

ДВИЖЕНИЕ ГАЗА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОГО УДАРА ПО ЕГО ПОВЕРХНОСТИ (ПРИ ВЗРЫВЕ НА ПОВЕРХНОСТИ)

Ю. П. Райзер

(Москва)

Рассматривается движение газа, который вначале занимал полупространство, граничащее с пустотой, под действием сосредоточенного и нитевого ударов по поверхности или, что то же самое, при точечном и нитевом взрывах на поверхности. Задача о сосредоточенном ударе служит идеализированной моделью, описывающей начальную стадию распространения ударной волны при падении с большой скоростью метеорита на поверхность планеты, лишенной атмосферы, или при ударе микрометеорита о поверхность искусственного спутника. Она является двухмерным аналогом известной плоской задачи о кратковременном ударе. Рассматривается двухмерное атомодельное движение. Описана качественная картина движения и установлено общее ограничение на показатель атомодельности n в законе затухания ударной волны $p \sim M^{-n}$ (p — давление, M — масса, охваченная ударной волной). Получены приближенные решения задач, которые являются обобщением на двухмерные случаи точного решения одномерной, плоской задачи. Для сосредоточенного удара получено значение $n = 1.07$ при показателе адиабаты $\gamma = 1.205$. Для нитевого удара $n = 1.14$ при $\gamma = 1.266$.

1. Введение. При падении метеорита на поверхность планеты, лишенной атмосферы (при ударе микрометеорита о поверхность искусственного спутника), от места удара по грунту распространяется ударная волна, интенсивность которой уменьшается с течением времени. Если скорость удара достаточно велика — порядка нескольких десятков км/сек, то внутренняя энергия, которую приобретает вещество в ударной волне в начальной стадии ее распространения, значительно превышает теплоту испарения, и вещество ведет себя, как газ. Зная закон затухания ударной волны, можно оценить массу испаренного грунта: превращение твердого вещества в газ прекращается, когда энергия во фронте ударной волны становится сравнимой с теплотой испарения. Выброс газа с поверхности создает импульс отдачи. Это приводит к увеличению разрушающего действия удара на более поздней стадии, когда в ударной волне происходит лишь механическое раздробление твердого вещества.

Явление удара (взрыва) метеоритов рассматривал К. П. Станюкович [1-3] в связи с проблемой возникновения кратеров на Луне. К. П. Станюкович полагал, что ударная волна при взрыве на поверхности вещества распространяется точно так же, как если бы взрыв произошел в неограниченной среде. Давление на фронте уменьшается при этом по закону $p \sim M^{-1}$, где M — масса вещества, охваченного волной.

Иной подход был предложен М. А. Лаврентьевым [4], который рассчитывал разогрев вещества, полагая, что жидкость несжимаемая и импульс вещества, охваченного движением, остается постоянным и равным импульсу ударяющего тела.

В той стадии, когда вещество ведет себя как газ, реальный гидродинамический процесс является в сущности «сферическим» аналогом плоского движения, которое рассматривается в известной задаче о кратковременном ударе по поверхности газа, граничащего с пустотой.

Плоская задача была поставлена и исследована Я. Б. Зельдовичем [5], который разъяснил важные физические особенности движения и пока-

зал, что предельное движение является автомодельным. Отток газа от фронта ударной волны, обусловленный разлетом его в пустоту, ослабляет волну по сравнению со случаем плоского взрыва в неограниченной среде, когда энергия в взрывной волне остается постоянной и $p \sim M^{-1}$ (в плоском случае M — это масса, приходящаяся на единицу поверхности).

Однако ударная волна затухает медленнее, чем при условии сохранения импульса, когда $p \sim M^{-2}$.

Показатель автомодельности n в законе $p \sim M^{-n}$ ограничен неравенством $1 < n < 2$ (он зависит от показателя адиабаты γ).

Я. Б. Зельдович показал далее, что автомодельное решение принадлежит к тому классу, в котором показатель автомодельности n нельзя определить из соображений размерности или законов сохранения, как в задаче о сильном взрыве, решенной Л. И. Седовым [6]. Показатель находится как собственное число в ходе решения дифференциальных уравнений. При произвольном показателе адиабаты уравнения можно решить только численно; в частном случае $\gamma = 7/5$ существует точное аналитическое решение, которое нашли Хернер [7], Хефеле [8], А. И. Жуков и Я. М. Каждан [9]; в этом решении $n = 4/3$, т. е. $p \sim M^{-4/3}$ (см. также работы В. В. Адамского [10] и В. В. Адамского и Н. А. Попова [11]).

