УДК 620.170.5; 539.4

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И КОЭФФИЦИЕНТ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ТРЕЩИНОПОДОБНЫХ ДЕФЕКТОВ ПРИ ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ ПЛАСТИНЫ

А. А. Остсемин, П. Б. Уткин*

Российская академия народного хозяйства
и государственной службы при Президенте РФ, 454077 Челябинск, Россия
* Южно-Уральский государственный университет, 454080 Челябинск, Россия
E-mails: ostsemin@math.susu.ac.ru, neobart@inbox.ru

Рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния, описываемого сингулярными и регулярными членами, и коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершины трещиноподобного дефекта в пластине при двухосном нагружении. Методом Колосова — Мусхелишвили получены выражения для тензора напряжений вблизи вершины эллипса, из которых следуют формулы для напряжений в случае затупленных трещин. Определены максимальное касательное напряжение, главные напряжения и интенсивность напряжений. Получены формулы для коэффициента интенсивности напряжений при двухосном нагружении пластины с трещиноподобным дефектом, которые могут быть использованы в методе голографической интерферометрии.

Ключевые слова: механика разрушения, коэффициенты интенсивности напряжений, напряженное состояние, метод Колосова — Мусхелишвили, пластина с эллиптическим отверстием, метод голографической интерферометрии.

Введение. Одной из причин потери работоспособности магистральных газонефтепроводов, резервуаров, сосудов давления, торовых оболочек и ряда других конструкций является их разрушение вследствие наличия трещиноподобных дефектов, возникающих в процессе сварки и монтажа (царапины, риски, задиры, раковины), а также при эксплуатации (питтинги, коррозионно-механические трещины) за счет коррозии металла. В отличие от трещин рассматриваемые концентраторы напряжений, такие как сварочные дефекты и коррозионные затупленные трещины, даже наиболее острые, имеют малый, но конечный радиус кривизны ρ [1].

Методы механики разрушения позволяют определять сопротивляемость металлов разрушению при наличии в них трещин. Однако особенность сварных соединений состоит в том, что в них даже при отсутствии трещин имеются концентраторы напряжений с достаточно малыми радиусами кривизны, которые могут представлять опасность при эксплуатации конструкций. Использование критериев механики разрушения, разработанных для оценки опасности возникновения трещин, в случае концентраторов (непровары, несплавления, шлаковые включения), типичных для сварных соединений, некорректно.

Трещиноподобные дефекты, имеющие закругленные вершины, нельзя трактовать как острые трещины, поэтому при их исследовании неприменимы критерии теории трещин [2]. Наличие больших градиентов деформаций и напряжений в окрестности таких концентраторов не позволяет использовать классические критерии прочности. Теория расчета таких дефектов, занимающая промежуточное положение между теорией трещин и теорией прочности тел с конструктивными концентраторами напряжений, разработана недостаточно полно [2]. В данной работе предложена математическая модель наряженно-деформированного состояния вблизи вершины эллиптического дефекта в пластине при двухосном нагружении, в которой учитывается радиус ρ кривизны в вершине дефекта.

Технологические дефекты (подрезы, раковины, надрезы, поры, непровары, несплавления, трещины) ухудшают сопротивляемость конструкции хрупкому разрушению. Радиус ρ в вершине непровара может изменяться в широком диапазоне: $\rho = 0{,}01 \div 0{,}10$ мм. В данном случае использование известных критериев линейной механики разрушения без учета поправок на геометрию трещиноподобных дефектов и радиус кривизны ρ приведет к большим погрешностям [2].

В работе [3] приведено решение задачи теории упругости для трещины в пластине при одноосном растяжении, однако анализ напряжений проведен только для сингулярного члена.

В [4] отмечено, что при решении задачи определения компонент тензоров напряжений и деформаций в случае двухосного нагружения пластины с центральной трещиной необходимо учитывать второй член в разложении компонент в ряд.

С использованием решения задачи о распределении напряжений вокруг вершины надреза и теории линий скольжения разработана модель зарождения разрушения [5] на расстоянии r_c от вершины при напряжении σ_c, с помощью которой выведена формула для коэффициента интенсивности напряжений (КИН), пропорционального $\sqrt{\rho}$.

В [6] методом Колосова — Мусхелишвили получены приближенные формулы для няпряженно-деформированного состояния и КИН вблизи вершины эллиптического дефекта при двухосном нагружении пластины [7, 8].

Целями данной работы являются приближенное вычисление напряженного состояния пластины вблизи вершины трещиноподобного дефекта с радиусом кривизны ρ при двухосном нагружении и экспериментальное определение напряженно-деформированного состояния методом голографической интерферометрии.

1. Напряжения и перемещения в случае трещиноподобного дефекта первого типа при двухосном нагружении пластины. Рассматривается трещиноподобный технологический дефект в виде сквозного эллиптического отверстия при двухосном нагружении пластины из изотропного материала.

Пусть бесконечная пластина с отверстием в форме эллипса с полуосями длиной a, b нагружена напряжениями σ и $\varepsilon\sigma$ вдоль осей исходной системы координат. На рис. 1 приведена схема данной задачи (ε — параметр двухосного нагружения, т. е. отношение напряжений, действующих в горизонтальном и вертикальном направлениях). Радиус кривизны эллиптического отверстия в его вершине обозначим через $\rho = b^2/a$. Переменные r, θ являются координатами полярной системы координат с центром в фокусе эллипса (см. рис. 1).

