ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабушкин Г. А., Буланов В. Я. и др.** Реакционный вклад в относительную прочность сцепления порошкового покрытия с подложкой.— ЖТФ, 1982, т. 52, вып. 1.
2. **Бабушкин Г. А., Буланов В. Я., Соловьев Л. В.** Диффузионно-кинетический механизм сцепления порошкового покрытия с подложкой.— ЖТФ, 1983, т. 53, вып. 3; Диффузионно-кинетический механизм сцепления порошкового покрытия с подложкой (общие и предельные соотношения).— В кн.: Теоретические исследования и практическое применение плазменных износостойких покрытий. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984.
3. **Бабушкин Г. А.** Флуктуационный метод расчета абсолютной величины энергии сцепления двух сред.— Материалы Всесоюз. научн. конф. «Исследование и разработка теоретических проблем в области порошковой металлургии и защитных покрытий». Минск, 1984.
4. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
5. **Бабушкин Г. А.** Диффузия из тонкого слоя в два полубесконечных образца с разными характеристиками.— ИФЖ, 1984, т. 47, № 2.
6. **Бокштейн Б. С.** Диффузия в металлах. М.: Металлургия, 1978.
7. **Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.** Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972.
8. **Кудинов В. В.** Плазменные покрытия. М.: Наука, 1977.
9. **Губанов А. И.** Теория стыковки двух кристаллов в композите.— Механика композит. материалов, 1979, вып. 4.

Поступила 19/XII 1983 г.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТОНКИХ ТЕЛ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

М. В. КАВЛАКАН

(Новосибирск)

В работе рассматривается решение смешанной статической задачи для бесконечных струны, мембраны и пластины, частично опертых на упругое основание. Смешанный характер задачи состоит в том, что на одной части тела нагрузка задана, а на другой — равна реакции упругого основания, неизвестной до решения задачи. Эта реакция пропорциональна нормальному перемещению тела (гипотеза Винклера — Фусса). Ниже используется метод, с помощью которого в [1] решена упругая задача о полупространстве, частично опирающемся на упругое основание.

Считаем, что внешняя нагрузка приложена в ограниченной области V; область, лежащую на упругом основании, обозначим P.

1. Струна на упругом основании. Пусть струна расположена вдоль оси OX, область V занимает отрезок $|x| < a$, область P расположена вдоль полупрямых $|x| > a$. Смещения w струны удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d^2w/dx^2 = p(x),\ x \in V; \tag{1.1}$$

$$d^2w/dx^2 = \lambda w(x),\ x \in P, \tag{1.2}$$

где $p(x)$ — заданная суммарная функция нагрузки в области V; $\lambda > 0$ — жесткость упругого основания (коэффициент постели). К уравнениям (1.1), (1.2) необходимо добавить условие на бесконечности $w(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ и условия сопряжения решений в точках $x = \pm a$

$$w_+(\pm a) = w_-(\pm a),\ (dw/dx)_+(\pm a) = (dw/dx)_-(\pm a), \tag{1.3}$$

где индексы + и — обозначают предельные значения при стремлении к точке $x = \pm a$ из областей P и V соответственно.

Сведем задачу (1.1)—(1.3) к интегральному уравнению с помощью специально выбранного фундаментального решения. Фундаментальное решение с неизвестной пока плотностью распределения $\beta(\xi)$ ищется как решение уравнения

$$d^2w/dx^2 = \lambda w(x) + \beta(\xi)\delta(x - \xi),\ -\infty < x < \infty,\quad w(x) \to 0 \text{ при } |x| \to \infty, \tag{1.4}$$

где $\delta(x - \xi)$ — дельта-функция Дирака. Физический смысл задачи (1.4) состоит в том, что ищется прогиб бесконечной струны, лежащей на упругом основании и нагруженной в точке $x = \xi$ сосредоточенной силой $\beta(\xi)$. Решение задачи (1.4) легко получить с помощью преобразования Фурье

$$w(x) = -\frac{\beta(\xi)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iq(x-\xi)}dq}{\lambda + q^2} = -\frac{\beta(\xi)\,e^{-\sqrt{\lambda}|x-\xi|}}{2\sqrt{\lambda}} = -\frac{\beta(\xi)\,G(x-\xi)}{\lambda}. \tag{1.5}$$

На основании принципа суперпозиции решение (1.5), проинтегрированное по ξ в области V, удовлетворяет уравнению (1.2) при $x \in P$. Удовлетворяя (1.1), получим уравнение на плотность β

$$\beta(x) = p(x) + \int_V \beta(\xi) G(x-\xi)\, d\xi, \qquad x \in V. \tag{1.6}$$

