

УДК 624.1 + 534.1

**О ВЛИЯНИИ ВНУТРЕННЕЙ ГРУНТОВОЙ ПРОБКИ
НА ПРОЦЕСС УДАРНОГО ЗАБИВАНИЯ ТРУБЫ**

Н. И. Александрова

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: nialex@misd.ru,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Численно и аналитически исследованы различные режимы движения забиваемой в грунт трубы с грунтовой пробкой, содержащейся в ней, при действии ударного импульса прямоугольной формы с учетом сухого трения как между трубой и пробкой, так и между трубой и внешней неподвижной средой. Проведено сравнение решений по двум моделям с учетом и без учета упругости трубы и пробки. Показано, что в случае импульса достаточно большой длительности влиянием упругости трубы и пробки можно пренебречь.

Сухое трение, импульсное нагружение, нелинейная динамика, численное моделирование, аналитическое решение

DOI: 10.15372/FTPRPI20170611

Одной из важнейших задач при бестраншейной прокладке подземных коммуникаций с помощью забивания металлических труб в грунт является изучение влияния на волновой процесс трения между боковой поверхностью трубы и грунта, находящегося внутри и снаружи трубы. Сухое трение играет важную роль также во многих механических системах, где есть относительное перемещение тел, контактирующих без смазки. Вопросам взаимодействия твердых тел с учетом сухого трения посвящена обширная литература [1–24]. Первыми исследовали законы сухого трения Леонардо да Винчи (1452–1519), Амонтонс (1663–1705) и Кулон (1736–1806) [1]. Обзор моделей сухого трения можно найти в [11, 19, 24]. Различные аспекты численного решения задач с нелинейными законами сухого трения рассматривались в [7–9, 15, 16, 21, 22, 24]. Аналитические решения для систем с одной степенью свободы и сухим трением приведены в [4, 6, 10, 13, 14, 17, 18, 20]. Стационарные режимы движения одного или двух тел с сухим трением, описываемым законом Кулона [1], исследовались в [2–4, 9, 12–14, 17], нестационарные режимы — в [9, 10, 18, 20–24]. В большинстве отмеченных работ основное внимание акцентируется на анализе смены режимов скольжения и прилипания при действии гармонической возбуждающей силы. Импульсное воздействие на систему тел с сухим трением Кулона практически не изучено.

Данная работа посвящена проблеме взаимодействия цилиндрической трубы с внешней неподвижной средой и внутренней грунтовой пробкой при действии одиночного импульса. Трение на внешней и внутренней поверхности трубы описывается классическим законом трения Кулона [1].

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ В СЛУЧАЕ ЖЕСТКОЙ ТРУБЫ И ПРОБКИ

Будем исследовать совместное движение стальной цилиндрической трубы, погруженной в недеформируемый грунт, и грунтовой пробки, содержащейся в трубе, при действии на трубу импульсной нагрузки $Q(t)$, направленной вдоль оси трубы (рис. 1). Рассмотрим случай жесткой трубы и жесткой пробки, т. е. труба и пробка моделируются как сосредоточенные массы. Уравнения движения с учетом закона постоянного сухого трения Кулона на поверхностях контакта внутренней поверхности трубы и пробки, а также внешней поверхности трубы и неподвижного грунта имеют следующий вид (модель I):

$$M_1 \ddot{U}_1(t) = Q(t) - P_1 L_1 \tau_1 k_1 - P_2 L_2 \tau_2 k_2, \quad (1)$$

$$M_2 \ddot{U}_2(t) = P_2 L_2 \tau_2 k_2, \quad (2)$$

$$k_1 = \text{sign} \dot{U}_1 = \begin{cases} 1, & \dot{U}_1 > 0, \\ 0, & \dot{U}_1 = 0, \\ -1, & \dot{U}_1 < 0, \end{cases} \quad k_2 = \text{sign}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = \begin{cases} 1, & \dot{U}_1 - \dot{U}_2 > 0, \\ 0, & \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = 0, \\ -1, & \dot{U}_1 - \dot{U}_2 < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь U_1, U_2 — перемещения трубы и пробки; τ_1, τ_2 — предельные сдвиговые напряжения на внешней и внутренней поверхностях трубы; P_1, P_2 — внешний и внутренний периметры трубы; L_1, L_2 — длины трубы и пробки; M_1, M_2 — массы трубы и пробки; t — время. В (1), (2) полагается, что сила сухого трения приложена на всей внешней поверхности трубы (пропорциональна L_1) и на поверхности контакта пробки и трубы (пропорциональна L_2). Предполагаем, что в начальный момент времени все перемещения и скорости равны нулю: $\dot{U}_1(0) = \dot{U}_2(0) = U_1(0) = U_2(0)$.