Значения R, m и фокусное расстояние d являются параметрами эллипса и связаны с длинами его полуосей a, b соотношениями

$$\begin{gathered} R = (a+b)/2, \quad m = (a-b)/(a+b), \quad a = R(1+m), \quad b = R(1-m), \\ d^2 = a^2 - b^2, \qquad -1 < m < 1, \qquad d^2 = 4ma^2/(1+m)^2 = 4mR^2. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Расстояние от вершины трещины до фокуса эллипса равно $a - d$ и при $m \approx 1$ приближенно равно $\rho/2$. Для того чтобы уточнить соотношение между этими величинами, вы-

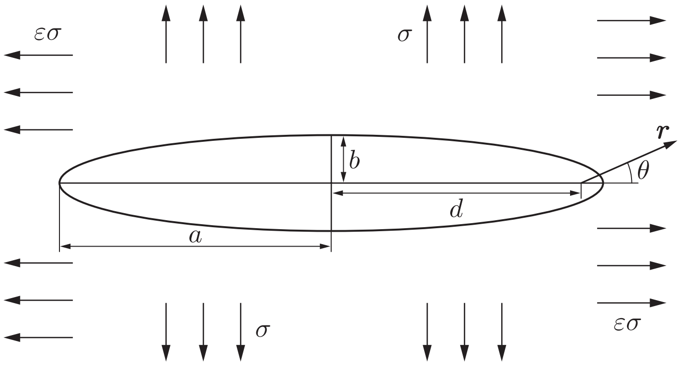

Рис. 1. Схема задачи об эллиптическом дефекте в пластине, подвергнутой двухосному нагружению

разим отношение $\rho/(2(a-d))$ через параметр эллипса m. С использованием формул (1.1) получаем

$$\frac{\rho}{2(a-d)} = \frac{(1+\sqrt{m}\,)^2}{2(1+m)}. \tag{1.2}$$

С помощью соотношений (1.1), (1.2) определим компоненты тензора напряжений с регулярными членами вблизи сквозного эллиптического дефекта в пластине при двухосном растяжении:

$$\sigma_x \approx -\frac{DK_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\,\frac{\rho}{2r}\cos\Big(\frac{3\theta}{2}\Big) + \frac{A_1K_{\mathrm{I}}}{4\sqrt{2\pi r}} - \\ - \sigma\Big[\Big(\frac{2r}{\rho}\Big)^{-1/2}D^{3/2}(1+\varepsilon)\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) - (1-\varepsilon)\,\frac{D^2}{m}\Big]; \tag{1.3}$$

$$\sigma_y \approx \frac{DK_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\,\frac{\rho}{2r}\cos\Big(\frac{3\theta}{2}\Big) + \frac{B_1K_{\mathrm{I}}}{4\sqrt{2\pi r}} + \\ + \sigma\Big[\Big(\frac{2r}{\rho}\Big)^{-1/2}D^{3/2}(1+\varepsilon)\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + (1-\varepsilon)\,\frac{D^2-1}{m}\Big]; \tag{1.4}$$

$$\tau_{xy} \approx -\frac{DK_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\,\frac{\rho}{2r}\sin\Big(\frac{3\theta}{2}\Big) + \frac{C_1K_{\mathrm{I}}}{4\sqrt{2\pi r}} - \sigma\Big(\frac{2r}{\rho}\Big)^{-1/2}D^{3/2}(1+\varepsilon)\sin\Big(\frac{\theta}{2}\Big). \tag{1.5}$$

Здесь

$$A_1 = \cos(5\theta/2) + (4-2A)\cos(\theta/2), \qquad B_1 = -\cos(5\theta/2) + (2A+4)\cos(\theta/2),$$
$$C_1 = \sin(5\theta/2) - 2A\sin(\theta/2),$$
$$D = (1+m)/(2\sqrt{m}\,), \quad A = (17m^2+6m-15)/(16m), \quad r = |\boldsymbol{r}|.$$

В случае вырождения эллипса в трещину ($m = 1$) первые два сингулярных члена в выражениях (1.3)–(1.5) соответствуют известным формулам [1].

Коэффициент интенсивности напряжений равен [7]

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt[4]{\frac{4m}{(1+m)^2}}\,\sqrt{\pi a}\,\frac{\sigma(m(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon))}{2m}, \qquad m = \frac{1-\sqrt{\rho/a}}{1+\sqrt{\rho/a}}. \tag{1.6}$$

Из формул (1.3)–(1.5) следует, что компоненты тензора напряжений зависят от параметра двухосного нагружения пластины ε и номинального растягивающего напряжения σ.

Первые два члена (сингулярная часть) в формуле (1.4) представляют собой распределение напряжений σ_y вблизи вершины дефекта. Из формулы (1.4) следует, что по мере приближения к вершине дефекта два сингулярных члена возрастают и начинают оказывать основное влияние на напряженно-деформированное состояние. При $r \to 0$ влияние остальных членов уменьшается, при этом интенсивность поля напряжений в окрестности вершины дефекта зависит только от величины КИН.

