the criterion, the technology is supplemented by a new way of boundary nodes computation and an algorithm for the construction of an admissible set for minimization of a discrete functional formalizing the optimality criteria. Examples of grids adapted to a given function and its first derivatives are given.

*Работа была представлена на международной конференции "Марчуковские научные чтения – 2022".

Keywords: *adaptation criterion, technology of grid generation, volumes bounded by surfaces of revolution with parallel axes of revolution.*

Введение

Технология построения трехмерных структурированных сеток в областях, ограниченных поверхностями вращения, начала свое развитие давно в работах [1, 2] и кратко представлена в цикле исследований [3]. Она предназначена для численного моделирования вихревых процессов многокомпонентной гидродинамики [4] и развивается в соответствии с его требованиями. Первоначально были созданы алгоритмы построения сеток для объемов вращения [5, 6], ставших базовыми конструкциями для всех последующих разработок. Затем были разработаны алгоритмы (без учета критерия адаптации) для объемов, ограниченных поверхностями вращения с параллельными осями вращения [3, 7] (обобщений объемов вращения), и деформированных объемов вращения [3, 8, 9]. Критерий адаптации был реализован в работах [8, 9, 10] сначала для объемов вращения, затем для деформированных объемов вращения. В настоящей работе этот критерий реализован для обобщений объемов вращения. Реализация осуществлена для функции, заданной в конструкции, а также для ее первых производных.

1. Требования моделирования процессов многокомпонентной гидродинамики к сеткам

Динамика многокомпонентных сред — важная область прикладных исследований во многих научных областях, таких как физика высоких плотностей и энергий (термоядерный синтез, взрывные процессы), астрофизика (зарождение и эволюция звезд, сверхновые звезды), физика атмосферы и гидросферы Земли. Рассматриваемые физические задачи характеризуются гидродинамической неустойчивостью, возникновением вихревых и потоковых течений, а также сильными деформациями границ областей (см. [4]). Математическое моделирование гидродинамических течений в таких средах представляет собой сложную проблему. Разностные методы с использованием структурированных сеток просты в реализации для таких задач и позволяют описывать как границы, так и детали течения. Многие процессы в таких задачах происходят в объемах вращения и обобщениях объемов вращения. Создание и разработка технологий построения трехмерных сеток в том числе и адаптивных важны и актуальны.

Общий подход, используемый для построения структурированных сеток, — это метод отображений: построение сеток в области G геометрически сложной формы, называемой физической областью, осуществляется с помощью невырожденного отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$ области P более простой формы, называемой параметрической областью. В работе P — это прямоугольный параллелепипед $P = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : 0 \le \xi_1 \le N-1,\ 0 \le \xi_2 \le M-1,\ 0 \le \xi_3 \le L-1\}$, где N, M, L — целые, задающие число узлов сетки по каждому из координатных направлений. Значения отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \{x(\xi_1, \xi_2, \xi_3), y(\xi_1, \xi_2, \xi_3), z(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\}$ находятся в узлах равномерной и ортогональной сетки $\boldsymbol{\xi}_{ijk} = (i, j, k)$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, $j = 0, 1, \ldots, M-1$, $k = 0, 1, \ldots, L-1$ в P и определяют координаты узлов трехмерной сетки $\mathbf{x}_{ijk} = \mathbf{x}(i, j, k)$ в G. В остальных точках отображение восполняется с помощью трилинейных отображений (см., например, [1, 11]) кубических ячеек равномерной сетки в P. Физическая область G представляется в виде криволинейного шестигранника. Способ представления физической области в виде криволинейного шестигранника определяет конфигурацию области.

Рассматриваемые в работе области задаются с помощью элементов плоской образующей — отрезков прямых и дуг окружностей. Каждый элемент вращается вокруг своей оси на 180°, образуя поверхность вращения. Оси параллельны друг другу. Поверхности вращения элементов образуют грань области (см. подробное описание в [7]).