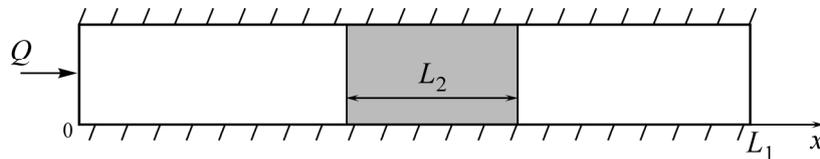


Рис. 1. Схема постановки задачи

Дальнейшие рассуждения будем проводить на примере действия одиночного импульса прямоугольной формы с амплитудой Q_0 и длительностью t_0 :

$$Q(t) = Q_0 H(t) H(t_0 - t), \quad (4)$$

где H — ступенчатая функция Хевисайда.

Проинтегрируем (1), (2) с учетом (3), (4) и нулевых начальных условий. В этом случае решение будет иметь вид:

$$\dot{U}_1(t) = \frac{1}{M_1} \left[I(t) - \frac{Q_0 t (k_1 \tau_1 + \beta k_2 \tau_2)}{\tau_*} \right], \quad (5)$$

$$\dot{U}_2(t) = \frac{k_2 P_2 \tau_2 L_2}{M_2} t = \frac{Q_0 \tau_2 k_2}{M_2 \tau_*} \beta t,$$

где

$$\tau_* = \frac{Q_0}{P_1 L_1}, \quad \beta = \frac{P_2 L_2}{P_1 L_1}, \quad I(t) = \int_0^t Q(t) dt = Q_0 [t H(t_0 - t) + t_0 H(t - t_0)].$$

Вычислим разность скоростей перемещений трубы и пробки:

$$\dot{U}_1(t) - \dot{U}_2(t) = \frac{1}{M_1} \left[I(t) - \frac{Q_0 t (k_1 \tau_1 + \gamma k_2 \tau_2)}{\tau_*} \right],$$

где $\gamma = \beta(1 + M_1/M_2)$.

Поскольку функция $k_2 = 1$, если $\dot{U}_1 - \dot{U}_2 > 0$, то в результате имеем неравенство для определения интервала времени, где $k_2 = 1$:

$$\dot{U}_1(t) - \dot{U}_2(t) = Q_0 [tH(t_0 - t) + t_0 H(t - t_0) - (k_1 \tau_1 + \gamma \tau_2) t / \tau_*] / M_1 > 0. \quad (6)$$

Аналогично получаем неравенство для определения интервала времени, где $k_1 = 1$:

$$\dot{U}_1(t) = Q_0 [tH(t_0 - t) + t_0 H(t - t_0) - (\tau_1 + \beta k_2 \tau_2) t / \tau_*] / M_1 > 0.$$

а) Рассмотрим случай: $\tau_1 + \gamma \tau_2 < \tau_*$. Тогда $\tau_1 + \beta \tau_2 < \tau_1 + \gamma \tau_2 < \tau_*$, поскольку $\gamma > \beta$. При этом существует интервал времени, где $k_2 = 1$ и $k_1 = 1$. Найдем его. Пусть t_1 и t_2 удовлетворяют равенствам $t_1(\tau_1 + \gamma \tau_2) = \tau_* t_0$ и $t_2(\tau_1 + \beta \tau_2) = \tau_* t_0$. Отсюда $t_1 = \tau_* t_0 / (\tau_1 + \gamma \tau_2) \geq t_0$ и $t_2 = \tau_* t_0 / (\tau_1 + \beta \tau_2) > t_1 > t_0$. Если $\tau_* = \tau_1 + \gamma \tau_2$, то справедливо равенство $t_1 = t_0$. На интервале времени $t \in [0, t_1]$ имеем $k_2 = 1$ и $k_1 = 1$. Следовательно, решение примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(t) &= \frac{Q_0}{M_1} [tH(t_0 - t) + t_0 H(t - t_0) - (\tau_1 + \beta \tau_2) t / \tau_*] H(t_1 - t), \\ \dot{U}_2(t) &= \frac{Q_0 \beta \tau_2}{M_2 \tau_*} H(t_1 - t). \end{aligned}$$

Вычислим значения \dot{U}_1, \dot{U}_2 в момент времени t_1 :

$$\dot{U}_2(t_1) = \frac{Q_0 t_0 \tau_2 \beta}{M_2 (\tau_1 + \gamma \tau_2)}, \quad \dot{U}_1(t_1) = \frac{Q_0 t_0 \tau_2 \beta}{M_2 (\tau_1 + \gamma \tau_2)}.$$

Таким образом, до момента времени t_1 труба и пробка движутся с разными скоростями (происходит скольжение пробки относительно трубы), в момент времени t_1 их скорости принимают равные значения (труба и пробка слипаются) и в случае, когда $\tau_1 / \tau_2 = \alpha$ ($\alpha = \text{const}$), имеют одно и то же значение:

$$\dot{U}_{**} = \frac{Q_0 t_0 \beta}{M_2 (\gamma + \alpha)}$$

независимо от конкретных значений τ_1, τ_2 .