Отличие выражений (1.3)–(1.5) для компонент тензора напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} от формул, приведенных в [1], заключается в наличии регулярных членов и сингулярного члена, содержащего величину $r^{-3/2}$. В случае трещины ($m = 1$, $D = 1$) выражения (1.3)–(1.5) соответствуют выражениям для компонент напряжений в [4, 7]. При параметре эллипса $0{,}9 \leqslant m \leqslant 1{,}0$ на расстоянии от вершины трещины, равном нескольким десяткам радиусов кривизны ρ, значение первого главного напряжения, вычисленное по формулам (1.3)–(1.5), отличается от значения, полученного по формулам работы [1], не более чем на 6 %.

С учетом соотношений (1.3), (1.4) выражения для суммы нормальных напряжений $\sigma_x+\sigma_y$ в случае центрального эллиптического выреза при двухосном нагружении пластины можно записать в следующем виде:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\,\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\sigma(1-\varepsilon)}{m}.$$

Выражение для разности нормальных напряжений $\sigma_y - \sigma_x$ имеет вид

$$\sigma_y - \sigma_x = \frac{DK_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\,\frac{\rho}{r}\cos\Big(\frac{3\theta}{2}\Big) - \frac{(A_1 - B_1)K_{\mathrm{I}}}{4\sqrt{2\pi r}} + {} + \sigma\Big[\Big(\frac{2r}{\rho}\Big)^{-1/2} D^{3/2}(1+\varepsilon)\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + (1-\varepsilon)H\Big]. \tag{1.7}$$

Здесь $H = (1+m^2)/(2m^2)$. В случае линейной трещины при $\rho = 0$, $m = 1$, $\theta = 0$ формула (1.7) принимает вид [4, 5, 9] $\sigma_y - \sigma_x = \sigma(1-\varepsilon) = T$.

В рассматриваемой задаче перемещения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} u &\approx \frac{1}{2\mu}\Big[\frac{K_{\mathrm{I}}}{4}\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^{-1/2}\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}}\,D_1K_{\mathrm{I}} - {}\\ &\qquad - \sigma\rho\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^{1/2}(1+\varepsilon)\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) - \frac{\sigma r(1-\varepsilon)}{4}\,(1+\varkappa)\cos\theta - \frac{aT}{4}\,(1+\varkappa)\Big],\\ v &\approx \frac{1}{2\mu}\Big[\frac{K_{\mathrm{I}}}{4}\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\,\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^{-1/2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}}\,E_1K_{\mathrm{I}} - {}\\ &\qquad - \sigma\rho\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^{1/2}(1+\varepsilon)\sin\frac{\theta}{2} + \frac{rT}{4}\,(3-\varkappa)\sin\theta\Big], \end{aligned} \tag{1.8}$$

где $D_1 = \cos(\theta/2)(\varkappa - 1 + 2\sin^2(\theta/2))$; $E_1 = \sin(\theta/2)(\varkappa + 1 - 2\cos^2(\theta/2))$.

При $\rho = 0$ из (1.8) следуют известные формулы, приведенные в [4].

2. Главные напряжения в случае трещиноподобного дефекта при двухосном нагружении пластины. С учетом соотношений (1.3)–(1.6) главные напряжения могут быть вычислены по формуле

$$\sigma_{1,2} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) - \frac{\sigma(1-\varepsilon)}{2m} \pm \sqrt{\Big(\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\Big)^2 F_1 + \frac{2\sigma K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\,F_2 + \sigma^2 F_3}\ , \tag{2.1}$$

где

$$F_1 = D^2\Big(\frac{\rho}{2r}\Big)^2 + D\cos\theta\,\Big(A - \frac{1}{2}\Big)\,\frac{\rho}{2r} + \frac{1}{16}\,(1 - 4A\cos 2\theta + 4A^2),$$

$$F_2 = D^{5/2}\Big(\frac{\rho}{2r}\Big)^{3/2}(1+\varepsilon)\cos\theta + D\,\frac{\rho}{2r}\,(1-\varepsilon)\cos\Big(\frac{3\theta}{2}\Big)\frac{H}{2} + \\ + D^{3/2}\Big(\frac{\rho}{2r}\Big)^{1/2}\frac{1+\varepsilon}{4}\,(2A-\cos 2\theta) + \frac{(1-\varepsilon)H}{8}\Big(2A\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) - \cos\Big(\frac{5\theta}{2}\Big)\Big),$$

$$F_3 = (1+\varepsilon)^2 D^3\,\frac{\rho}{2r} + 2(1-\varepsilon^2)D^{3/2}\Big(\frac{\rho}{2r}\Big)^{1/2}\frac{H}{2}\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + (1-\varepsilon)^2\Big(\frac{H}{2}\Big)^2.$$

Распределение главных напряжений σ_1, σ_2, вычисленных по формуле (2.1) в случае одноосного растяжения пластины при $\varepsilon = 0$, $\rho = 0{,}01$, соответствует результатам, полученным в [3]. Представляет интерес исследование зависимостей главных напряжений σ_1, σ_2 от полярного угла θ с использованием формулы (2.1). В случае одноосного ($\varepsilon = 0$) растяжения пластины главное напряжение σ_1 достигает наибольшего значения при $\theta = 60^\circ$ и значениях радиуса кривизны надреза в диапазоне $\rho/a = 0{,}01 \div 0{,}10$. В случае трещины максимум величины σ_1 также достигается при $\theta = 60^\circ$ [3].