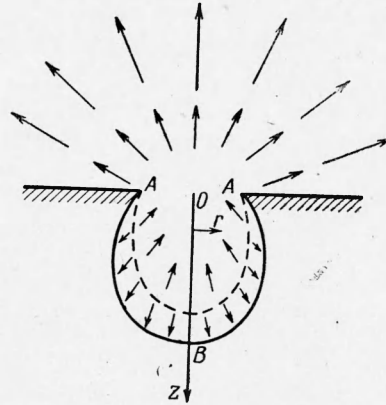
Ниже исследуется сферический вариант задачи о кратковременном ударе по поверхности газа, граничащего с пустотой (задача о «сосредоточенном» ударе). Попутно рассматривается и «цилиндрический» вариант (нитевой удар). В математическом отношении «сферический» и «цилиндрический» варианты относятся к двумерным задачам и поэтому несравненно сложнее плоского; положение существенно осложняется еще и тем, что поверхность фронта ударной волны неизвестна и должна быть найдена в ходе решения. Предельное движение, как и в плоском случае, автомодельно.

Для того чтобы получить некоторое представление о показателе автомодельности n , т. е. о законе затухания ударной волны $p \sim M^{-n}$, рассмотрим задачу следующим упрощенным способом. Построим точное частное решение дифференциальных уравнений, которое будет обобщением точного решения одномерной задачи и в некоторых отношениях правильно передает черты двумерного процесса. В решение войдет ряд произвольных постоянных. Разумеется, при помощи такого, довольно произвольного, частного решения нельзя удовлетворить граничным условиям на фронте ударной волны. Вместо условий на фронте подчиним решение общим интегральным соотношениям, выражающим законы сохранения массы, энергии и импульса. При этом придется задаться конкретной формой поверхности фронта, которую выберем простейшим образом. Подобно тому, как в одномерном случае точное, аналитическое решение существует только при одном, избранном значении показателя адиабаты γ , такое приближенное решение, которое является обобщением точного одномерного, также годится только для одного единственного показателя γ . Это значение γ вместе с соответствующим значением n найдется в ходе решения.

Укажем сразу, что для сосредоточенного удара получается $n = 1.07$ при $\gamma = 1.205$; для нитевого удара $n = 1.14$ при $\gamma = 1.266$. К счастью, эти избранные значения показателей адиабаты близки к реальным значениям эффективных показателей адиабаты газа в условиях высоких температур. По аналогии с плоским случаем можно сделать качественный вывод о том, что при показателях γ , превышающих указанные, показатели n лежат в узких интервалах между приведенными значениями и единицей. Таким образом, ударная волна при сосредоточенном и нитевом ударах затухает лишь немного быстрее, чем при соответствующих взрывах в неограниченной среде (когда $n = 1$).

2. Постановка задачи и качественная картина движения. Пусть полупространство $z > 0$ занято идеальным газом с постоянным показателем адиабаты γ . Плотность газа ρ_0 — постоянна, давление равно нулю. По другую сторону плоскости $z = 0$ при $z < 0$ пространство пустое. В начальный момент $t = 0$ в небольшой массе газа m , окружающей точку O на граничной плоскости $z = 0$, быстро выделяется большая энергия E (равная кинетической энергии падающего метеорита). От точки O по газу побежит ударная волна. С другой стороны, нагретый газ разлетается в пустоту. Начальные скорости движения газа в сторону распространения ударной волны и в сторону пустоты порядка $u_0 \sim \sqrt{E/m}$ (порядка скорости падения метеорита, m — порядка массы метеорита).

Поверхность фронта ударной волны является поверхностью вращения вокруг оси z ; она образует нечто вроде «чаши», как показано на фиг. 1. Через круглое «отверстие» чаши (сечение в плоскости $z = 0$) газ, нагретый ударной волной, вытекает из чаши в пустоту. Отток газа ослабляет ударную волну по сравнению с тем случаем, когда отверстие закрыто неподвижной «крышкой». Этот, последний, случай соответствовал бы взрыву в неограниченной среде.



Фиг. 1

Скорее всего ударная волна движется вниз, медленнее всего — вдоль поверхности $z = 0$, где она сильно ослабляется за счет расширения газа в пустоту. Поэтому поверхность фронта вытянута вниз по сравнению с полусферой. Вблизи фронта газ движется в сторону распространения волны; где-то внутри чаши проходит поверхность, на которой вертикальная составляющая скорости меняет направление. Выше этой поверхности, схематически показанной на фиг. 1 пунктиром, газ движется в сторону пустоты (направления скорости указаны стрелками). По мере удаления от плоскости $z = 0$ в ранее пустом пространстве $z < 0$ скорость разлета возрастает, что показано на фиг. 1 стрелками возрастающей длины.

По-видимому, вблизи плоской границы невозмущенной среды газ, вытекающий из отверстия, движется вдоль плоскости $z = 0$ и давление у самой плоскости равно нулю. Возможно, что при некоторых значениях γ происходит отрыв, так что около плоскости $z = 0$ вне отверстия образуется пустая коническая щель. Быть может, при некоторых γ давление на плоскости $z = 0$ вне отверстия, конечно, и вблизи точки A возникает тройная точка; фронт ударной волны вдоль плоскости $z = 0$ простирается тогда до бесконечности.