Отличительной особенностью конфигураций областей, требуемых для [4], включая рассматриваемые, является то, что две грани криволинейного шестигранника образованы наборами поверхностей вращения в том числе и с параллельными осями вращения, а остальные либо лежат в одной плоскости (как в данной работе, см. далее примеры в разделе 3), либо тоже являются поверхностями вращения (примеры см. в [3, 8, 9]). Требуемые для [4] конфигурации рассматриваемых областей должны обеспечивать построение невырожденных внутри области ячеек [1, 11], а вдоль ребер стыковки плоских граней шестигранные ячейки будут вырождаться в призмы с треугольным основанием. Построенная для рассматриваемых конфигураций сетка должна моделировать физический процесс с нужной степенью точности и эффективно. Эти требования обычно (см. [12, 13]) обеспечиваются удовлетворением сетки критериям оптимальности (близости криволинейной сетки к равномерной, ортогональной и адаптации под заданную функцию), а сама сетка называется оптимальной.

2. Реализация критерия адаптации при построении оптимальной сетки

Построение оптимальной сетки осуществляется (см. [10, 12, 13]) минимизаций дискретного функционала $D = D_{\mathrm{P}} + A_{\mathrm{O}}D_{\mathrm{O}} + A_{\mathrm{A}}D_{\mathrm{A}}$, представляющего собой сумму мер уклонения сетки от равномерной D_{P}, ортогональной D_{O} и меры адаптации D_{A} под заданную функцию $\Phi = \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x, y, z)$ (меры сгущения узлов там, где функция Φ быстро меняется):

$$D_{\mathrm{P}} = \sum_{ijk} \Bigg\{ [r_{i+1,j,k} - r_{i-1,j,k}]^2 \left(\frac{1}{r^2_{i+1,j,k}} + \frac{1}{r^2_{i-1,j,k}} \right) + [r_{i,j+1,k} - r_{i,j-1,k}]^2 \left(\frac{1}{r^2_{i,j+1,k}} + \frac{1}{r^2_{i,j-1,k}} \right) + [r_{i,j,k+1} - r_{i,j,k-1}]^2 \left(\frac{1}{r^2_{i,j,k+1}} + \frac{1}{r^2_{i,j,k-1}} \right) \Bigg\},$$

$$D_{\mathrm{O}} = \sum_{ijk} \sum_{p=1}^{4} \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi^p_{ij}} + \frac{1}{\sin^2 \varphi^p_{ik}} + \frac{1}{\sin^2 \varphi^p_{jk}} \right),$$

$$D_{\mathrm{A}} = \sum_{ijk} \Big\{ r^2_{i+1,j,k} \left[\Phi(\mathbf{x}_{i+1,j,k}) - \Phi(\mathbf{x}_{ijk})\right]^2 + r^2_{i,j+1,k} \left[\Phi(\mathbf{x}_{i,j+1,k}) - \Phi(\mathbf{x}_{ijk})\right]^2 + r^2_{i,j,k+1} \left[\Phi(\mathbf{x}_{i,j,k+1}) - \Phi(\mathbf{x}_{ijk})\right]^2 \Big\}.$$

Здесь величина $\Phi(\mathbf{x}_{ijk})$ — значение в узле $\mathbf{x}_{ijk} = H_{ijk}$ заданной функции $\Phi(x, y, z)$, под которую осуществляется адаптация (такая функция обычно называется мониторной), $r_{i\pm1,j,k} = |\overrightarrow{H_{ijk}H_{i\pm1,j,k}}| = |\mathbf{h_{i\pm1}}|$, φ^l_{ij} — углы между векторами $\mathbf{h_{i\pm1}}$, $\mathbf{h_{j\pm1}}$ $(l = 1, 2, 3, 4)$ (см. рисунок 1 а), где $r_{i,j\pm1,k}$, $r_{i,j,k\pm1}$; $\mathbf{h_{j\pm1}}$, $\mathbf{h_{k\pm1}}$, φ^l_{ik}, φ^l_{jk} определяются аналогично.