Интенсивность напряжений σ_i, вычисленная согласно критерию пластичности Мизеса, в случае плоского напряженного состояния в пластине с центральным эллиптическим вырезом с учетом формул (1.3)–(1.5) равна

$$\sigma_i^2 = \Big(\frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}}\Big)^2\Big(\cos^2\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + 3F_1\Big) + \frac{2\sigma K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}}\Big[-\frac{1-\varepsilon}{2m}\Big(\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + \\ + 3\,\frac{1+m^2}{4m}\Big(\frac{1}{2}\cos\Big(\frac{5\theta}{2}\Big) - A\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\Big)\Big) - \frac{3(1+\varepsilon)}{4}\,D^{1/2}\Big(\frac{\rho}{2r}\Big)^{1/2}\big(\cos 2\theta - 2A\big) + \\ + \frac{3(1-\varepsilon)}{4m^2}\,D\,\frac{\rho}{2r}\cos\Big(\frac{3\theta}{2}\Big) + 3(1+\varepsilon)D^{5/2}\Big(\frac{\rho}{2r}\Big)^{3/2}\cos\theta\Big] + \\ + \sigma^2\Big[\Big(\frac{1-\varepsilon}{m}\Big)^2 + 3(1-\varepsilon)^2\Big(\frac{1-m^2}{4m^2}\Big)^2 + 3(1+\varepsilon)^2D^3\,\frac{\rho}{2r} + \\ + 3(1-\varepsilon^2)D^{3/2}\Big(\frac{\rho}{2r}\Big)^{1/2}\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big)H\Big]. \qquad (2.2)$$

При $\sigma_i = \sigma_{\rm т}$ ($\sigma_{\rm т}$ — предел текучести) с использованием формулы (2.2) можно определить размер пластической зоны в надрезе аналогично тому, как это сделано в [5].

Для построения линий постоянного уровня интенсивности напряжений σ_i при двухосном нагружении пластины необходимо использовать численные методы, поскольку в выражении (2.2) величина $\sqrt{r}$ имеет шестую степень. На рис. 2 показан радиус пластической зоны в случае растяжения пластины с эллиптическим вырезом при $\sigma = 0{,}3\sigma_{\rm т}$, $\varepsilon = 0{,}5$. Уменьшение параметра двухосного нагружения пластины $\varepsilon = 0{,}5$ до значения $\varepsilon = 0$ приводит к значительному увеличению площади пластической зоны. С увеличением номинального напряжения $\sigma_{\rm н}$ в случае одноосного растяжения ($\varepsilon = 0$) площадь пластической зоны увеличивается быстрее, чем в случае двухосного нагружения ($\varepsilon = 0{,}5$).

Ранее при оценке радиуса пластической зоны в вершине дефекта использовались формулы для напряжений в окрестности трещины. Полученные приближенные формулы совместно с критерием Мизеса позволяют оценить размеры пластических зон вблизи вершины дефекта с эллиптическим контуром. Радиусы пластической зоны, вычисленные по формулам для трещины и эллипса с параметром $m = 0{,}9$, в разных направлениях имеют различные значения. В случае центрального эллиптического дефекта различие радиусов составляет от 7 до 20 %, причем наименьшее различие имеет место на оси дефекта.

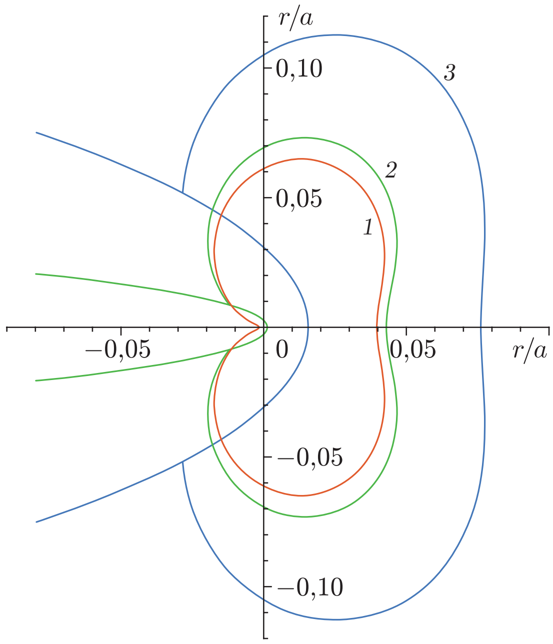

Рис. 2. Формы пластической зоны при различных значениях параметра эллипса: *1* — $m = 1$, *2* — $m = 0{,}9$, *3* — $m = 0{,}7$

3. Максимальное касательное напряжение в случае трещиноподобного дефекта при двухосном нагружении пластины. С использованием выражений (1.3)–(1.7) запишем формулу для максимального касательного напряжения $\tau_{\max}$ вблизи вершины эллиптического дефекта:

$$\tau_{\max}^2 = \left(\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\right)^2 F_1 + \frac{\sigma K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} F_2 + \sigma^2 F_3. \tag{3.1}$$

Из соотношения (3.1) следует, что положение линий уровня $\tau_{\max}$ зависит от коэффициента двухосного нагружения ε, радиуса кривизны надреза ρ и напряжения σ.

В случае прямолинейной трещины ($m = 1$) формула (3.1) для $\tau_{\max}$ соответствует теоретическим результатам [4] и используется при определении K_{I} по картинам изохром методом фотоупругости.

На рис. 3 показана зависимость от параметра эллипса m отношения максимального касательного напряжения для пластины с эллиптическим вырезом при $\theta = 0$ к максимальному касательному напряжению для трещины при одной и той же длине дефекта (длина трещины равна длине большой оси эллипса: $2l = 2a$) на расстоянии от вершины, равном $0{,}07a$.