Представляется довольно очевидным, что в пределе, когда ударная волна захватывает массу $M \gg m$, движение автомодельно. Поверхность фронта расширяется, оставаясь при этом подобной самой себе. Координата какой-нибудь точки фронта, например B , растет со временем по закону $z_1 \sim t^\alpha$. Давление на фронте, например в той же точке B , уменьшается с увеличением массы M по закону $p_1 \sim M^{-n}$, причем константы n и α связаны между собой простым соотношением

$$n = 2(1 - \alpha) / 3\alpha \quad (2.1)$$

Эту связь легко получить следующим образом. Масса M пропорциональна $M \sim z_1^3 \sim t^{3\alpha}$. Скорость газа за фронтом пропорциональна $u \sim dz_1/dt \sim t^{\alpha-1}$. С другой стороны, $u \sim \sqrt{p_1} \sim M^{-n/2} \sim t^{-3\alpha n/2}$. Из последних двух соотношений следует, что $\alpha - 1 = -3\alpha n / 2$. т. е. (2.1).

3. Ограничение показателя автомодельности. Покажем, что для показателя n при сосредоточенном ударе так же, как и в плоском случае, справедливо неравенство

$$1 < n < 2 \quad (3.1)$$

Для этого рассмотрим стадию, на которой $M \gg m$ и $p_1 \sim M^{-n}$, и составим приближенные выражения для энергии и вертикальной z — составляющей импульса газа, содержащегося в чаше. С учетом размерных параметров в коэффициенте пропорциональности между p и M , но без учета численного коэффициента, среднее по объему чаши давление будет

$$p \sim \frac{E p_0}{m} \left(\frac{m}{M}\right)^n \sim p_0 \left(\frac{m}{M}\right)^n \quad (3.2)$$

Здесь $p_0 \sim E p_0 / m$ — начальное давление в момент удара (взрыва). Средняя скорость газа в чаше по порядку величины равна

$$u \sim \left(\frac{p}{\rho_0}\right)^{1/2} \sim u_0 \left(\frac{m}{M}\right)^{n/2} \sim \left[\frac{E}{m} \left(\frac{m}{M}\right)^n\right]^{1/2} \quad (3.3)$$

Энергия в чаше порядка

$$E_1 \sim M u^2 \sim M \frac{p}{\rho_0} \sim E \left(\frac{m}{M}\right)^{n-1} \sim E_{10} \left(\frac{m}{M}\right)^{n-1} \quad (3.4)$$

где E_{10} — начальная энергия в чаше, которая, очевидно, порядка полной энергии E . Импульс в чаше порядка

$$I_1 \sim M u \sim \left[E m \left(\frac{m}{M}\right)^{n-2} \right]^{1/2} \sim I_{10} \left(\frac{m}{M}\right)^{(n-2)/2} \quad (3.5)$$

где $I_{10} \sim (E m)^{1/2}$ — начальный импульс, который по порядку равен импульсу ударяющего тела. Энергия вытекает из чаши через отверстие, так как скорость газа в сечении отверстия направлена в сторону пустоты. Следовательно, энергия E_1 , содержащаяся в чаше, уменьшается с течением времени (с ростом массы M) и из (3.4) вытекает, что $n > 1$.

Импульс газа во всей чаше сравним с импульсом в той части чаши, которая заключена между поверхностью фронта ударной волны и пунктирной поверхностью, где вертикальная составляющая скорости меняет знак, т. е. равна нулю. Через эту последнюю поверхность импульс в вертикальном направлении не вытекает, а давление на ней положительно. Следовательно, импульс растет с течением времени и $n < 2$ по формуле (3.5). Вертикальный импульс газа в чаше уравнивается также растущим, но противоположно направленным импульсом газа, вытекающего из чаши и разлетающегося в пустоту. Значение $n=1$ соответствовало бы сохранению энергии в чаше, т. е. взрыву в неограниченной среде. Значение $n=2$ соответствовало бы сохранению импульса.

Картина движения при нитевом ударе в качественном отношении сходна с картиной, изображенной на фиг. 1. Только теперь движение симметрично не относительно оси z , а относительно плоскости, проходящей через ось z перпендикулярно плоскости фигуры. Поверхность фронта образует не чашу, а бесконечно длинную «канаву». M — это масса, приходящаяся на единицу длины канавы.