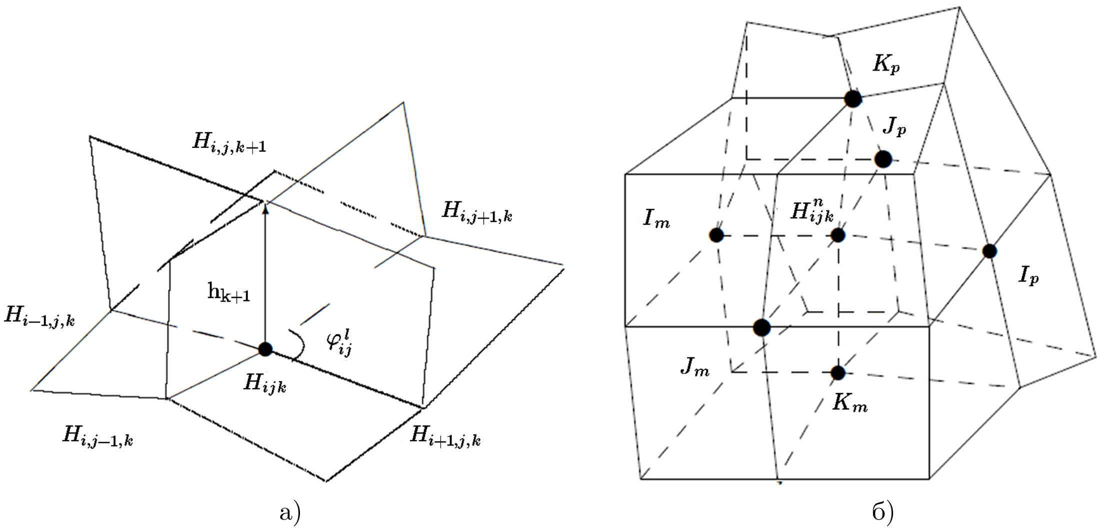

Рис. 1. Элементы трехмерной сетки: а — узлы, расстояния между узлами, углы между координатными линиями; б — шаблон узлов для минимизации функционала D.

Суммирование производится по всем внутренним узлам сетки.

Функционалы D_{P}, D_{O}, D_{A} формализуют соответственно критерии близости сетки к равномерной, ортогональной и критерий адаптации к заданной функции $\Phi(x, y, z)$. Отметим, что функционал адаптации приведен в [12, 13], а предложен еще ранее в 1985 г. (см. [12]). Его непрерывный аналог приведен в обзоре [14] со ссылкой на работу [12]. Постоянные $A_{\mathrm{O}}, A_{\mathrm{A}}$ — положительные весовые коэффициенты, определяющие вклад функционалов $D_{\mathrm{O}}, D_{\mathrm{A}}$ в построение сетки. За счет включения функционала адаптации в минимизируемый функционал осуществляется реализация критерия адаптации сетки под мониторную функцию $\Phi(x, y, z)$. Вариации мониторной функции для исключения вырождений в алгоритмах построения сеток заменяют весовыми функциями, большими нуля. Минимизация функционала D должна обеспечить построение оптимальной сетки, близкой к равномерной, ортогональной и адаптивной.

Непрерывный аналог функционала D и описание возникающих вариационных задач для построения сеток приведены в [6, 13]. Отличительной особенностью функционала D и его непрерывного аналога является специальный способ формализации критерия равномерности. Он определяет тип уравнений Эйлера для построения сеток (гиперболический в широком смысле), позволяет рассматривать различные виды краевых условий в вариационных задачах построения сеток (фиксированные, свободные узлы, условие ортогональности координатных линий и поверхностей граням) и обеспечивает хорошие вычислительные свойства сеток (см. [13]).