Пусть $t > t_1$. Тогда справедливо неравенство (6) и, следовательно, $k_1 = 1$. Функция k_2 при $t > t_1$ может принимать два значения: $k_2 = -1$ и $k_2 = 0$.

Допустим $k_2 = -1$. Из (5) получим следующее решение для трубы на интервале времени $t_1 < t < t_3$, где время t_3 находится из равенства $\dot{U}_1(t_3) = 0$:

$$\dot{U}_1(t) = \frac{Q_0 (t_3 - t) (\tau_1 - \beta \tau_2)}{M_1 \tau_*} H(t_3 - t) H(t - t_1), \quad t_3 = t_1 \frac{\tau_1 + (\gamma - 2\beta) \tau_2}{(\tau_1 - \beta \tau_2)} \geq t_1.$$

На интервале времени $t_1 < t < t_4$, где время $t_4 = 2t_1$ определяется из равенства $\dot{U}_2(t_4) = 0$, имеем следующее решение для скорости пробки:

$$\dot{U}_2(t) = \frac{Q_0 (t_4 - t) \beta \tau_2}{M_2 \tau_*} H(t - t_1) H(t_4 - t).$$

При $t > t_3$ имеем $k_1 = 0$ и, следовательно, $\dot{U}_1(t) = 0$, при $t > t_4$ имеем $\dot{U}_2(t) = 0$.

Проверим, при каких значениях параметров задачи выполняется неравенство $\dot{U}_1(t) - \dot{U}_2(t) < 0$ на интервале $t_1 < t < t_3$, т. е. $k_2 = -1$. Неравенство

$$\dot{U}_1(t) - \dot{U}_2(t) = \frac{Q_0}{\tau_*} \left[\frac{(t_3 - t)(\tau_1 - \beta\tau_2)}{M_1} - \frac{(t_4 - t)\beta\tau_2}{M_2} \right] < 0$$

справедливо только при $\gamma\tau_2 < \tau_1$. В результате, при $t > t_1$ получим, что $k_2 = -1$, если $\gamma\tau_2 < \tau_1$, иначе $k_2 = 0$, если $\gamma\tau_2 \geq \tau_1$.

Отсюда имеем следующее решение при $\gamma\tau_2 < \tau_1$ и $\tau_1 + \gamma\tau_2 < \tau_*$:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(t) &= \frac{1}{M_1} \left[I(t) - \frac{Q_0(\tau_1 + \beta\tau_2)t}{\tau_*} \right] H(t_1 - t) + \frac{Q_0(t_3 - t)(\tau_1 - \beta\tau_2)}{M_1\tau_*} H(t_3 - t)H(t - t_1), \\ \dot{U}_2(t) &= \frac{Q_0\beta\tau_2}{M_2\tau_*} [tH(t_1 - t) + (t_4 - t)H(t - t_1)H(t_4 - t)]. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда $t > t_1$ и $\gamma\tau_2 \geq \tau_1$. Тогда $k_2 = 0$ и $k_1 = 1$. Поскольку функция $k_2 = 0$, если $\dot{U}_1(t) - \dot{U}_2(t) = 0$, то $\dot{U}_1(t) = \dot{U}_2(t)$, т. е. пробка и труба слипаются и движутся вместе. Их общая масса равна $M_1 + M_2$. Их совместное движение описывается формулой

$$\dot{U}_1(t) = \dot{U}_2(t) = \frac{Q_0}{M_1 + M_2} \left(t_0 - \frac{\tau_1 t}{\tau_*} \right).$$

Они вместе движутся до момента времени $t_5 = t_0\tau_*/\tau_1$, если $\tau_1 \neq 0$:

$$\dot{U}_1(t) = \dot{U}_2(t) = \frac{Q_0(t_5 - t)\tau_1}{(M_1 + M_2)\tau_*} H(t_5 - t).$$

Если $\tau_1 = 0$, то при $t > t_1$ имеем $\dot{U}_1(t) = \dot{U}_2(t) = Q_0 t_0 / (M_1 + M_2)$.