Физический смысл функции G состоит в том, что она представляет собой реакцию бесконечной струны на упругом основании на единичную сосредоточенную силу. После определения функции β из уравнения (1.6) прогибы струны определяются по формуле

$$w(x) = -\frac{1}{\lambda} \int_V \beta(\xi) G(x-\xi)\, d\xi, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1.7}$$

Формулы (1.6), (1.7) остаются справедливыми и в случае, когда V — произвольная ограниченная область. Из представления (1.7) следует, что $w(x)$ удовлетворяет условиям сопряжения (1.3). Если $x \in V$, то на основании (1.6), (1.7) прогиб w удобнее вычислять из соотношения

$$p(x) = \beta(x) + \lambda w(x). \tag{1.8}$$

Рассмотрим более подробно свойства интегрального оператора K в правой части (1.6). Ядро G этого интегрального оператора положительно и $\int_{-\infty}^{\infty} G(t)\, dt = 1$. Физический смысл последнего равенства заключается в том, что реакция упругой заделки равна приложенной внешней силе. Используя отмеченные свойства ядра и считая, что область V ограничена, получим [2]

$$\|K\| = \max_{x \in V} \int_V G(x-\xi)\, d\xi < \int_{-\infty}^{\infty} G(t)\, dt = 1, \tag{1.9}$$

где $\|K\|$ здесь и далее обозначает норму оператора K, действующего в пространстве суммируемых функций $L_1(V)$ или функций $C(V)$, непрерывных в замыкании V. Если $p \in L_1(V)(p \in C(V))$, то неравенство (1.9) позволяет представить решение уравнения (1.6) в виде ряда Неймана, нормально сходящегося в $L_1(V)$ (в $C(V)$), и на основании принципа сжатых отображений [2] утверждать, что полученное решение единственно в $L_1(V)$ (в $(C(V))$. Условие (1.9) позволяет также находить решение (1.6) с помощью метода последовательных приближений. При этом полученные приближения будут являться частичными суммами ряда Неймана. Возможность использования метода последовательных приближений очень удобна в вычислительном плане для случая, когда область V неодносвязна.

Рассмотрим некоторые свойства решения задачи (1.1)—(1.3).

А. Если $p(x) > 0$ при $x \in V$, то $\beta(x) > 0$ и на основании (1.8) $w(x) < 0$ в области P и монотонно стремится к нулю при $|x| \to \infty$. Это легко следует из свойств ядра и представления (1.6)—(1.8).

Б. Обозначим реакцию упругого основания в области P аналогично внешней силе $p(x) = \lambda w(x)$, $x \in P$. Пусть нагрузка $p(x)$, $x \in V$, такова, что существует $p_+(s) = \lim_{x \to s} p(x)$, $x \in V$, где s — точка, лежащая на границе раздела Γ областей P и V. В силу свойств полученного решения существует $p_-(s) = \lim_{x\to s} p(x)$, $x \in V$, $s \in \Gamma$. Тогда из (1.6) и (1.7) следует формула скачка

$$p_+(s) - p_-(s) = \beta(s), \quad \beta(s) = \lim_{x \to s} \beta(x), \quad x \in V, \quad s \in \Gamma. \tag{1.10}$$

Соотношение (1.10) является следствием уравнения (1.8) и первого условия (1.3). Наиболее важным следствием формулы скачка является условие непрерывности функции $p(x)$ в точках $\pm a$: $\beta(s) = 0$, $s = \pm a$.

Свойства решения аналогичны полученным в [1]. Однако возможность получить решение в конечных выражениях для струны позволяет переформулировать условие непрерывности $p(x)$ при переходе через границу Γ в величинах известных априори. Обозначим

$$q(x) = \int_{-a}^{x} \int_{-a}^{\eta} p(\xi)\, d\xi d\eta \qquad \int_{-a}^{x} p(\xi)(x-\xi)\, d\xi,$$

$$A_1 = -\frac{q'(a) + \sqrt{\lambda}\, q(a)}{2(1 + a\sqrt{\lambda})}, \quad A_0 = -\frac{q'(a) + \sqrt{\lambda}\, q(a)}{2\sqrt{\lambda}}$$