В соответствии с введенными функционалами в [10] осуществлялась модификация численного алгоритма оптимизации, разработанного ранее только для двух критериев оптимальности: равномерности и ортогональности. Алгоритм оптимизации представляет собой итерационную процедуру минимизации дискретного функционала D. Алгоритм минимизации функционала осуществляется аналогом метода по-координатного спуска, где в качестве одного из направлений минимизации выступает один узел сетки. На каждой итерации для нахождения каждого внутреннего узла H_{ijk}^n осуществляется локальная оптимизация сетки, основанная на геометрических принципах. Положение нового узла H_{ijk}^{n+1} ищется из условия минимума функционала

$$D\Big(\mathbf{x}^n_{000}, \mathbf{x}^n_{001}, \ldots, \mathbf{x}^{n+1}_{ijk}, \ldots, \mathbf{x}^n_{N-1,L-1,K-1}\Big) = \min_{\mathbf{x}_{ijk}\in H} D\Big(\mathbf{x}^n_{000}, \mathbf{x}^n_{001}, \ldots, \mathbf{x}_{ijk}, \ldots, \mathbf{x}^n_{N-1,L-1,K-1}\Big)$$

на специально построенном множестве H и условия невырожденности сетки (см. [1, 11]). Локальная минимизация сетки осуществляется на шаблоне из восьми ячеек сетки, содержащих рассчитываемый узел в качестве вершины (см. рис. 1 б). Внешние узлы шаблона фиксируются. После того, как очередной узел найден, его координаты заменяются на новые. Порядок пересчета узлов осуществляется в циклах по возрастанию индексов узлов на четных итерациях и, из соображений симметрии, на нечетных итерациях — по убыванию индексов. Итерации прекращаются, когда значения минимизируемого функционала стабилизируются, либо меняются от итерации к итерации незначительно. Алгоритм [6, 10] дополнен новым способом построения допустимого множества H для минимизации функционала, а именно новым вычислительным алгоритмом нахождения опорной точки C_w (см. [10]) для построения множества H из принципа равнораспределения весовой функции (используемого для построения адаптивных сеток, см. [13]) вдоль каждого из координатных направлений шаблона $[I_m, I_p]$, $[J_m, J_p]$, $[K_m, K_p]$, где $I_m = H^n_{i-1jk}$, $I_p = H^n_{i+1jk}$, $J_m = H^n_{ij-1k}$, $J_p = H^n_{ij+1k}$, $K_m = H^n_{ijk-1}$, $K_p = H^n_{ijk+1}$, если восьмигранник из указанных точек (см. рис. 1 б) выпуклый, в случае если восьмигранник невыпуклый, только вдоль его внутренних направлений. Для сохранения геометрии области в процессе минимизации функционала использован специальный способ расчета граничных узлов, в котором концы элементов образующей в итерационном процессе фиксируются, а все остальные узлы находятся из условия минимума функционала D, при этом вклад для граничных узлов в функционал D составляется слагаемыми с положительными значениями индексов и с учетом вырождений шестигранных ячеек в призмы с треугольным основанием. Начальная сетка для построения оптимальной сетки без учета критерия адаптации ($A_{\text{А}} = 0$, она выбирается в качестве начальной для реализации критерия адаптации) строится геометрическим методом [3, 15]. Его цель (см. [3]) — построение невырожденной сетки, близкой к равномерной.

3. Примеры расчетов

Приведем примеры расчетов сеток, адаптирующихся под функцию

$$\Phi = \Phi(x, y, z) = \exp(-(x-2)^2/\varepsilon), \quad \varepsilon = 1, \tag{1}$$

и ее первые производные.