Таким образом, в случае $\tau_1 + \gamma\tau_2 \leq \tau_*$ и $\gamma\tau_2 \geq \tau_1$ получим следующее решение:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(t) &= \frac{1}{M_1} \left[I(t) - \frac{Q_0 t(\tau_1 + \beta\tau_2)}{\tau_*} \right] H(t_1 - t) + \frac{Q_0(t_5 - t)\tau_1}{(M_1 + M_2)\tau_*} H(t - t_1)H(t_5 - t), \\ \dot{U}_2(t) &= \frac{Q_0 t\tau_2}{M_2\tau_*} H(t_1 - t) + \frac{Q_0(t_5 - t)\tau_1}{(M_1 + M_2)\tau_*} H(t - t_1)H(t_5 - t). \end{aligned}$$

В случае $\tau_1 = \tau_2 = 0$ имеем решение: $\dot{U}_1(t) = I(t)/M_1$, $\dot{U}_2(t) = 0$.

б) Рассмотрим случай $\gamma\tau_2 + \tau_1 \geq \tau_*$. Здесь, как и ранее, возможны два варианта: $k_2 = -1$ и $k_2 = 0$.

Допустим сначала, что $k_2 = -1$ и $k_1 = 1$. Тогда на интервале $t \leq t_0$ справедливо неравенство

$$\dot{U}_1(t) = \frac{Q_0 t}{M_1} \left[1 - \frac{\tau_1 - \beta\tau_2}{\tau_*} \right] H(t_0 - t) > 0.$$

Оно выполняется, если $\tau_1 - \beta\tau_2 < \tau_*$.

Вычислим скорость пробки на интервале $t \leq t_0$:

$$\dot{U}_2(t) = -\frac{Q_0\beta t\tau_2}{M_2\tau_*} H(t_0 - t)$$

и относительную скорость движения трубы и пробки:

$$\dot{U}_1(t) - \dot{U}_2(t) = \frac{Q_0 t}{M_1} \left[1 + \frac{\gamma \tau_2 - \tau_1}{\tau_*} \right] H(t_0 - t).$$

Неравенство $\dot{U}_1(t) - \dot{U}_2(t) < 0$ выполняется, если $\tau_1 - \gamma \tau_2 > \tau_*$.

На плоскости τ_2, τ_1 неравенства $\tau_1 - \gamma \tau_2 > \tau_*$, $\tau_1 - \beta \tau_2 < \tau_*$, $\tau_1 + \gamma \tau_2 \geq \tau_*$ определяют три области, которые имеют только одну точку пересечения $(\tau_2, \tau_1) = (0, \tau_*)$. В итоге получаем, что случай $k_2 = -1$ и $k_1 = 1$ при $\tau_1 + \gamma \tau_2 \geq \tau_*$ и $t < t_0$ не реализуется.

Пусть $k_2 = 0$ и $k_1 = 1$. Тогда труба и грунтовая пробка совершают совместное движение:

$$\dot{U}_1(t) = \dot{U}_2(t) = \frac{Q_0 t}{M_1 + M_2} \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_*} \right) H(t_0 - t).$$

Вычислим их скорости в момент времени $t = t_0$:

$$\dot{U}_1(t_0) = \dot{U}_2(t_0) = \frac{Q_0 t_0}{M_1 + M_2} \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_*} \right).$$

Пусть теперь $t > t_0$. Проверим, возможна ли ситуация, когда $k_2 = -1$. Допустим, что $k_2 = -1$. Тогда должно выполняться следующее неравенство:

$$\dot{U}_1(t) = \frac{Q_0 t_0}{M_1 + M_2} \left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_*} - \frac{\gamma(\tau_1 - \beta \tau_2)(t - t_0)}{(\gamma - \beta)\tau_* t_0} \right] > 0.$$

Оно справедливо, только если $\tau_1 < \tau_*$.

Пусть при $t = t_6$ $\dot{U}_1(t_6) = 0$. Тогда имеем

$$t_6 = t_0 \left(1 + \frac{(\tau_* - \tau_1)\gamma}{(\tau_1 - \beta \tau_2)(\gamma - \beta)} \right), \quad \dot{U}_1(t) = \frac{Q_0(t - t_6)(\beta \tau_2 - \tau_1)}{M_1 \tau_*} H(t_6 - t) H(t - t_0).$$

Вычислим скорость пробки при $t > t_0$:

$$\dot{U}_2(t) = \dot{U}_2(t_0) - \frac{Q_0 \tau_2 \beta (t - t_0)}{M_2 \tau_*} = \frac{Q_0 t_0}{M_1 + M_2} \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_*} - \frac{\gamma \tau_2 (t - t_0)}{\tau_* t_0} \right) H(t - t_0)$$

и относительную скорость трубы и пробки:

$$\dot{U}_1(t) - \dot{U}_2(t) = \frac{Q_0(\gamma \tau_2 - \tau_1)(t - t_0)}{M_1 \tau_*} H(t - t_0).$$

Если $\gamma \tau_2 < \tau_1$, то $\dot{U}_1(t) - \dot{U}_2(t) < 0$ и случай $k_2 = -1$ может реализоваться. Заметим, что если $\gamma \tau_2 < \tau_1$, то $\beta \tau_2 < \tau_1$ и t_6 определено.