4. Компоненты тензора напряжений в полярных координатах для дефекта первого типа при двухосном нагружении пластины. Компоненты тензора напряжений в полярных координатах найдем путем преобразования выражений (1.3)–(1.5) для напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy}. После ряда преобразований запишем в полярных координатах выражения для компонент тензора напряжений с регулярными членами в случае эллиптического дефекта в зависимости от радиуса кривизны надреза ρ и параметра двухосного нагружения пластины ε:

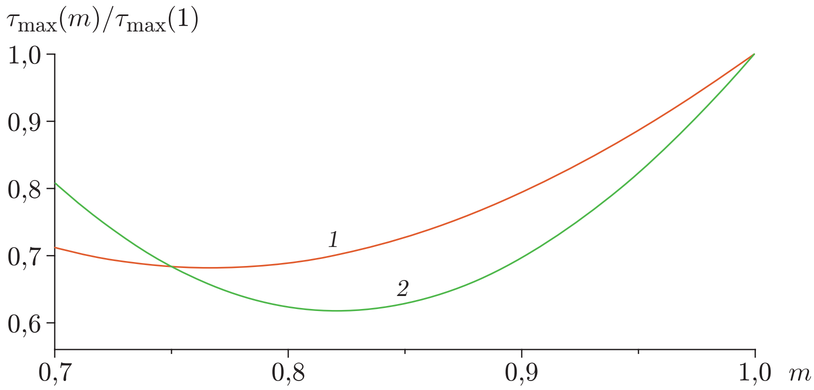

Рис. 3. Зависимость отношения максимальных касательных напряжений от параметра эллипса m:
1 — $\varepsilon = 0$, *2* — $\varepsilon = 0{,}5$

$$\sigma_r \approx -\frac{DK_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}}\,\frac{\rho}{2r}\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + \frac{K_{\rm I}}{4\sqrt{2\pi r}}\Big(5\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) - \frac{17m^2+6m-15}{8m}\cos\Big(\frac{3\theta}{2}\Big)\Big) -$$
$$- \Big(\frac{2r}{\rho}\Big)^{-1/2} D^{3/2}\sigma(1+\varepsilon)\cos\Big(\frac{3\theta}{2}\Big) - T\Big(\Big(\frac{1+m}{2m}\Big)^2\cos^2\theta - \Big(\frac{1-m}{2m}\Big)^2\sin^2\theta\Big); \qquad (4.1)$$
$$\sigma_\theta \approx \frac{DK_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}}\,\frac{\rho}{2r}\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + \frac{K_{\rm I}}{4\sqrt{2\pi r}}\Big(3\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + \frac{17m^2+6m-15}{8m}\cos\Big(\frac{3\theta}{2}\Big)\Big) +$$
$$+ \Big(\frac{2r}{\rho}\Big)^{-1/2} D^{3/2}\sigma(1+\varepsilon)\cos\Big(\frac{3\theta}{2}\Big) - T\Big(\Big(\frac{1+m}{2m}\Big)^2\sin^2\theta - \Big(\frac{1-m}{2m}\Big)^2\cos^2\theta\Big),$$
$$\tau_{r\theta} \approx \frac{DK_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}}\,\frac{\rho}{2r}\sin\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + \frac{K_{\rm I}}{4\sqrt{2\pi r}}\Big(\sin\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + \frac{17m^2+6m-15}{8m}\sin\Big(\frac{3\theta}{2}\Big)\Big) -$$
$$- \Big(\frac{2r}{\rho}\Big)^{-1/2} D^{3/2}\sigma(1+\varepsilon)\sin\Big(\frac{3\theta}{2}\Big) + TH\sin 2\theta.$$

5. Деформированное состояние в вершине трещиноподобного надреза в пластине при двухосном нагружении. Упругие деформации в зоне надреза определяются с использованием формул (1.3), (1.4) для случая плосконапряженного состояния ($\sigma_z = 0$) на основе закона Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\Big(-\frac{K_{\rm I}D(1+\mu)}{\sqrt{2\pi r}}\,\frac{\rho}{2r}\cos\Big(\frac{3\theta}{2}\Big) + \frac{K_{\rm I}}{4\sqrt{2\pi r}}(A_1 - \mu B_1) -$$
$$- (1+\mu)\Big(\frac{2r}{\rho}\Big)^{-1/2} D^{3/2}\sigma(1+\varepsilon)\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) - \sigma(1-\varepsilon)\Big(\Big(\frac{1+m}{2m}\Big)^2 + \mu\Big(\frac{1-m}{2m}\Big)^2\Big)\Big),$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\Big(\frac{D(1+\mu)}{\sqrt{2\pi r}}\,\frac{\rho}{2r}K_{\rm I}\cos\Big(\frac{3\theta}{2}\Big) + \frac{K_{\rm I}}{4\sqrt{2\pi r}}(B_1 - \mu A_1) +$$
$$+ (1+\mu)\Big(\frac{2r}{\rho}\Big)^{-1/2} D^{3/2}\sigma(1+\varepsilon)\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) + \sigma(1-\varepsilon)\Big(\Big(\frac{1-m}{2m}\Big)^2 + \mu\Big(\frac{1+m}{2m}\Big)^2\Big)\Big),$$
$$\varepsilon_z = \frac{2\mu}{E}\Big(\frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\Big(\frac{\theta}{2}\Big) - \frac{\sigma(1-\varepsilon)}{2m}\Big), \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}.$$

Здесь $G = E/(2(1+\mu))$ — модуль сдвига; E — модуль Юнга; μ — коэффициент Пуассона.