Для конструкции, изображенной на рис. 2 переменные x, y, z изменяются на отрезках $[-6, 9]$, $[-7.5, 0]$, $[6, 22]$ соответственно. В качестве начальной сетки для процесса адаптации используется оптимальная сетка, посчитанная без учета критерия адаптации ($A_{\text{А}} = 0$, см. рис. 2 а). Мониторная функция (1) вдоль плоскости $x = 2$ имеет большие градиенты, а на самой плоскости ее производная равна нулю, при этом функция имеет максимум, поэтому адаптивная сетка сгущается с той и с другой стороны от этой плоскости, а на самой плоскости шаги сетки увеличиваются (см. рис. 2 б, в). Если увеличение шагов на плоскости $x = 2$ нежелательно, применяется адаптация под саму функцию и ее первые производные (см. рис. 2 г, д). Примеры для одномерного и двумерного случаев см. в [12, 13], а для деформированных объемов вращения см. в [9]. Весовые функции для адаптации под саму функцию, а также под функцию и ее первые производные выбирались способом, описанным в [9]. В отличие от [9] при реализации критерия адаптации для обобщения объемов вращения для сохранения геометрии области концы элементов образующей фиксируются в процессе расчетов за счет фиксирования узлов, расположенных в данных точках, остальные узлы считаются свободными.

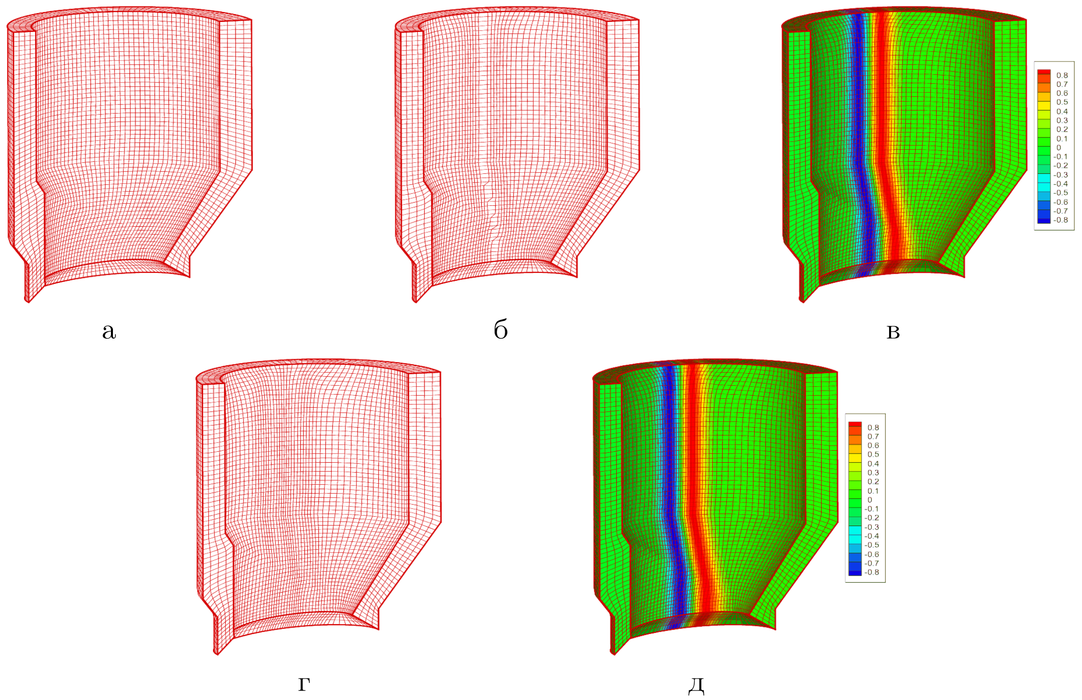

Рис. 2. Оптимальные сетки: а — без учета критерия адаптации; б — адаптирующаяся под функцию (1); в — с значениями функции (1); г — адаптирующаяся под функцию (1) и ее первые производные; д — с значениями первой производной $\partial\Phi/\partial x$ функции (1)

4. Заключение

Критерий адаптации реализован в технологии построения сеток для обобщений объемов вращения. В его реализации применен способ расчета граничных узлов, фиксирующий концы элементов образующей. Адаптация реализована под саму мониторную функцию и ее первые производные.