(штрихи означают дифференцирование). По определению $p(x)$ в области P имеем

$$p(x) = \lambda w(x) = -\lambda(q(x) + A_1 x + A_0)$$

и условие непрерывности $p(x)$ принимает вид

(1.11) $$p_+(s) - \lambda(q(s) + A_1 s + A_0) = 0, \ s = \pm a.$$

Условие (1.11) можно упростить, используя симметрию $p(x)$. В случае четной (нечетной) функции $p(x)$ условие непрерывности имеет вид

$$p_+(s) - \lambda \int_{-a}^{s} p(\xi)(s-\xi)\,d\xi + \frac{\sqrt{\lambda}(1+\sqrt{\lambda}(s+a))}{2} \int_{-a}^{a} p(\xi)\,d\xi = 0$$

$$\left(p_+(s) - \lambda \int_{-a}^{s} p(\xi)(s-\xi)\,d\xi - \frac{\lambda(1+\sqrt{\lambda}(s+a))}{2(1+a\sqrt{\lambda})} \int_{-a}^{a} \xi p(\xi)\,d\xi = 0\right), \quad s = \pm a.$$

Равенство (1.11) накладывает ограничение на известную функцию $p(x)$ из уравнения (1.1).

2. Мембрана на упругом основании. Пусть мембрана занимает плоскость OXY. В этом случае вместо (1.1)—(1.3) имеем

(2.1) $$\Delta w = p(x, y), \ (x, y) \in V;$$

(2.2) $$\Delta w = \lambda w, \ (x, y) \in P,$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа. К уравнениям (2.1), (2.2) необходимо добавить условия на бесконечности

(2.3) $$w(x, y) \to 0 \text{ при } r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$$

и условия на границе Г раздела областей P и V

(2.4) $$w_+ = w_-, \ (\partial w/\partial n)_+ = (\partial w/\partial n)_-.$$

Индексы +, — имеют тот же смысл, что в п. 1; $\partial/\partial n$ — производная по нормали к Г.

Для решения поставленной задачи (2.1)—(2.4) воспользуемся решением вспомогательной задачи

(2.5) $$\Delta w = \lambda w(x, y) + \beta(\xi, \eta)\delta(x-\xi, y-\eta), \ r \geqslant 0,$$
$$w \to 0, \ r \to \infty,$$

где $\delta(x-\xi, y-\eta)$ — дельта-функция Дирака. Физический смысл задачи (2.5) состоит в том, что ищется прогиб мембраны, занимающей всю плоскость OXY и полностью лежащей на упругом основании, нагруженной при этом в точке (ξ, η) сосредоточенной силой $\beta(\xi, \eta)$.

Решение задачи (2.5) ввиду осевой симметрии легко получить с помощью преобразования Ханкеля:

(2.6) $$w(x, y) = -\frac{\beta(\xi, \eta)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{tJ_0(\rho t)\,dt}{\lambda + t^2} = -\frac{\beta(\xi, \eta)}{2\pi} K_0(\rho\sqrt{\lambda}) = -\frac{\beta(\xi, \eta)\,G(\rho)}{\lambda},$$
$$\rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

где

(2.7) $$K_0(x) = -\ln\frac{x}{2} I_0(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x^i}{2^i i!}\right)^2 \psi(i+1)$$

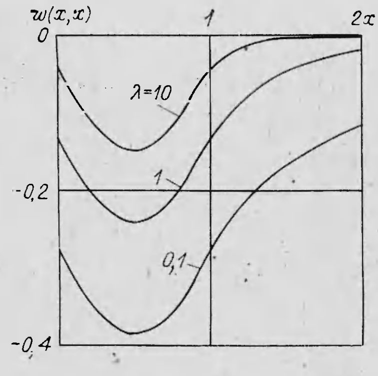
— функция Макдональда [3]; $\psi(i+1) = -0{,}577215 + \sum_{n=1}^{i} \frac{1}{n}$ — пси-функция Эйлера. Физический смысл G тот же, что в задаче о струне (п. 1).