6. Определение коэффициента интенсивности напряжений для трещиноподобного дефекта методом голографической итерферометрии. В [10] определено влияние радиуса кривизны ρ в вершине надреза и выполнен анализ погрешностей результатов вычисления K_{I} в пластине на основе формул, полученных в [1]. В [9] приведен обзор методов Ирвина, Брэдли — Кобаяши и Смита определения двухпараметрическим методом фотоупругости экспериментальных значений K_{I} при двухосном нагружении пластины с центральной трещиной по картинам изохром. В [11] методом голографической интерферометрии исследовано напряженное состояние, по формулам [1] вычислен коэффициент интенсивности напряжений K_{I} в пластине с трещиноподобным дефектом и приведено описание эксперимента. В соответствии с теорией Неймана и законом Гука, полагая деформации малыми, для тонких пластин имеем зависимость между номерами интерференционных полос на картинах абсолютных разностей хода (АРХ) и главными напряжениями σ_1, σ_2 в виде соотношений Фавра [12]:

$$N_1 = a\sigma_1 + b\sigma_2, \qquad N_2 = b\sigma_1 + a\sigma_2, \tag{6.1}$$

где N_1, N_2 — номера полос на картинах АРХ при вертикальной и горизонтальной поляризациях опорного пучка соответственно; $a = 0{,}625$ полос/МПа, $b = 0{,}453$ полос/МПа — оптические постоянные материала ЭД-20МПГФА. В [13] для упругого материала описана методика тарирования, обеспечивающая повышение точности определения постоянных a, b за счет использования всех наблюдаемых интерференционных полос и применения операции интерполирования при установлении номеров полос. Картины АРХ удобнее обрабатывать вдоль оси трещиноподобного дефекта при $\theta = 0$ (наибольшее количество интерференционных полос). В случае $\sigma_1 = \sigma_y$, $\sigma_2 = \sigma_x$, $\tau_{xy} = 0$ из соотношения (2.1) получаем

$$\sigma_{1,2} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r_i}}\Big(1 \pm \Big(D\,\frac{\rho}{2r_i} + \frac{2A-1}{4}\Big)\Big) - \\ - \sigma\Big(\frac{1-\varepsilon}{2m} \mp \Big((1+\varepsilon)D^{3/2}\Big(\frac{\rho}{2r_i}\Big)^{1/2} + (1-\varepsilon)\,\frac{H}{2}\Big)\Big). \tag{6.2}$$

Различие экспериментальных и теоретических значений σ_1 составляет приблизительно 6 %.

Ранее в расчетах использовались формулы для КИН для трещин. В данной работе получены формулы для КИН для эллиптического выреза в пластине, которые обобщают формулы для трещин. При $m = 0{,}97$ отличие полученных значений КИН от КИН, вычисленных для случая линейного разреза (трещины), составляет более 10 %.

Подставляя выражения (6.2) в (6.1), получаем формулы для интерференционных полос с номерами N_{1i}:

$$N_{1i} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r_i}}\,((a+b) + (a-b)B) - \sigma\Big(\frac{(1-\varepsilon)(a+b)}{2m} - (a-b)C\Big). \tag{6.3}$$

Здесь

$$B = D\,\frac{\rho}{2r_i} + \frac{17m^2 - 2m - 15}{32m}, \quad C = (1+\varepsilon)D^{3/2}\Big(\frac{\rho}{2r_i}\Big)^{1/2} + (1-\varepsilon)\,\frac{H}{2}.$$

Из выражения (6.3) следуют соотношения

$$K_{\mathrm{I}i} = \sqrt{2\pi r_i}\,\frac{N_{1i} + \sigma((1-\varepsilon)(a+b)/(2m) - (a-b)C)}{(a+b) + (a-b)B}. \tag{6.4}$$

С использованием полученных результатов по формуле (6.4) вычислено значение $K_{\mathrm{I}}^{\text{э}} = 25{,}89$ МПа$\cdot$мм$^{1/2}$, которое согласуется с расчетным значением $K_{\mathrm{I}}^{\text{р}} = 24{,}88$ МПа$\cdot$мм$^{1/2}$

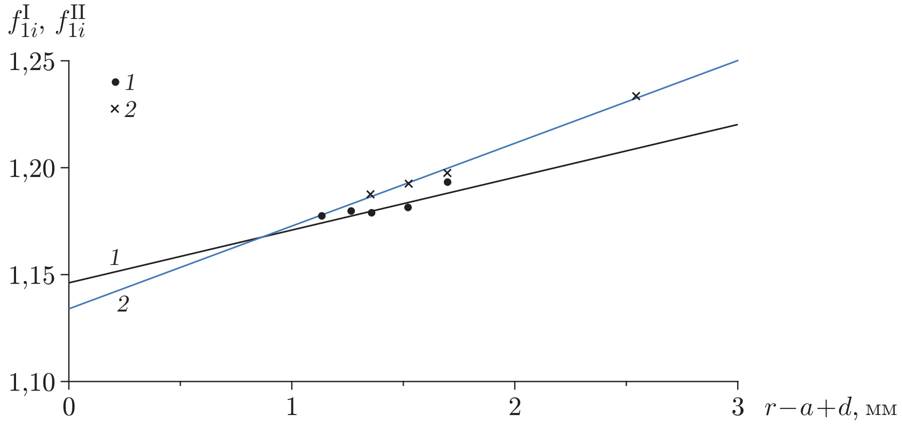

Рис. 4. Экстраполяция экспериментальных значений f_{1i}^{I} (*1*) и f_{1i}^{II} (*2*)

