Из этого выражения и из анализа формулы перехода (2.7) видно, как симметрии Ли — Беклунда для уравнений Кортевега — де Вриза и Бюргерса переходят в неудовлетворяющую условию обрыва ряда формальную симметрию (7.2) для уравнения (7.1).

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства уравнений механики // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.— М.: Наука, 1972.
3. **Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.** Приближенные симметрии // Мат. сб.— 1988.— Т. 136, № 4.
4. **Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.** Приближенный групповой анализ нелинейного уравнения $u_{tt} - (f(u)u_x)_x + \varepsilon\varphi(u)u_t = 0$ // Дифференц. уравнения.— 1988.— № 7.
5. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике.— М.: Наука, 1983.
6. **Rosales R. R.** Exact solutions of some non-linear evolution equations // Stud. Appl. Math.— 1978.— V. 59.— P. 117.
7. **Flato M., Pinczon G., Simon J.** Non-linear representations of Lie groups // Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. Paris.— 1977.— V. 10, N 4.
8. **Taflin E.** Analytic linearization of the Korteweg — de Vries equation // Pacif. J. Math.— 1983.— V. 108, N 1.


*Поступила 12/IX 1988 г.*

---

УДК 519.6

# КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

*С. К. Годунов*

(*Новосибирск*)

В классической линейной теории управления подробно изучается возможность подбора управления $u(t)$, которое позволило бы получить то или иное оптимальное поведение траектории $x(t)$, описываемой системой

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t). \tag{1}$$

При этом обычно предполагается возможность получения информации о поведении траектории только по вектору наблюдения $z(t) = Cx(t)$. Ограничимся рассмотрением частного, но важного и во многом типичного случая не зависящих от времени $t$ матриц $A$, $B$, $C$. Широко используются (см., например, [1—3]) понятия управляемости пары $A$, $B$ и двойственное к нему понятие наблюдаемости пары $A$, $C$, а также двойственные друг другу понятия стабилизируемости пары $A$, $B$ и детектируемости пары $A$, $C$. (Если $A$, $B$ управляема или стабилизируема, то $A^*$, $B^*$ наблюдаема или детектируема, и наоборот.)

Приведем критерии (необходимые и достаточные) управляемости и стабилизируемости. Пара $A$, $B$ управляема, если линейная оболочка столбцов составной матрицы

$$(B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \ldots \vdots A^{N-1}B) \tag{2}$$

имеет максимально возможный ранг $N$. Здесь $N$ — размерность пространства, в котором действует оператор, задаваемый $N \times N$ матрицей $A$. Пара $A$, $B$ стабилизируема, если линейная оболочка столбцов матрицы (2) содержит все инвариантные корневые подпространства, отвечающие точкам спектра, не лежащим строго в левой полуплоскости.

Следствием этих критериев является утверждение: пара $A$, $B$ управляема тогда и только тогда, когда обе пары $A$, $B$ и $-A$, $B$ стабилизируемы. Приведенные факты позволяют при обсуждении вопроса о выработке количественных характеристик степеней управляемости, стабилизируемости, наблюдаемости, детектируемости ограничиться разбором только проблемы стабилизируемости.

Очевидно, что возможные управления $Bu(t)$, по существу, определяются лишь подпространством, совпадающим с линейной оболочкой векторов, координаты которых образуют столбцы $B$. Любой вектор этого подпространства представим в виде $Bu = B(B^*B)^{-1}B^*\lambda$ ($\lambda$ — $N$-мерный вектор, $B(B^*B)^{-1}B^*$ — ортогональный проектор). Если вычисление проектора по заданной матрице $B$ вызывает затруднение, что проявляется в случае плохой обусловленности $B$, то это указывает на то, что в данном случае пространство управляющих векторов $Bu$ может существенно меняться при несущественных изменениях $B$, т. е. указывает на то, что пространство управляющих векторов не будет надежно определенным. Мы ограничимся изучением стабилизируемости при устойчиво заданном описании возможных управлений, когда проектор $B(B^*B)^{-1}B^*$ предполагается известным или хотя бы вычислимым без каких-либо затруднений.

Кроме того, предполагается, что единица измерения времени $t$ в модельной системе, по исследованию которой делается вывод о том, можно ли считать пару $A$, $B$ стабилизируемой, выбрана так, что $A$ превращается в матрицу единичной нормы. Иными словами, вместо исходной системы (1) предлагаем рассмотреть систему $\frac{d}{d\tau}\, y(\tau) = A_0 y(\tau) + Bv(\tau)$, в которой

$$\tau = \|A\| t, \quad A_0 = \frac{1}{\|A\|} A, \quad v(\tau) = \frac{1}{\|A\|} u(\|A\| t), \quad y(\tau) = x(\|A\| t).$$