Пусть при $t = t_7$ выполняется равенство $\dot{U}_2(t_7) = 0$. Рассчитаем это время:

$$t_7 = \frac{\gamma \tau_2 - \tau_1 + \tau_*}{\gamma \tau_2} t_0.$$

В результате при выполнении неравенств $\tau_1 + \gamma \tau_2 \geq \tau_*$ и $\gamma \tau_2 < \tau_1$ имеем следующее решение для скорости пробки:

$$\dot{U}_2(t) = \frac{Q_0}{M_1 + M_2} \left[\left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_*} \right) t H(t_0 - t) - \frac{\gamma \tau_2 (t - t_7)}{\tau_*} H(t - t_0) H(t_7 - t) \right].$$

Рассмотрим теперь случай $k_2 = 0$ ($\gamma\tau_2 \geq \tau_1$). Вычислим общую скорость трубы и пробки:

$$\dot{U}_1(t) = \dot{U}_2(t) = \dot{U}_1(t_0) - \frac{Q_0\tau_1(t-t_0)}{(M_1+M_2)\tau_*} = \frac{Q_0}{M_1+M_2} \left[t_0 - \frac{\tau_1}{\tau_*} t \right].$$

Здесь $\dot{U}_1(t) > 0$, если $\tau_* > \tau_1$.

с) Рассмотрим случай $\tau_1 > \tau_*$. Тогда $\tau_1 + \beta\tau_2 > \tau_*$, $\tau_1 + \gamma\tau_2 > \tau_*$. Следовательно, пробка и труба стоят на всем интервале времени:

$$\dot{U}_1(t) = \dot{U}_2(t) = 0, \quad t > 0.$$

Подведем итоги исследования. Для этого разобьем плоскость τ_1, τ_2 на области I, II, III, IV, V, как показано на рис. 2. Выпишем для каждой области выражения для скоростей перемещений и перемещений, полученных интегрированием по времени скоростей трубы и пробки.

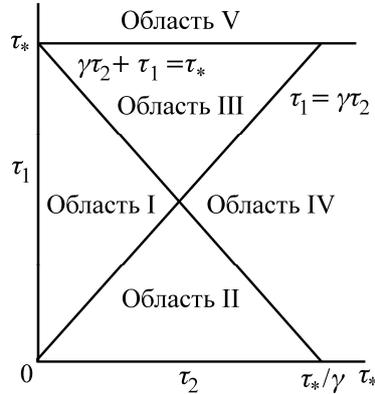


Рис. 2. Области решений в плоскости τ_1, τ_2

Решение в области I ($\tau_2 \geq 0$, $\gamma\tau_2 + \tau_1 < \tau_*$, $\gamma\tau_2 < \tau_1$):

$$\dot{U}_1 = \frac{Q_0}{M_1\tau_*} \left\{ \left[\frac{I(t)\tau_*}{Q_0} - t(\beta\tau_2 + \tau_1) \right] H(t_1 - t) + (t - t_3)(\beta\tau_2 - \tau_1) H(t_3 - t) H(t - t_1) \right\}, \quad (7)$$

$$\dot{U}_2 = \frac{Q_0\beta\tau_2}{M_2\tau_*} [tH(t_1 - t) + (t_4 - t)H(t_4 - t)H(t - t_1)],$$

$$U_1 = \frac{Q_0}{2M_1\tau_*} \{ [\tau_*t^2 H(t_0 - t) + \tau_*(2t - t_0)t_0 H(t - t_0) - (\tau_1 + \beta\tau_2)t^2] H(t_1 - t) +$$

$$+ [\tau_*(2t_1 - t_0)t_0 - (\tau_1 + \beta\tau_2)t_1^2 + (t - t_1)(t - t_1 - 2t_3)(\beta\tau_2 - \tau_1)] H(t - t_1)H(t_3 - t) +$$

$$+ [\tau_*(2t_1 - t_0)t_0 + t_3^2(\tau_1 - \beta\tau_2) - 2t_1^2\tau_1] H(t - t_3) \},$$

$$U_2 = \frac{Q_0\beta\tau_2}{2M_2\tau_*} [t^2 H(t_1 - t) + (6t_1t - 4t_1^2 - t^2)H(t_4 - t)H(t - t_1) + 4t_1^2 H(t - t_4)],$$

$$t_1 = \frac{\tau_*t_0}{\tau_1 + \gamma\tau_2}, \quad t_3 = \frac{[(\gamma - 2\beta)\tau_2 + \tau_1]t_1}{\tau_1 - \beta\tau_2}, \quad t_4 = 2t_1.$$