с погрешностью, равной 4 %. Как известно, при растяжении пластины конечных размеров с центральным трещиноподобным дефектом КИН равен [2, 5]

$$K_{\mathrm{I}} = \sigma_{\text{н}}\sqrt{\pi l}\, f_1. \tag{6.5}$$

Здесь l — половина длины дефекта; f_1 — поправочная функция, зависящая от геометрии образца и вида нагружения.

Приравнивая правые части выражений (6.4) и (6.5) и учитывая, что $\sigma = \sigma_{\text{н}}$, получаем выражения для поправочной функции f_{1i}, зависящие от N_{1i} и N_{2i}:

$$f_{1i}^{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{2r_i}{l}}\,\frac{N_{1i} + \sigma_{\text{н}}((1-\varepsilon)(a+b)/(2m) - (a-b)C)}{\sigma_{\text{н}}((a+b) + (a-b)B)}; \tag{6.6}$$

$$f_{1i}^{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{2r_i}{l}}\,\frac{N_{2i} + \sigma_{\text{н}}((1-\varepsilon)(a+b)/(2m) + (a-b)C)}{\sigma_{\text{н}}((a+b) - (a-b)B)}. \tag{6.7}$$

Проверка формул (1.4) для σ_y и (6.4) для КИН K_{I}, выражения (6.6) для поправочной функции f_{1i}^{I} и выражения (6.7) для f_{1i}^{II} выполнена методом голографической интерферометрии [11]. Эксперименты проводились для пластины шириной 100 мм и толщиной 3,83 мм с центральным эллиптическим отверстием длиной 30 мм и радиусом $\rho = 0{,}15$ мм, подвергнутой одноосному нагружению ($\varepsilon = 0$) при номинальном напряжении $\sigma_{\text{н}} = 3{,}28$ МПа.

По картинам N_{1i} с помощью формулы (6.6) при вертикальной поляризации опорного пучка и по картинам N_{2i} с помощью формулы (6.7) при горизонтальной поляризации определены значения поправочных функций f_{1i}^{I} и f_{1i}^{II}. На рис. 4 значения f_{1i}^{I} и f_{1i}^{II} экстраполированы прямыми линиями.

Экспериментально полученные значения $f_1^{\mathrm{I}} = 1{,}15$, $f_1^{\mathrm{II}} = 1{,}14$ больше значения $f_1 = 1{,}06$, полученного по формуле Феддерсена [5]. Это обусловлено наличием регулярных членов в формулах (6.6), (6.7) вследствие учета второго члена в представлении Вильямса [3] компонент тензора напряжений [4, 5, 7].

Получены приближенные формулы для тензора напряжений, учитывающие кривизну дефекта, сингулярные и регулярные члены разложения, в то время как ранее учитывались только сингулярные члены. При оценке максимального главного напряжения в вершине дефекта, оказывающего существенное влияние на критерии разрушения, различие значений, полученных по формулам для трещины и эллипса, составляет более 50 %. На расстоянии от вершины дефекта, равном 10 радиусам кривизны, указанное выше различие вдоль большой оси дефекта составляет не менее 10 %.

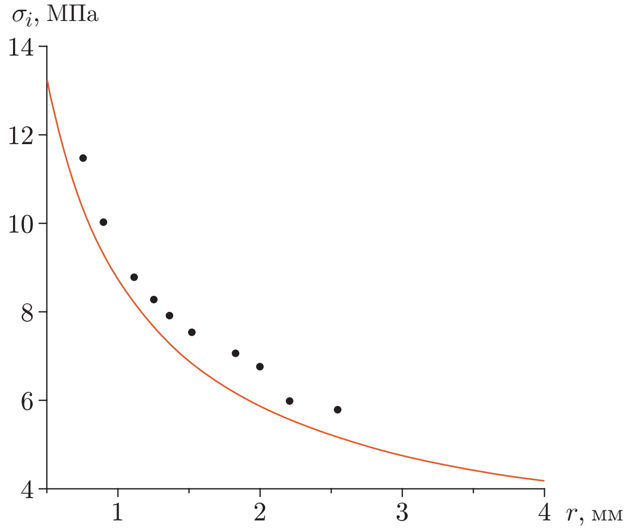

Рис. 5

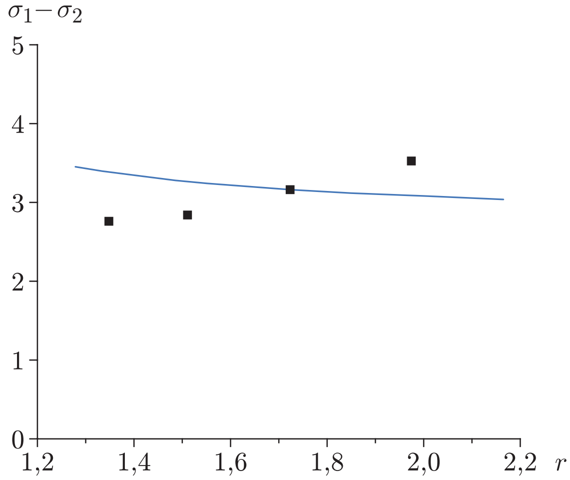

Рис. 6

Рис. 5. Экспериментальная (точки) и теоретическая (линия) зависимости интенсивности напряжений σ_i от расстояния от вершины дефекта

Рис. 6. Экспериментальная (точки) и теоретическая (линия) зависимости разности главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$ от расстояния от вершины дефекта

В случае если в формулах для напряжений отбрасываются регулярные члены, возможно появление ошибок при расчетах конструкций с трещиноподобными дефектами и их хрупкое разрушение.