Автомодельному режиму отвечают бесконечная полная энергия и нулевой полный импульс. Действительно, движение автомодельно в пределе $M/m \rightarrow \infty$. Рассматривая конечные времена и массы M , можно считать, что энергия E выделилась в бесконечно малой массе $m \rightarrow 0$. Как видно из формул (3.1)–(3.5), величины в чаше конечны при условии, что

$$E m^{n-1} = \text{const при } m \rightarrow 0 \text{ или } E \sim m^{1-n} \rightarrow \infty, \quad I_{10} \sim (E m)^{1/2} \sim m^{2-n} \rightarrow 0$$

Энергия в чаше E_1 — конечна, но полная энергия движения E бесконечна, так как исчезающе малая масса m , в которой произошло энерговыделение, разлетается в пустоту с бесконечной скоростью и обладает бесконечной кинетической энергией

$$u_0 \sim (E/m)^{1/2} \rightarrow \infty, \quad m u_0^2 \sim E \sim m^{1-n} \rightarrow \infty$$

Это положение разъяснено Я. Б. Зельдовичем [5] на примере плоской задачи.

Можно установить еще более узкий интервал для показателя n в законе затухания ударной волны. Физически ясно, что при одном и том же показателе адиабаты в случае сосредоточенного удара волна ослабляется с ростом массы медленнее, чем в плоском случае.

В самом деле, ослабляющее действие оттока газа от фронта проявляется тем меньше, чем относительно меньше площадь, через которую газ вытекает в пустоту. В «сферическом» случае площадь отверстия гораздо меньше площади поверхности фронта ударной волны (фиг. 1). В плоском же случае обе площади равны. «Цилиндрический» случай в этом отношении будет промежуточным.

Если обозначить через n_1, n_2, n_3 показатели в законе $p \sim M^{-n}$ для плоского, нитевого и сосредоточенного ударов соответственно, то при одном и том же показателе адиабаты γ

$$1 < n_3 < n_2 < n_1 < 2 \quad (3.6)$$

Например, при $\gamma = 7/5$ показатели $n_1 = 4/3$ и $1 < n_3 < 4/3$, а при $\gamma = 5/3$, будем иметь $n_1 = 1.275$ [8] и $1 < n_3 < 1.275$. Таким образом, сосредоточенный удар ближе к точечному взрыву в неограниченной среде, чем плоский удар к плоскому взрыву.

4. Уравнения автомодельного движения. При сосредоточенном ударе движение газа обладает осевой симметрией, поэтому естественно рассматривать его в цилиндрических координатах z, r (фиг. 1). Запишем уравнения газодинамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u_r \right) &= 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\ln p \rho^{-\gamma}) + u_r \frac{\partial}{\partial r} (\ln p \rho^{-\gamma}) + u_z \frac{\partial}{\partial z} (\ln p \rho^{-\gamma}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Введем новые, автомодельные, переменные по обычным формулам

$$\begin{aligned} \xi &= z t^{-\alpha}, & \zeta &= r t^{-\alpha} \\ p &= t^{-2(1-\alpha)} \pi, & u_z &= t^{-(1-\alpha)} v, & u_r &= t^{-(1-\alpha)} w, & \rho &= \rho \end{aligned} \quad (4.2)$$

Заметим, что новые переменные не будут безразмерными. Начальная плотность газа ρ_0 положена равной единице.

Уравнения для функций — представителей π, ρ, v, w , имеют вид

$$\begin{aligned} (v - \alpha \xi) \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + (w - \alpha \zeta) \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi w \right) &= 0 \\ -(1 - \alpha) v + (v - \alpha \xi) \frac{\partial v}{\partial \xi} + (w - \alpha \zeta) \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial \xi} &= 0 \\ -(1 - \alpha) w + (v - \alpha \xi) \frac{\partial w}{\partial \xi} + (w - \alpha \zeta) \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial \zeta} &= 0 \\ -2(1 - \alpha) + (v - \alpha \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} (\ln \pi \rho^{-\gamma}) + (w - \alpha \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} (\ln \pi \rho^{-\gamma}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

К уравнениям следует добавить граничные условия на фронте ударной волны и со стороны пустоты. В обычных переменных поверхность фронта ударной волны описывается уравнением $z = f(r, t)$. В силу автомодельности $z = t^\alpha f(r t^{-\alpha})$ или $\xi = f(\zeta)$, где f — некоторая неизвестная функция. Условия на фронте связывают переменные π, v, w на кривой $f(\zeta)$ с функцией f и ее производной f' (ρ на фронте равно $(\gamma + 1) / (\gamma - 1)$). Так как в явном виде условия на фронте в дальнейшем не понадобятся, то они здесь не приводятся. Со стороны пустоты

$$z, \xi \rightarrow -\infty; \quad p, \pi \rightarrow 0$$

5. Частное решение уравнений. Найдем такое частное решение уравнений (4.3), которое в качественном отношении верно передает некоторые характерные черты рассматриваемого движения. Форму, в которой следует искать частное решение, подсказывает одно интересное свойство точного решения одномерной задачи. Это свойство состоит в линейной зависимости скорости от координаты. Линейности скорости соответствует независимость дивергенции скорости от координаты, т. е. равномерность расширения газа, при которой относительная скорость расширения частиц $(1/\rho)(d\rho/dt)$ в каждый момент времени одинакова для всего течения.