Пусть $(\xi, \eta) \in V$, тогда, если $\beta(\xi, \eta) = 0$ при $(\xi, \eta) \in P$, фундаментальное решение (2.7) удовлетворяет уравнению (2.2) в области P. Возьмем суперпозицию фундаментальных решений (2.6) таким образом, чтобы удовлетворить уравнению (2.1). Получим интегральное уравнение на плотность β

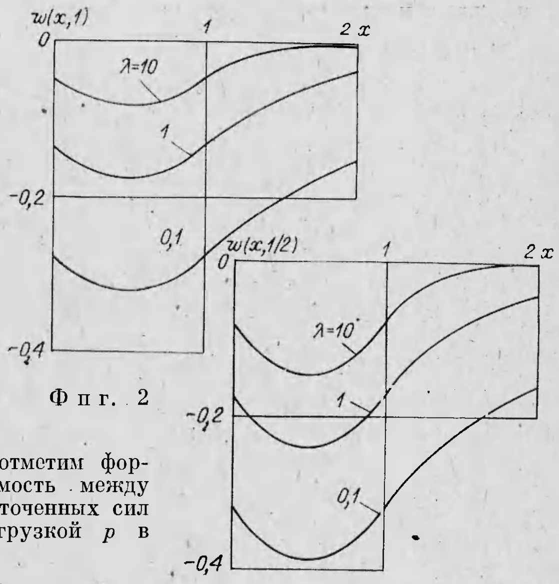
(2.8) $$\beta(x, y) - \iint_V \beta(\xi, \eta)\,G(\rho)\,d\xi d\eta = p(x, y), \qquad (x, y) \in V$$

и интегральное представление для решения задачи (2.1)—(2.4)

(2.9) $$w(x, y) = -\frac{1}{\lambda} \iint_V \beta(\xi, \eta)\,G(\rho)\,d\xi d\eta, \qquad -\infty < x, y < \infty.$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Как следствие формул (2.8), (2.9) отметим формулу, представляющую зависимость между плотностью распределения сосредоточенных сил β, смещением w и заданной нагрузкой p в области V:

$$p(x, y) = \beta(x, y) + \lambda w(x, y), \quad (x, y) \in V. \tag{2.10}$$

Перечислим свойства ядра G, необходимые в дальнейшем:

$$G(\rho) > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int G(\rho)\, d\xi d\eta = 1.$$

Для доказательства последнего равенства достаточно перейти к полярным координатам и воспользоваться формулой 6.521.2 [3]. Механический смысл этого соотношения тот же, что в случае струны. В отличие от случая струны ядро G имеет в нуле логарифмическую особенность (см. (2.7)).

Эти свойства ядра позволяют буквально повторить вывод почти всех свойств решения аналогично случаю струны п. 1, начиная с формулы (1.9). Разница лишь в том, что условие непрерывности $p(x, y)$ при переходе через границу Γ не удается выписать в явном виде.

Ввиду того что уравнение (2.8) в случае, когда область V ограничена, допускает решение методом последовательных приближений, представляется возможным численное решение задачи (2.1)—(2.4) для достаточно сложной конфигурации области V. Таким образом, решение (2.8) практически сводится к вычислению для $(n + 1)$-й итерации выражений вида $\int\int_V \beta_n(\xi, \eta)\, G(\rho)\, d\xi d\eta + p(x, y)$. После решения уравнения (2.8) с достаточной точностью прогибы мембраны w определяются по формуле (2.9) (для области V удобнее воспользоваться формулой (2.10)).

Чтобы проиллюстрировать возможности метода, задача (2.1)—(2.4) была решена численно в случае, когда область V представляет квадрат $0 < x, y < 1$. Нагрузка $p(x, y)$ в области V полагалась постоянной (не ограничивая общности, ее можно считать единицей).

На фиг. 1 приведены эпюры прогибов мембраны вдоль прямой $y = x$ $(x \geqslant 0)$, а на фиг. 2 — вдоль прямых $y = 1$, $y = 1/2$ $(x \geqslant 0)$. Для распределения прогибов характерно то, что, достигая экстремума при $x = 1/2$, $y = 1/2$, они монотонно возрастают до нуля на бесконечности. С помощью фиг. 1 и 2 легко получить реакцию упругого основания в точках, где приведены прогибы. Для этого достаточно домножить значения прогиба на жесткость λ упругого основания.

3. Пластина на упругом основании. Сохраняя обозначения и предположения, принятые в задаче о мембране (п. 2), рассмотрим задачу о пластине, частично лежащей на винклеровом упругом основании. Имеем

$$\Delta^2 w = -p(x, y), \quad (x, y) \in V; \tag{3.1}$$

$$\Delta^2 w = -\lambda w, \quad (x, y) \in P, \tag{3.2}$$

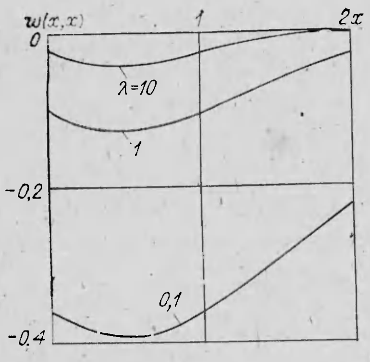
где $\Delta^2 = \partial^4/\partial x^4 + 2\partial^4/\partial x^2 \partial y^2 + \partial^4/\partial y^4$ — бигармонический оператор, условие на бесконечности $w(x, y) \to 0$ при $r \to \infty$ и условие на границе Γ раздела областей P и V

$$w_+ = w_-, \quad (\partial^k w/\partial n^k)_+ = (\partial^k w/\partial n^k)_-, \quad k = 1, 2, 3. \tag{3.3}$$