Решение в области II ($\tau_1 \geq 0$, $\tau_1 + \gamma\tau_2 < \tau_*$, $\gamma\tau_2 \geq \tau_1$):

$$\dot{U}_1 = \frac{Q_0}{M_1\tau_*} \left\{ \left[\frac{I(t)\tau_*}{Q_0} - (\tau_1 + \beta\tau_2)t \right] H(t_1 - t) + \frac{\tau_1(\gamma - \beta)(t_5 - t)}{\gamma} H(t_5 - t)H(t - t_1) \right\}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \frac{Q_0 \beta \tau_2}{M_2 \tau_*} \left\{ t H(t_1 - t) + \frac{\tau_1 (t_5 - t)}{\gamma \tau_2} H(t_5 - t) H(t - t_1) \right\}, \\ U_1 &= \frac{Q_0}{2 M_1 \tau_*} \left\{ [t^2 \tau_* H(t_0 - t) + (2t - t_0) t_0 \tau_* H(t - t_0) - (\tau_1 + \beta \tau_2) t^2] H(t_1 - t) + \right. \\ &+ \left[(2t_1 - t_0) t_0 \tau_* - (\tau_1 + \beta \tau_2) t_1^2 + \frac{(\gamma - \beta) \tau_1 (2t_5 - t + t_1)(t - t_1)}{\gamma} \right] H(t_5 - t) H(t - t_1) + \\ &+ \left. \left[(2t_1 - t_0) t_0 \tau_* - (\tau_1 + \beta \tau_2) t_1^2 + \frac{(\gamma - \beta) \tau_1 (t_5^2 - t_1^2)}{\gamma} \right] H(t - t_5) \right\}, \\ U_2 &= \frac{Q_0 \beta \tau_2}{2 M_2 \tau_*} \left\{ t^2 H(t_1 - t) + \left[t_1^2 + \frac{(2t_5 - t + t_1)(t - t_1) \tau_1}{\gamma \tau_2} \right] H(t - t_1) H(t_5 - t) + \right. \\ &+ \left. \left[t_1^2 + \frac{(t_5^2 - t_1^2) \tau_1}{\gamma \tau_2} \right] H(t - t_5) \right\}, \quad t_5 = t_0 \frac{\tau_*}{\tau_1}. \end{aligned}$$

Решение в области III ($0 \leq \tau_1 < \tau_*$, $\tau_1 + \gamma \tau_2 \geq \tau_*$, $\gamma \tau_2 < \tau_1$):

$$\dot{U}_1 = \frac{Q_0}{(M_1 + M_2) \tau_*} \left[t (\tau_* - \tau_1) H(t_0 - t) + \frac{\gamma (t - t_6) (\beta \tau_2 - \tau_1)}{(\gamma - \beta)} H(t_6 - t) H(t - t_0) \right], \quad (9)$$

$$\dot{U}_2 = \frac{Q_0 t (\tau_* - \tau_1)}{(M_1 + M_2) \tau_*} H(t_0 - t) + \frac{Q_0 (t_7 - t) \beta \tau_2}{M_2 \tau_*} H(t_7 - t) H(t - t_0),$$

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{Q_0}{2 \tau_* (M_1 + M_2)} \left\{ t^2 (\tau_* - \tau_1) H(t_0 - t) + \right. \\ &+ \left[t_0^2 (\tau_* - \tau_1) + \frac{\gamma (t - t_0) (t - t_0 - 2t_6) (\beta \tau_2 - \tau_1)}{(\gamma - \beta)} \right] H(t_6 - t) H(t - t_0) + \\ &+ \left. \left[t_0^2 (\tau_* - \tau_1) + \frac{\gamma (t_6^2 - t_0^2) (\tau_1 - \beta \tau_2)}{(\gamma - \beta)} \right] H(t - t_6) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{Q_0 \beta}{2 M_2 \tau_* \gamma} \{ t^2 (\tau_* - \tau_1) H(t_0 - t) + [t_0^2 (\tau_* - \tau_1) + (t - t_0) (2t_7 - t + t_0) \gamma \tau_2] H(t_7 - t) H(t - t_0) + \\ &+ [t_0^2 (\tau_* - \tau_1) + (t_7^2 - t_0^2) \gamma \tau_2] H(t - t_7) \}, \end{aligned}$$

$$t_6 = \left(1 + \frac{(\tau_* - \tau_1) (\gamma - \beta)}{(\tau_1 - \beta \tau_2) \gamma} \right) t_0, \quad t_7 = \frac{\gamma \tau_2 - \tau_1 + \tau_*}{\gamma \tau_2} t_0.$$