Литература

1. **Ушакова О.В.** Условия невырожденности трехмерных ячеек. Формула для объема ячеек // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2001. — Т. 41, № 6. — С. 881–894.
2. **Бронина Т.Н., Гасилова И.А., Ушакова О.В.** Алгоритмы построения трехмерных структурированных сеток // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2003. — Т. 43, № 6. — С. 875–883.
3. **Anuchina A.I., Artyomova N.A., Gordeychuck V.A., Ushakova O.V.** A technology for grid generation in volumes bounded by the surfaces of revolutions // Numerical Geometry, Grid Generation and Scientific Computing / Eds. V.A. Garanzha et al. — 2016. — LNCSE, Vol. 131. — P. 281–292.

4. **Anuchina N.N., Volkov V.I., Gordeychuk V.A., Es'kov N.S., Ilyutina O.S., and Kozyrev O.M.** Numerical simulation of 3D multi-component vortex flows by MAH-3 code // Advances in Grid Generation / Ed. O.V. Ushakova. — New York: Nova Science, 2007. — P. 337–380.
5. **Ушакова О.В.** Алгоритм коррекции сетки к области вращения // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. — 2016. — № 1. — С. 16–27.
6. **Ушакова О.В.** Алгоритмы оптимизации трехмерных сеток для областей вращения // Тр. ИММ УрО РАН. — 2008. — Т. 14, № 1. — С. 150–180. Перевод: Ushakova O.V. Optimization algorithms for three-dimensional grids in domains of rotation // Proc. Steklov Inst. Math. — 2008. — Suppl. 1. — P. 228–259. — DOI: 10.1134/S0081543808050192.
7. **Ушакова О.В.** Алгоритм коррекции сетки к области, образованной поверхностями вращения с параллельными осями вращения // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. — 2018. — № 1. — С. 30–41.
8. **Anuchina A.I., Artyomova N.A., Gordeychuck V.A., Ushakova O.V.** On the development of the grid generation technology for constructions bounded by the surfaces of revolutions // AIP Conference Proceedings 2312. — 2020. — Vol. 2312. — DOI.org/10.1063/5.0035688.
9. **Artyomova N.A., Ushakova O.V.** About grid generation in constructions bounded by the surfaces of revolution // J. of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 2099 012018.
10. **Ушакова О.В.** Реализации критерия адаптации в алгоритме построения оптимальных сеток // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. — 2021. — № 2. — С. 80–95.
11. **Ushakova O.V.** Criteria for hexahedral cell classification // Appl. Numer. Math. — 2018. — Vol. 127. — P. 18–39.
12. **Serezhnikova T.I., Sidorov A.F., and Ushakova O.V.** On one method of construction of optimal curvilinear grids and its applications // Sov. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. — 1989. — Vol. 4, № 2. — P. 137–155.
13. **Khairullina O.B., Sidorov A.F., and Ushakova O.V.** Variational methods of construction of optimal grids // Handbook of Grid Generation / Eds. J.F. Thompson, B.K. Soni, N.P. Weatherill. — 1999. — Ch. IV. — P. 36-1–36-25.
14. **Лисейкин В.Д.** Обзор методов построения структурных адаптивных сеток // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1996. — Т. 36, № 1. — С. 3–41.
15. **Бронина Т.Н.** Алгоритмы построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения // Тр. ИММ УрО РАН. — 2008. — Т. 14, № 1. — С. 3–10. Перевод: Bronina T.N. An algorithm for constructing initial three-dimensional structured grids for domains of revolution // Proc. Steklov Inst. Math. — 2008. — Suppl. 1. — P. 36–43. — DOI: 10.1134/S00815480805004X.

Поступила в редакцию 07 октября 2022 г.
После рецензирования без замечаний 07 октября 2022 г.
Принята к печати 23 ноября 2022 г.