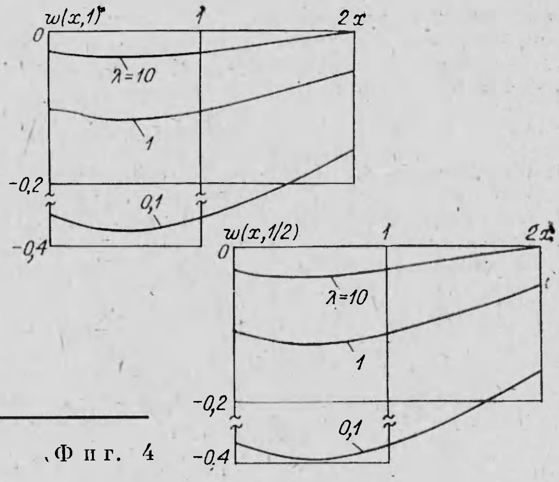
Аналогично п. 1, 2 рассмотрим решение вспомогательной задачи

$$\Delta^2 w = -\lambda w(x, y) + \beta(\xi, \eta)\delta(x - \xi, y - \eta), \quad r \geqslant 0, \tag{3.4}$$

$$w \to 0, \quad r \to \infty,$$



Ф и г. 3



Ф и г. 4

которое можно получить с помощью преобразования Ханкеля:

$$w(x, y) = +\frac{\beta(\xi, \eta)}{2\pi}\int_0^\infty \frac{tJ_0(\rho t)\,dt}{\lambda + t^4} = \frac{-\beta(\xi, \eta)}{2\pi\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{kei}\left(\rho\sqrt[4]{\lambda}\right) = +\frac{\beta(\xi, \eta)\,G(\rho)}{\lambda}$$

(kei (x) — функция Томсона [3]).

Произведем суперпозицию фундаментального решения, считая, что $(\xi, \eta) \in V$, $\beta(\xi, \eta) = 0$ для $(\xi, \eta) \in P$. Тогда уравнение (3.2) и условия (3.3) и на бесконечности выполняются в силу свойств фундаментального решения. Удовлетворяя уравнению (3.1), получим интегральное уравнение на плотность β

$$\beta(x, y) - \iint_V \beta(\xi, \eta)\,G(\rho)\,d\xi d\eta = -p(x, y), \quad (x, y) \in V. \tag{3.5}$$

Суперпозиция фундаментального решения по области V дает интегральное представление для решения задачи (3.1)—(3.3) во всей плоскости:

$$w(x, y) = +\frac{1}{\lambda}\iint_V \beta(\xi, \eta)\,G(\rho)\,d\xi d\eta, \quad -\infty < x,\ y < \infty. \tag{3.6}$$

Для области V аналогично задаче о мембране имеем соотношение

$$-p(x, y) = \beta(x, y) - \lambda w(x, y), \quad (x, y) \in V.$$

Таким образом, задача отыскания решения уравнений (3.1), (3.2) свелась к интегральному уравнению (3.5) относительно вспомогательной функции β, после решения которого решение исходной задачи определяется представлением (3.6).

В отличие от п. 2, 1 ядро G уравнения (3.5) является гладкой знакопеременной функцией, причем существует окрестность нуля, в которой $G > 0$. По-прежнему $\iint_{-\infty}^{\infty} G(\rho)\,d\xi d\eta = 1$, но отсюда уже нельзя вывести неравенство $\|K\| < 1$, которое лежит в основе исследований п. 2, 3. Это связано со знакопеременностью ядра.