Выяснение вопроса о том, стабилизируемы ли пары $A$, $B$ или $A_0 = (1/\|A\|)A$, $B$, сводится (см. [1—3]) к проверке, можно ли для каждого $N$-мерного вектора $\varphi$ определить такое $v(\tau)$, чтобы решение задачи Коши $dy(\tau)/d\tau = A_0 y(\tau) + Bv(\tau)$, $y(0) = \varphi$ имело конечный интеграл

$$(3)\qquad \int_0^\infty (\|y(\tau)\|^2 + \|Bv(\tau)\|^2)\, d\tau = \frac{1}{\|A\|} \int_0^\infty (\|A\|^2 \|x(t)\|^2 + \|Bu(t)\|^2)\, dt < \infty.$$

Если система стабилизируема, то существует единственное управление $Bv(\tau)$, при котором этот интеграл принимает минимально возможное значение. Для построения такого управления нужно построить решение гамильтоновой системы

$$(4)\qquad \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|A\|} A & B(B^*B)^{-1}B^* \\ I_N & -\frac{1}{\|A\|} A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{pmatrix},$$

имеющее заданное значение $y(0) = \varphi$, и положить $Bv(\tau) = B(B^*B)^{-1}B^*\lambda(\tau)$. В случае стабилизируемости $A$, $B$ такое решение существует и единственно, если оно удовлетворяет требованию $\|y(\tau)\| \to 0$, $\|\lambda(\tau)\| \to 0$ при $\tau \to \infty$. Справедливо и обратное утверждение. Из существования решения поставленной сейчас краевой задачи следует стабилизируемость пары $A$, $B$.

Как известно [4], спектр гамильтоновой матрицы

$$\mathscr{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|A\|} A & B\,(B^*B)^{-1}B^* \\ I_N & -\frac{1}{\|A\|} A^* \end{pmatrix},$$

т. е. множество корней уравнения $\det(\mathscr{H} - \mu I_{2N}) = 0$ расположено симметрично относительно начала координат. Для каждого характеристического корня $\mu_j$ обязательно найдется симметричный корень $\mu_k = -\mu_j$ той же кратности. Возможность найти убывающее решение $y(\tau)$, $\lambda(\tau)$ при любом $N$-мерном $y(0) = \varphi$ означает, что число корней, лежащих строго в левой полуплоскости, не должно быть меньше $N$. Из приведенной выше

ооремы Пуанкаре о симметрии спектра гамильтоновой матрицы выте-
ает, что для стабилизируемости необходимо отсутствие чисто мнимых
арактеристических корней у $\mathscr{H}$, или, что то же самое, конечность пара-
этра $\varkappa(\mathscr{H})$, характеризующего «качество дихотомии» спектра $\mathscr{H}$ мнимой
сью. Этот параметр введен в [5, 6], где определялся как норма $\varkappa(\mathscr{H}) =$
$||H||$ эрмитовой положительно определенной матрицы $H$, вычисляе-
ой через $\mathscr{H}$ одним из следующих интегралов:

$$H = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\mathscr{H}^* + itI_{2N}]^{-1}[\mathscr{H} - itI_{2N}]^{-1}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}G^*(t)\,G(t)\,dt.$$

десь $G(t)$ — матрица Грина — ограниченное при $-\infty < t < +\infty$ реше-
ие матричного дифференциального уравнения $\frac{d}{dt}G(t) = \mathscr{H}G(t) + \delta(t)\,I_{2N}$.

В [5—7] показано, что расчет проекторов на инвариантные под-
ространства $\mathscr{H}$, отвечающие частям спектра в левой и правой комплекс-
ой полуплоскости, сводится к расчету соответственно $G(+0), -G(-0)$,
оторые такими проекторами и являются. Скорость сходимости итераций
процессе расчета определяется величиной $\varkappa(\mathscr{H})$, и сходимость тем бо-
е быстрая, чем меньше $\varkappa$. При очень больших значениях этого парамет-
а естественно отказаться от проведения расчета, констатировав практи-
ское отсутствие дихотомии спектра $\mathscr{H}$. Чрезвычайно важно, что степень
стойчивости $G(\pm 0)$ по отношению к малым возмущениям $\mathscr{H}$ также оце-
ивается через $\varkappa(\mathscr{H})$. Итак, конечность $\varkappa(\mathscr{H})$ — необходимое условие для
абилизируемости пары $A$, $B$.

Любая убывающая при $\tau \to +\infty$ траектория $y(\tau)$, $\lambda(\tau)$ — решение
стемы (4) — представима при $\tau > 0$ в виде

$$\begin{pmatrix} y(\tau) \\ \lambda(\tau) \end{pmatrix} = G(\tau)\begin{pmatrix} y(0) \\ \lambda(0) \end{pmatrix} = e^{\tau\mathscr{H}}G(+0)\begin{pmatrix} y(0) \\ \lambda(0) \end{pmatrix},$$

е $\lambda(0)$ находится по заданному $y(0) = \varphi$ как решение векторного
авнения

$$G(-0)\begin{pmatrix} \varphi \\ \lambda(0) \end{pmatrix} = 0.$$

метим (см., например, [5, 7]), что процесс расчета проекторов $G(+0)$,
$G(-0)$ может быть дополнен несложной процедурой вычисления $H$ и
$\mathscr{H}) = ||H||$.