Решение в области IV ($\tau_1 < \tau_*$, $\tau_1 + \gamma \tau_2 \geq \tau_*$, $\gamma \tau_2 \geq \tau_1$):

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \frac{Q_0}{(M_1 + M_2) \tau_*} [t (\tau_* - \tau_1) H(t_0 - t) + \tau_1 (t_5 - t) H(t_5 - t) H(t - t_0)], \quad (10)$$

$$\begin{aligned} U_1 = U_2 &= \frac{Q_0}{2 (M_1 + M_2) \tau_*} \{ [t_0^2 (\tau_* - \tau_1) + \tau_1 (2t_5 - t + t_0) (t - t_0)] H(t_5 - t) H(t - t_0) + \\ &+ t^2 (\tau_* - \tau_1) H(t_0 - t) + [t_0^2 (\tau_* - \tau_1) + \tau_1 (t_5^2 - t_0^2)] H(t - t_5) \}, \quad t_5 = t_0 \frac{\tau_*}{\tau_1}. \end{aligned}$$

Решение в области V ($\tau_2 \geq 0$, $\tau_1 \geq \tau_*$): $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = 0$, $t \geq 0$.

АЛГОРИТМ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО РЕШЕНИЯ С УЧЕТОМ СУХОГО ТРЕНИЯ

Система уравнений (1)–(3) с нулевыми начальными условиями решалась численно для одиночного удара с использованием явной конечно-разностной схемы:

$$U_1^{n+1} - 2U_1^n + U_1^{n-1} = \tau^2 (Q^n - P_2 L_2 \tau_2 k_2 - P_1 L_1 \tau_1 k_1) / M_1,$$

$$U_2^{n+1} - 2U_2^n + U_2^{n-1} = \tau^2 P_2 L_2 \tau_2 k_2 / M_2.$$

Здесь τ — шаг разностной сетки по времени t ; $U_1^n = U_1(\tau n)$, $U_2^n = U_2(\tau n)$ — перемещения трубы и пробки в момент времени $t = \tau n$; $Q^n = Q(\tau n)$ — амплитуда внешнего воздействия в момент времени $t = \tau n$.

Алгоритм расчета с учетом трения состоит в следующем. Поскольку ни направление, ни сила трения заранее неизвестны, в процессе решения вычисляются сначала скорости перемещений трубы для двух возможных знаков k_1 ($k_1 > 0$ и $k_1 < 0$), при этом полагаем $k_2 = 0$:

а) в первом случае ($k_1 > 0$) введем фиктивную скорость $\dot{U}_1^{0+} = (U_1^{0+} - U_1^n) / \tau$, где $U_1^{0+} = U_1^{n+1} - \tau^2 L_1 \tau_1 P_1 / M_1$;

б) во втором случае ($k_1 < 0$) введем фиктивную скорость $\dot{U}_1^{0-} = (U_1^{0-} - U_1^n) / \tau$, где $U_1^{0-} = U_1^{n+1} + \tau^2 L_1 \tau_1 P_1 / M_1$.

В этих случаях U_1^{n+1} вычисляется из разностного уравнения для трубы без учета трения: $U_1^{n+1} = 2U_1^n - U_1^{n-1} + \tau^2 Q^n / M_1$.

При этом возможны две ситуации:

1. Если скорости \dot{U}_1^{0+} и \dot{U}_1^{0-} одного знака, то в качестве истинного значения смещения U_1^{n+1} из U_1^{0+} , U_1^{0-} , выбирается то $U_1^{0k_1}$, для которого достигается минимум

$$\text{abs}(\dot{U}_1^{0k_1}) = \min[\text{abs}(\dot{U}_1^{0-}), \text{abs}(\dot{U}_1^{0+})].$$

2. Если скорости \dot{U}_1^{0+} и \dot{U}_1^{0-} разных знаков или одна из этих скоростей обращается в нуль, то исходя из предположения о “пассивности” трения, следует вывод о том, что реальная скорость трубы равна нулю.

Далее вычисляем скорости перемещений трубы и пробки для двух возможных знаков k_2 ($k_2 > 0$ и $k_2 < 0$), при этом полагаем, что значение k_1 выбрано на предыдущем шаге:

а) в первом случае ($k_2 > 0$) введем фиктивные скорости $\dot{U}_1^{+k_1} = (U_1^{+k_1} - U_1^n) / \tau$, $\dot{U}_2^+ = (U_2^+ - U_2^n) / \tau$, где $U_1^{+k_1} = U_1^{n+1} - \tau^2 (L_1 \tau_1 P_1 k_1 + L_2 \tau_2 P_2) / M_1$, $U_2^+ = U_2^{n+1} + \tau^2 L_2 \tau_2 P_2 / M_2$;

б) во втором случае ($k_2 < 0$) введем фиктивные скорости $\dot{U}_1^{-k_1} = (U_1^{-k_1} - U_1^n) / \tau$, $\dot{U}_2^- = (U_2^- - U_2^n) / \tau$, где $U_1^{-k_1} = U_1^{n+1} - \tau^2 (L_1 \tau_1 P_1 k_1 - L_2 \tau_2 P_2) / M_1$, $U_2^- = U_2^{n+1} - \tau^2 L_2 \tau_2 P_2 / M_2$.