Сделаем три допущения.

1. Будем считать, что давление, плотность и вертикальная скорость не зависят от радиуса: $\pi = \pi(\xi)$, $\rho = \rho(\xi)$, $v = v(\xi)$. Это можно рассматривать как результат усреднения величин по радиусу для каждого горизонтального сечения чаши.

2. Будем считать, что газ расширяется равномерно и дивергенция скорости не зависит от координат. В автомодельных переменных дивергенция скорости постоянна

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \zeta w = \text{const}$$

3. По аналогии с плоским случаем будем считать, что вертикальная скорость линейно зависит от координаты, т. е. $\partial v / \partial \xi = \text{const}$. Константу без ущерба для общности можно положить равной единице, так как предстатель скорости в автомодельном решении определяется с точностью до постоянного множителя. Таким образом, $\partial v / \partial \xi = 1$. Теперь легко построить решение. Имеем

$$v = \xi + v_0 \quad (5.1)$$

где v_0 — постоянная интегрирования. Из постоянства дивергенции скорости следует, что $w = \text{const } \zeta$. Здесь принято во внимание, что радиальная скорость w равна нулю на оси симметрии при $\zeta = 0$. Из уравнения движения для радиального направления найдем, что $\text{const} = 1$ и

$$w = \zeta \quad (5.2)$$

Подставляя (5.1) и (5.2) в уравнение непрерывности, получим

$$\rho = \rho_0 q^{-\frac{3}{1-\alpha}} \quad (5.3)$$

Здесь q — вспомогательная переменная, равная

$$q = \frac{1-\alpha}{v_0} \xi + 1 \quad (5.4)$$

Далее, из энтропийного уравнения следует, что

$$\pi = \pi_0 q^{2 - \frac{3\gamma}{1-\alpha}} \quad (5.5)$$

Уравнение движения для вертикального направления дает связь постоянных интегрирования и связь показателя адиабаты с показателем α (напоминаем, что $n = 2(1-\alpha)/3\alpha$)

$$\frac{\pi_0}{\rho_0 v_0^2} = \frac{\alpha}{2+\alpha}, \quad \alpha = 4 - 3\gamma \quad (5.6)$$

Как и следовало ожидать, функции очень похожи на функции в точном решении одномерной задачи.

В одномерной задаче имеется только одна переменная ξ и одна скорость v . Решение имеет вид

$$\begin{aligned} v &= \xi + v_0, & \rho &= \rho_0 q^{-1/(1-\alpha)}, & \pi &= \pi_0 q^{2-\gamma/(1-\alpha)} \\ q &= (1-\alpha)\xi/v_0 + 1, & \pi_0/\rho_0 v_0^2 &= 1, & \alpha &= 2-\gamma, \quad n = 2(1-\alpha)/\alpha \end{aligned}$$

Подстановка этих функций в граничные условия на фронте ударной волны дает

$$\alpha = \frac{3}{5}, \quad n = \frac{4}{3}, \quad \gamma = \frac{7}{5}, \quad \rho_0 = 0.107, \quad \xi_1 = -2v_0$$

где ξ_1 — координата фронта ударной волны, которая остается произвольной (либо v_0 можно рассматривать как произвольную постоянную).

Профили давления, плотности и составляющих скорости схематически показаны на фиг. 2 (ξ_1, ξ_1 — координаты какой-либо точки поверхности фронта ударной волны). Постоянные интегрирования v_0, π_0, ρ_0 равны значениям v, π, ρ в сечении отверстия $\xi = 0$. Функции удовлетворяют условиям со стороны пустоты: $\rho, \pi \rightarrow 0, v \rightarrow -\infty$ при $\xi \rightarrow -\infty$.

Заметим, что поведение функций вне чаши не имеет значения для решения.

6. Интегральная форма законов сохранения. Составим уравнения баланса массы, энергии и импульса для газа в чаше. Пусть M — полная масса газа, охваченного ударной волной к моменту t ; M_1 — масса газа, содержащегося в чаше

$$M = \int_V dV = V, \quad M_1 = \int_V \rho dV \quad (6.1)$$

Здесь dV — элемент объема; интеграл берется по всему объему чаши V . Масса M_1 возрастает с течением времени вследствие захвата ударной волной новых слоев и уменьшается за счет вытекания газа «через отверстие», так что

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{dM}{dt} - \int_{S_0} \rho (-u_z) dS \quad (6.2)$$

Здесь dS — элемент поверхности; интеграл берется по площади сечения отверстия S_0 , величина $(-u_z)$ представляет собой проекцию скорости на внешнюю нормаль к сечению, которая направлена противоположно оси z .