Литература в транслитерации

1. **Ushakova O.V.** Usloviya nevyrozhdennosti trekhmernykh yacheek. Formula dlya ob"ema yacheek // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2001. — T. 41, № 6. — S. 881–894.
2. **Bronina T.N., Gasilova I.A., Ushakova O.V.** Algoritmy postroeniya trekhmernykh strukturirovannykh setok // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2003. — T. 43, № 6. — S. 875–883.

3. **Anuchina A.I., Artyomova N.A., Gordeychuck V.A., Ushakova O.V.** A technology for grid generation in volumes bounded by the surfaces of revolutions // Numerical Geometry, Grid Generation and Scientific Computing / Eds. V.A. Garanzha et al. — 2016. — LNCSE, Vol. 131. — P. 281–292.
4. **Anuchina N.N., Volkov V.I., Gordeychuk V.A., Es'kov N.S., Ilyutina O.S., and Kozyrev O.M.** Numerical simulation of 3D multi-component vortex flows by MAH-3 code // Advances in Grid Generation / Ed. O.V. Ushakova. — New York: Nova Science, 2007. — P. 337–380.
5. **Ushakova O.V.** Algoritm korrekcii setki k oblasti vrascheniya // Voprosy atomnoi nauki i tekhniki. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov. — 2016. — № 1. — S. 16–27.
6. **Ushakova O.V.** Algoritmy optimizacii trekhmernykh setok dlya oblastei vrascheniya // Tr. IMM UrO RAN. — 2008. — T. 14, № 1. — S. 150–180. Perevod: Ushakova O.V. Optimization algorithms for three-dimensional grids in domains of rotation // Proc. Steklov Inst. Math. — 2008. — Suppl. 1. — P. 228–259. — DOI: 10.1134/S0081543808050192.
7. **Ushakova O.V.** Algoritm korrekcii setki k oblasti, obrazovannoi poverkhnostyami vrascheniya s parallel'nymi osyami vrascheniya // Voprosy atomnoi nauki i tekhniki. Ceriya: Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov. — 2018. — № 1. — S. 30–41.
8. **Anuchina A.I., Artyomova N.A., Gordeychuck V.A., Ushakova O.V.** On the development of the grid generation technology for constructions bounded by the surfaces of revolutions // AIP Conference Proceedings 2312. — 2020. — Vol. 2312. — DOI.org/10.1063/5.0035688.
9. **Artyomova N.A., Ushakova O.V.** About grid generation in constructions bounded by the surfaces of revolution // J. of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 2099 012018.
10. **Ushakova O.V.** Realizacii kriteriya adaptacii v algoritme postroeniya optimal'nykh setok // Voprosy atomnoi nauki i tekhniki. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov. — 2021. — № 2. — S. 80–95.
11. **Ushakova O.V.** Criteria for hexahedral cell classification // Appl. Numer. Math. — 2018. — Vol. 127. — P. 18–39.
12. **Serezhnikova T.I., Sidorov A.F., and Ushakova O.V.** On one method of construction of optimal curvilinear grids and its applications // Sov. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. — 1989. — Vol. 4, № 2. — P. 137–155.
13. **Khairullina O.B., Sidorov A.F., and Ushakova O.V.** Variational methods of construction of optimal grids // Handbook of Grid Generation / Eds. J.F. Thompson, B.K. Soni, N.P. Weatherill. — 1999. — Ch. IV. — P. 36-1–36-25.
14. **Liseikin V.D.** Obzor metodov postroeniya strukturnykh adaptivnykh setok // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1996. — T. 36, № 1. — S. 3–41.
15. **Bronina T.N.** Algoritmy postroeniya nachal'nykh trekhmernykh strukturirovannykh setok dlya oblastei vrascheniya // Tr. IMM UrO RAN. — 2008. — T. 14, № 1. — S. 3–10. Perevod: Bronina T.N. An algorithm for constructing initial three-dimensional structured grids for domains of revolution // Proc. Steklov Inst. Math. — 2008. — Suppl. 1. — P. 36–43. — DOI: 10.1134/S00815480805004X.