Возможность однозначно решить уравнение (5), выразив $\lambda(0)$ через $\varphi$:

$$\lambda(0) = K\varphi,$$

есте с конечностью параметра $\varkappa(\mathscr{H})$, которая обеспечивает возможность
счета $G(\pm 0)$, является необходимым и достаточным условием стабили-
руемости пары $A$, $B$. Норма $\sqrt{1 + ||K||^2}$ отображения

$$\varphi \to \begin{pmatrix} y(0) \\ \lambda(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ K\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_N \\ K \end{pmatrix}\varphi,$$

торую будем считать бесконечной, если $\lambda(0)$ не может быть однозначно
йдено из (5) хотя бы при некоторых $\varphi$, может рассматриваться как ха-
ктеристика устойчивости решения $y(0)$, $\lambda(0)$ по отношению к малым воз-
щениям $\varphi$. Оптимальное управление, минимизирующее интеграл (3),
этся формулами обратной связи

$$\lambda(\tau) = Ky(\tau),\ Bv(\tau) = B(B^*B)^{-1}B^*y(\tau).$$

Наше предложение состоит в том, чтобы из $\varkappa(\mathscr{H})$, $\sqrt{1 + ||K||^2}$
онструировать величину, конечность которой обеспечивает конечность
их двух параметров, а следовательно, и осуществимость построения
абилизирующего управления. Обозначим эту величину, характеристику
абилизируемости, через Stab $[A, B]$.

Например, положив

$$\mathrm{Stab}\,[A, B] = \frac{100}{\max\{\sqrt{\varkappa(\mathscr{H})},\ \sqrt{1+\|K\|^2}\}}$$

и пользуясь тем, что $\varkappa(\mathscr{H}) \geqslant 1$, $1 + ||K||^2 \geqslant 1$, всегда будем имет Stab $[A,\ B] \leqslant 100$, характеризуя «степень стабилизируемости» как б в процентах. Возможны и другие предложения по виду формулы, выра жающей Stab $[A,\ B]$ через $\varkappa(\mathscr{H})$ и $||K||$.

Необходимость введения числовых характеристик степеней стабили зируемости, управляемости, детектируемости и наблюдаемости стала ясн в процессе анализа систем управления при помощи численных методс линейной алгебры, дающих результат с гарантированной оценкой то ности. Обзору проблем, возникающих при разработке таких методов, п священа работа [6].

Автор благодарен А. Я. Булгакову и В. М. Гордиенко за дискусси в процессе которых возникли соображения, изложенные в настояще работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Унонем.** Линейные многомерные системы управления.— М.: Наука, 1980.
2. **Справочник** по теории автоматического управления/Под ред. А. А. Красовского.- М.: Наука, 1987.
3. **Первозванский А. А.** Курс теории автоматического управления.— М.: Наука, 198
4. **Якубович В. А., Старжинский В. М.** Параметрический резонанс в линейных сист мах.— М.: Наука, 1987.
5. **Годунов С. К.** Задача о дихотомии спектра матрицы // Сиб. мат. журн.—1986.- Т. 27, № 5.
6. **Годунов С. К.** Проблема гарантированной точности в численных методах лине ной алгебры // Proc. Intern. Cong. of Mathematicians.— Berkeley, California, US 1986.— V. 2.
7. **Малышев А. Н.** Вычисление инвариантных подпространств регулярного линейно пучка матриц.— Новосибирск, 1988.— (Препр./Ин-т математики СО АН ССС № 6).

*Поступила 29/VII 1988 г.*

---

УДК 532.516

# АСИМПТОТИКА ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ ОТ САМОДВИЖУЩЕГОСЯ ТЕЛА

*В. В. Пухначев*

(*Новосибирск*)

Рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости вне огр ниченного тела в трехмерном пространстве. На поверхности тела задано распреде ние скорости жидкости с нулевым суммарным расходом через эту поверхность. На б конечности вектор скорости стремится к ненулевому постоянному вектору. На жи кость могут действовать внешние массовые силы, достаточно быстро убывающие удалением от тела. Требуется, чтобы полный импульс, вносимый в жидкость гран цей обтекаемого тела и массовыми силами, равнялся нулю. Перечисленные услов формируют краевую задачу для уравнений Навье — Стокса, которую назовем за чей безымпульсного обтекания или задачей обтекания самодвижущегося те Строится асимптотика решения данной задачи на больших расстояниях от тела предположении, что это решение существует. Эта асимптотика имеет существенн отличия от асимптотики решения классической задачи обтекания буксируемо тела [1—3].

**1. Постановка задачи.** Сформулируем задачу безымпульсного об кания тела вязкой жидкостью. Пусть $\Sigma$ — гладкая замкнутая поверхнос в $\mathbf{R}^3$, $\Omega$ — внешняя по отношению к $\Sigma$ область. Рассмотрим в этой облас стационарную систему уравнений Навье — Стокса и неразрывности

$$\Delta\mathbf{u} - 2\,\partial\mathbf{u}/\partial x_1 - \nabla p = 2\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathbf{g}(x),\quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{1.1}$$