Энергия газа в чаше равна

$$E_1 = \int_V \rho \left(\frac{u_z^2}{2} + \frac{u_r^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right) dV \quad (6.3)$$

Энергия вытекает вместе с массой и, кроме того, уменьшается за счет работы сил давления над вытекающим газом, т. е.

$$\frac{dE_1}{dt} = - \int_{S_0} \rho (-u_z) \left(\frac{u_z^2}{2} + \frac{u_r^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right) dS \quad (6.4)$$

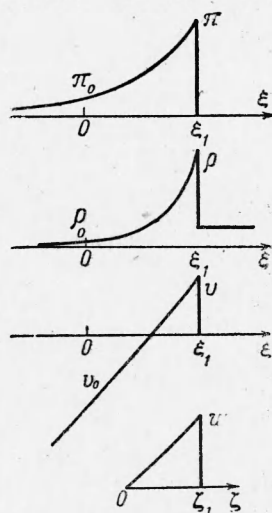
Вертикальный импульс газа в чаше равен

$$I_{1z} = \int_V \rho u_z dV \quad (6.5)$$

Импульс вытекает вместе с массой и возрастает под действием силы давления со стороны вытекающего газа, поэтому

$$\frac{dI_{1z}}{dt} = - \int_{S_0} [\rho u_z (-u_z) - p] dS \quad (6.6)$$

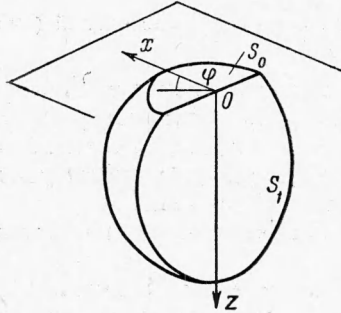
В силу симметрии движения горизонтальный импульс тождественно равен нулю. Поэтому уравнение баланса составим для половины чаши.



Фиг. 2

Разделим чашу пополам плоскостью S_1 , проходящей через ось z , и проведем ось x перпендикулярно к этой плоскости (фиг. 3). Проекция импульса на ось x для газа, занимающего половину чаши, равна

$$I_{1x} = \int_{V/2} \rho u_x dV \quad (u_x = u_r \cos \varphi). \quad (6.7)$$



Фиг. 3

Горизонтальный импульс вытекает вместе с массой через половину отверстия. Сила давления в сечении отверстия не влияет на x -составляющую импульса, так как сила направлена по оси z перпендикулярно к оси x . Через плоскость S_1 потока массы нет, так как по условиям симметрии x -составляющая скорости на этой плоскости — равна нулю. Давление же, действующее на плоскость со стороны газа, который содержится

в другой половине чаши, увеличивает импульс I_{1x} . Таким образом

$$\frac{dI_{1x}}{dt} = - \int_{S_0/2} \rho u_x (-u_z) dS + \int_{S_1} p dS \quad (6.8)$$

Уравнения баланса (6.2), (6.4), (6.6), (6.8) являются абсолютно точными.

Их можно вывести чисто формальным путем, если проинтегрировать дифференциальные уравнения непрерывности, энергии и импульса, записанные в дивергентной форме (см., например, [12]), по объему чаши (по половине объема в последнем случае). Объемные интегралы от дивергенций потоков массы, энергии и т. д. превращаются в поверхностные интегралы от нормальных составляющих потоков. При этом следует учесть, что поверхность фронта ударной волны движется и поэтому появляются дополнительные интегралы, взятые по поверхности фронта, которые связаны с захватом новых слоев газа. В силу условий на фронте ударной волны интегралы по поверхности фронта в уравнениях для энергии и импульса тождественно исчезают. Таким образом, интегральные соотношения (6.2), (6.4), (6.6), (6.8) в скрытой форме содержат в себе условия на фронте ударной волны и потому вполне заменяют эти условия.

Перейдем в уравнениях баланса к автомодельным переменным при помощи формул (4.2). При этом в правых частях уравнений все обычные переменные заменяются автомодельными и за знаки интегралов выходят определенные степени времени t . При дифференцировании по t в левых частях появляются коэффициенты, зависящие от α . Например, энергия

$$E_1 \sim (\text{скорость})^2 (\text{плотность})^1 (\text{координата})^3 \sim t^{-2(1-\alpha)} t^\alpha t^{3\alpha} \sim t^{5\alpha-2}$$

и, следовательно,

$$\frac{dE_1}{dt} = (5\alpha - 2) \frac{E_1}{t} \sim (5\alpha - 2) t^{5\alpha-3}$$