Однако для достаточно малой области V неравенство $\|K\| < 1$ остается справедливым. Действительно, обозначим через ρ_0 такое число, что

$$-\mathrm{kei}(\xi) \geqslant 0 \text{ при } \xi < \rho_0, \quad -\int_0^{\rho_0} \xi\,\mathrm{kei}(\xi)\,d\xi = 1.$$

Выберем диаметр области V меньше $(1/2)\rho_0\lambda^{-1/4}$. Тогда

$$\|K\| = \max_{(x,y)\in V}\iint_V |G(\rho)|\,d\xi d\eta < \iint_{\{s^2+t^2\}\leqslant\rho_0^2/\sqrt{\lambda}} G(\omega)\,ds dt = -\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\int_0^{\rho_0}\xi\,\mathrm{kei}(\xi)\,d\xi = 1,$$

$$\omega = \sqrt{s^2 + t^2}.$$

Для таких областей V результаты п. 2, 1 сохраняют силу.

Когда область V представляет собой квадрат $0 < x,\ y < 1$, задача приведенным выше методом решалась численно для случая постоянной нагрузки в области V. При этом интегральное уравнение (3.5) решалось методом последовательных приближений. Результаты численных расчетов приведены на фиг. 3 и 4. На фиг. 3 представлено распределение функции w вдоль прямой $y = x$ ($x \geqslant 0$), а на фиг. 4 — вдоль прямой $y = 1$ и $y = 1/2$ ($x \geqslant 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кавлакан М. В., Михайлов А. М.** Решение смешанной статической задачи теории упругости для полупространства на упругом основании.— ДАН, 1980, т. 251, № 6.
2. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
3. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила 6/VII 1983 г.

УДК 539.375

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА В УПРУГОМ ТЕЛЕ

В. Г. НОВИКОВ, Б. М. ТУЛИНОВ

(Москва)

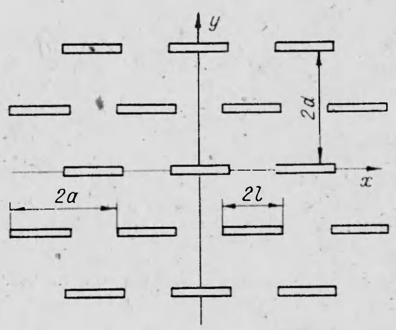
Задачи теории упругости для бесконечного изотропного тела, ослабленного двоякопериодической системой прямолинейных трещин, рассматривались в [1—11], где были сведены к численному решению сингулярного интегрального уравнения или бесконечной алгебраической системы. В данной работе построено аналитическое решение задачи для двоякопериодической системы прямолинейных трещин продольного сдвига, образующих ромбическую решетку. Получено выражение для макроскопического модуля сдвига среды с данной системой трещин.

1. Постановка и решение двоякопериодической задачи. Известно [12], что решения задач продольного сдвига сводятся к определению аналитической в области, занятой телом, функции $F(z)$, где $z = x + iy$. При этом компоненты напряжений σ_{xz}, σ_{yz} и смещение w определяются по формулам

$$\sigma_{xz} - i\sigma_{yz} = \mu_0 F(z); \; w = \operatorname{Re} f(z), \; F(z) = f'(z), \tag{1.1}$$

где μ_0 — модуль сдвига.

Пусть бесконечная упругая плоскость xOy ослаблена двоякопериодической системой прямолинейных разрезов, параллельных действительной оси. Предполагается, что основной параллелограмм периодов имеет форму ромба. Внутри параллелограмма периодов по диагонали расположен разрез (фиг. 1). На берегах разрезов задана одинаковая в конгруэнтных точках самоуравновешенная нагрузка



Ф и г. 1

$$\sigma_{yz} = -T(x), \; |x| < l, \; y = 0. \tag{1.2}$$

Обозначим $2g(x)$ разрыв смещения при переходе через разрез

$$2g(x) = w(x, +0) - w(x, -0), \; |x| \leqslant l.$$

Пусть приложенная нагрузка $T(x)$ является четной функцией координаты x. Тогда $T(x) = T(-x)$ и в силу симметрии функция $F(z)$ является четной двоякопериодической функцией. Можно показать [13, 14], что $F(z)$ выражается через производную функции $g(x)$ в виде

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^l \frac{g'(t) P'(t)\, dt}{P(t) - P(z)}, \tag{1.3}$$

где $P(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, а штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Из граничного условия (1.2) получаем для функции $g'(t)$ уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{g'(t) P'(t)\, dt}{P(t) - P(x)} = -\frac{T(x)}{\mu_0}. \tag{1.4}$$

Обозначая $P(t)$ под знаком интеграла в соотношении (1.4) через новую переменную, приводим уравнение (1.4) к задаче обращения интеграла типа Коши, решение