С использованием формулы (6.1) для главных напряжений σ_1, σ_2 получена формула для определения интенсивности напряжений σ_i по картинам АРХ [13]:

$$\sigma_i^2 = \frac{(a^2 + ab + b^2)N_1^2 - (a^2 - 4ab + b^2)N_1 N_2 + (a^2 + ab + b^2)N_2^2}{(a^2 - b^2)^2}. \tag{6.8}$$

На рис. 5 приведены зависимости интенсивности напряжений σ_i от расстояния r, вычисленные по формуле (6.8) (точки) и формуле (2.2) (линия). Различие полученных значений составляет 10 %.

На рис. 6 представлены зависимости разности главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$ от расстояния r, вычисленные по формуле (1.7) (линия) и соотношениям (4.1) (точки).

Результаты теоретических исследований, проведенных в данной работе, согласуются с экспериментальными данными [14] для ферритно-перлитных сталей и моделью хрупкого разрушения [15].

В [16] с использованием точных формул проведено исследование влияния регулярных членов на напряженно-деформированное состояние (σ_1, σ_i и КИН) при двухосном нагружении пластины с наклонным эллиптическим вырезом.

Заключение. В работе получены формулы для компонент тензора напряжений, главных напряжений, интенсивности напряжений, максимального касательного напряжения, суммы и разности главных напряжений с регулярными членами для трещиноподобного дефекта с радиусом кривизны ρ при двухосном растяжении пластины.

Методом голографической интерферометрии получены экспериментальные значения интенсивности напряжений σ_i и разности напряжений $\sigma_y - \sigma_x$ и коэффициентов для поправочных функций, используемых для вычисления КИН.

В случае центрального эллиптического отверстия с радиусом кривизны $\rho = 0{,}15$ мм экспериментальные значения σ_1, определенные методом голографической интерферометрии, согласуются с расчетными значениями с погрешностью, равной 6 %, значения интенсивности напряжений σ_i — с погрешностью 10 %, значения $K_{\rm I}$ — с погрешностью 4 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Creager M., Paris P.** Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking // Intern. J. Fracture Mech. 1967. V. 4, N 3. P. 247–252.
2. **Панасюк В. В.** Механика квазихрупкого разрушения. Киев: Наук. думка, 1991.
3. **Williams M. L.** On the stress distribution at the base of a stationary crack // J. Appl. Mech. 1957. V. 24, N 1. P. 109–114.
4. **Eftis J., Subramonian N., Liebowitz H.** Crack border stress and displacement equations revisited // Engng Fracture Mech. 1977. V. 9, N 1. P. 189–210.
5. **Красовский А. Я.** Хрупкость металлов при низких температурах. Киев: Наук. думка, 1980.
6. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
7. **Остсемин А. А., Уткин П. Б.** Теоретические и экспериментальные исследования по механике разрушения трещиноподобных дефектов при двухосном нагружении // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 2. С. 130–142.
8. **Остсемин А. А., Уткин П. Б.** Применение критериев упругопластической механики разрушения при оценке свойств сварных соединений // Вопр. материаловедения. 2007. № 3. С. 151–160.
9. **Etheridge J. M., Dalley J. W.** A critical review of methods for determining stress-intensity factors from isochromatic fringes // Exp. Mech. 1977. V. 17, N 7. P. 248–254.
10. **Doyle J. F., Kamle S., Takezaku J.** Error analysis of photoelasticity in fracture mechanics // Exp. Mech. 1981. V. 21, N 11. P. 429–435.
11. **Остсемин А. А.** Определение напряженного состояния и коэффициентов интенсивности напряжений трещиноподобных дефектов методом голографической интерферометрии // Вестн. машиностроения. 2009. № 8. С. 13–19.
12. **Александров А. Я.** Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела / А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов. М.: Наука, 1973.
13. **Остсемин А. А., Денискин С. А., Ситников Л. Л. и др.** Определение напряженного состояния тел с дефектами методом голографической фотоупругости // Пробл. прочности. 1982. № 10. С. 77–81.
14. **Malkin J., Tetelman A. S.** Relation between $K_{\rm I c}$ and microscopic strength for low alloy steels // Engng Fracture Mech. 1971. V. 3, N 2. P. 151–167.
15. **Ritche R. O., Knott G. F., Rice J. R.** On the relation between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel // J. Mech. Phys. Solids. 1973. V. 21, N 6. P. 395–410.
16. **Остсемин А. А., Уткин П. Б.** Напряженно-деформированное состояние наклонного эллиптического дефекта в пластине при ее двухосном нагружении // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 2. С. 115–127.

Поступила в редакцию 18/III 2013 г.,
в окончательном варианте — 28/XII 2013 г.