В результате все временные множители в уравнениях сокращаются и уравнения принимают следующий вид:

$$3\alpha \int_{\Omega} (\rho - 1) d\Omega = \int_{\sigma_0} [\rho v]_{\xi=0} d\sigma \quad (6.9)$$

$$(5\alpha - 2) \int_{\Omega} \rho \left(\frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{\pi}{\rho} \right) d\Omega = \int_{\sigma_0} \left\{ \rho v \left[\frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\pi}{\rho} \right] \right\}_{\xi=0} d\sigma \quad (6.10)$$

$$(4\alpha - 1) \int_{\Omega} \rho v d\Omega = \int_{\sigma_0} [\rho v^2 + \pi]_{\xi=0} d\sigma \quad (6.11)$$

$$(4\alpha - 1) \int_{\Omega/2} \rho w \cos \varphi d\Omega = \int_{\sigma_0/2} [\rho w v]_{\xi=0} \cos \varphi d\sigma + \int_{\sigma_1} [\pi]_{\sigma_1} d\sigma \quad (6.12)$$

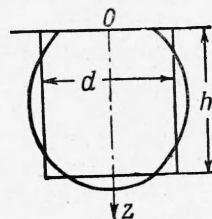
Здесь $d\Omega$ — элемент объема, а $d\sigma$ — элемент поверхности в автомодельных переменных (σ_0 и σ_1 обозначают плоскости S_0 и S_1).

7. Вычисление констант и результаты. Для определения неизвестных констант, входящих в профилирующие функции (5.1) — (5.5), подставим эти функции в уравнения (6.9) — (6.12). Чтобы проделать интегрирование, необходимо задаться какой-то формой поверхности фронта. Поступим простейшим образом, заменив чашу круговым цилиндром с высотой h и диаметром d (фиг. 4). Вычисленное отношение h/d даст некоторое представление об относительных размерах чаши. Так как функции π , ρ , v не зависят от радиуса ξ , а w равно просто ξ , интегрирование по ξ (от 0 до $d/2$) в объемных и поверхностных интегралах проводится элементарно (столь же непосредственно вычисляется и интеграл по φ (от $-\pi/2$ до $\pi/2$; здесь $\pi = 3,14...$) в уравнении (6.12). Интегралы по ξ от 0 до h легко вычисляются путем введения новой переменной q по формуле (5.4).

Укажем только, что после вычисления интегралов и подстановки π_0 и γ по формулам (5.6), (5.7) соотношения (6.9) — (6.12) превращаются в систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных: α , ρ_0 , v_0/d и v_0/h .

Система упрощается до системы двух нелинейных алгебраических уравнений относительно α и v_0/h , корни которых можно найти путем попыток. После этого вычисляются и все остальные константы. Одна из постоянных v_0 , h , d остается произвольной. Она определяется фактической интенсивностью удара (параметром удара), как и в плоском случае.

Приведем результаты вычислений для сосредоточенного удара. Показатель автомодельности в законе $z \sim t^\alpha$ равен $\alpha = 0.386$, ему соответствует значение $n = 1.07$ в законе $p \sim M^{-n}$. Эти значения отвечают показателю адиабаты $\gamma = 1.205$. Отношение высоты цилиндра к его диаметру равно $h/d = 1.05$. Плотность газа в сечении отверстия $\rho_0 = 0.0187$. Плотность газа на дне цилиндра, как бы на «переднем» участке поверхности фронта ударной волны $\rho_1 = 10.3$. Эта величина очень близка к фактической плотности на фронте $(\gamma + 1)/(\gamma - 1) = 10.7$. Плотность спадает от дна цилиндра к отверстию в $\rho_1/\rho_0 = 550$ раз, а давление — в $\pi_1/\pi_0 = 150$ раз. Практически вся масса газа заключена в чаше; из отверстия вытекает только $1 - M_1/M = 0.0159 \approx 1.6\%$ массы. Вертикальная скорость в сечении отверстия равна $v_0 = -0.846 h$, а на дне цилиндра $v_1 = 0.154 h$, т. е. газ вытекает из цилиндра «вверх» в 5.5 раз скорее, чем движется «вниз» у дна. Вертикальная скорость меняет направление ($v = 0$) на глубине $\xi_0 = -v_0 = 0.846 h$ от отверстия и на расстоянии $0.154 h$ от дна (фиг. 2). Наибольшая горизонтальная скорость газа у боковой поверхности цилиндра $w_{\max} = d/2 = 0.476 h$.



Фиг. 4

Совершенно аналогичным образом можно рассмотреть и нитевой удар. Движение удобно описывать в декартовых координатах z , $x \rightarrow \xi$, ξ . Сечение канавы считаем прямоугольным: h — глубина, d — ширина (см. п. 3). Профилирующие функции имеют вид

$$v = \xi + v_0, \quad w = \xi, \quad \rho = \rho_0 q^{-\frac{2}{1-\alpha}}, \quad \pi = \pi_0 q^{2-\frac{2\gamma}{1-\alpha}}, \quad q = \frac{1-\alpha}{v_0} \xi + 1$$

причем

$$\pi_0/\rho_0 v_0^2 = \alpha/(1+\alpha), \quad \alpha = 3 - 2\gamma, \quad n = (1-\alpha)/\alpha$$

В результате вычислений получается

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.467, \quad n = 1.14, \quad \gamma = 1.266, \quad h/d = 1.21, \quad \rho_0 = 0.084 \\ \rho_1 &= 8.4, \quad (\gamma + 1)/(\gamma - 1) = 8.53, \quad \rho_1/\rho_0 = 100, \quad 1 - \frac{M_1}{M} = 0.02 = 2\% \\ \pi_1/\pi_0 &= 24, \quad v_0 = -0.566h, \quad v_1 = 0.434h, \quad w_{\max} = 0.414h \end{aligned}$$

8. Заключение. Приближенное рассмотрение двухмерных автомодельных задач о сосредоточенном и нитевом ударах дает значения показателей автомодельности n ($p \sim M^{-n}$) для специальных значений показателей адиабаты: $n = 1.07$ при $\gamma = 1.205$ в первом случае и $n = 1.14$ при $\gamma = 1.266$ — во втором. Показатели n очень близки к единице, т. е. отток газа от фронта ударной волны вследствие расширения его в пустоту лишь немного ослабляет ударную волну по сравнению со взрывами в неограниченной среде. И действительно, за пределы чаши или канавы оказывается выброшенной лишь малая доля всей массы, 1.6 и 2.0% соответственно. Форма чаши, по-видимому, существенно отличается от полусферы (полусфера соответствовала бы взрыву в неограниченной среде). Высота чаши — цилиндра — в случае сосредоточенного удара примерно равна диаметру, тогда как при замене полусферы эквивалентным цилиндром высота была бы примерно вдвое меньше диаметра. То же самое можно сказать и в отношении нитевого удара. Показатели $\gamma = 1.205$ и $\gamma = 1.266$, для которых получены приближенные решения, близки к реальным значениям показателей адиабаты при высоких температурах, когда существенны процессы диссоциации и ионизации (только при высоких температурах и имеет смысл рассматривать плотное вещество как идеальный газ).

В плоском случае показатель автомодельности n монотонно уменьшается с ростом γ , что видно из сопоставления известных данных:

$\gamma = 1.1$	$7/5 = 1.4$	$5/3 = 1.66$	2.8
$n = 1.515$	1.333	1.275	1.045

Естественно предположить, что и в двухмерных случаях n уменьшается при возрастании γ . Отсюда следует, что при сосредоточенном ударе показатель n заключен в узком интервале между 1 и 1.07 при всех значениях γ , превышающих 1.205; для нитевого удара $1 < n < 1.14$ при $\gamma > 1.266$. Если рассматривать реальные процессы, то вряд ли могут представить интерес значения γ , меньшие чем 1.205 или 1.266. Таким образом, можно заключить, что в большинстве реальных процессов, моделью которых может послужить задача о сосредоточенном (или нитевом) ударе, ударная волна затухает лишь немного скорее, чем при взрыве в неограниченной среде. Это свидетельствует в пользу приближения К. П. Станюковича [1-3].

Автор признателен Я. Б. Зельдовичу за обсуждение работы.

Поступила 22 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П., Федьинский В. В. Разрушительное действие метеоритных ударов. ДАН СССР, 1947, т. 57, № 2.
2. Станюкович К. П. Элементы физической теории метеоров и кратерообразующие метеориты. Метеоритика, 1950, вып. 7.
3. Станюкович К. П. Элементы теории удара твердых тел с большими (космическими) скоростями. Искусственные спутники Земли, 1960, вып. 4, стр. 86.
4. Лаврентьев М. А. Проблема пробивания при космических скоростях. Искусственные спутники Земли, 1959, вып. 3, стр. 61.
5. Зельдович Я. Б. Движение газа под действием кратковременного давления (удара). Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 1, стр. 28.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1954.
7. Hoerner S. Von Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen mit linearen Verlauf der Geschwindigkeit. Z. f. Naturforschung, 1955, 10a, 687.
8. Häfeler W. Zur analytische Behandlung ebener starker instationärer Stosswellen. Z. f. Naturforschung, 1954, 10a, 1006.
9. Жуков А. И., Каждан Я. М. Движение газа под действием кратковременного импульса. Акуст. ж., 1956, 2, вып. 4, 352.
10. Адамский В. В. Интегрирование системы автомодельных уравнений в задаче о кратковременном ударе. Акуст. ж., 1956, 2, вып. 1, 3.
11. Адамский В. В., Попов Н. А. Движение газа под действием давления на поршне, изменяющегося по степенному закону. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1954.