Величина U_2^{n+1} находится из разностного уравнения для пробки без учета трения: $U_2^{n+1} = 2U_2^n - U_2^{n-1}$.

Как и ранее, здесь возможны две ситуации:

1. Если скорости $\dot{U}_1^{+k_1} - \dot{U}_2^+$ и $\dot{U}_1^{-k_1} - \dot{U}_2^-$ одного знака, то в качестве истинных значений смещений U_1^{n+1} , U_2^{n+1} из $U_1^{+k_1}$, U_2^+ и $U_1^{-k_1}$, U_2^- , выбирается пара $U_1^{k_2 k_1}$, $U_2^{k_2}$, для которой достигается минимум

$$\text{abs}(U_1^{k_2 k_1} - \dot{U}_2^{k_2}) = \min[\text{abs}(U_1^{+k_1} - \dot{U}_2^+), \text{abs}(U_1^{-k_1} - \dot{U}_2^-)].$$

2. Если скорости $\dot{U}_1^{+k_1} - \dot{U}_2^+$ и $\dot{U}_1^{-k_1} - \dot{U}_2^-$ разных знаков или одна из этих скоростей обращается в нуль, то исходя из предположения о “пассивности” трения, следует вывод о том, что реальная относительная скорость трубы и пробки равна нулю. Пробка и труба склеиваются и движутся вместе, следовательно, сила трения между ними отсутствует.

Таким образом, проблема расчета моментов времени, в которые происходит смена режимов покоя трубы (относительного покоя трубы и пробки) и движения трубы (относительного движения трубы и пробки), представляющая основную трудность в аналитических решениях, сводится к выявлению точек, где \dot{U}_1^{0+} и \dot{U}_1^{0-} ($\dot{U}_1^{+k_1} - \dot{U}_2^+$ и $\dot{U}_1^{-k_1} - \dot{U}_2^-$) разных знаков или одна из них обращается в нуль. Поскольку в процессе расчета однозначно определяются величина и направление действия силы трения, на каждом временном слое решается линейная задача, в которой сила трения теперь найдена и входит как нагрузка в правую часть уравнения.

ГРАФИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

На рис. 3–6 представлены зависимости скоростей трубы и пробки от времени, рассчитанные методом конечных разностей и аналитически по формулам (7)–(10) при различных значениях коэффициентов предельного сдвигового напряжения τ_1, τ_2 . Остальные параметры задачи имели следующие значения: длины трубы и пробки $L_1 = L_2 = 1$ м, плотности трубы и пробки $\rho_1 = 7800$, $\rho_2 = 1800$ кг/м³, толщина трубы $h_1 = 0.003$ м, внутренний радиус трубы $R_1 = 0.035$ м, длительность импульса $t_0 = 50$ мс, амплитуда действующей силы $Q_0 = 23000$ Н, шаг разностной сетки по времени $\tau = 0.2$ мс. Данным значениям параметров соответствовали следующие значения массы трубы и пробки: $M_1 \approx 5.37$, $M_2 \approx 6.93$ кг. Поскольку на рис. 3–6 аналитические и численные решения совпали с точностью до погрешностей построения графиков, в дальнейшем не указывается, каким методом получены скорости. На рис. 3–6 сплошные линии соответствуют функциям $\dot{U}_1(t)$, штрихпунктирные — функциям $\dot{U}_2(t)$, вертикальные штриховые — моментам времени $t_0, t_1, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$.

На рис. 3 приведены скорости трубы и пробки, рассчитанные по модели I при $\tau_1 = \tau_*/(\gamma + 1) = 0.036564$ МПа. Параметры задачи для кривых 1 и 2 отвечают области решений I, для кривых 3 — области решений IV. Анализ решений при $\tau_1 = \tau_*/(\gamma + 1)$ показывает: при $\tau_2 = 0$ пробка стоит, труба движется; при $0 < \tau_2 < \tau_*/(\gamma + 1)$ пробка и труба движутся с разными скоростями до момента остановки; при $\tau_2 \geq \tau_*/(\gamma + 1)$ пробка и труба склеиваются в начальный момент времени и движутся вместе до момента остановки.

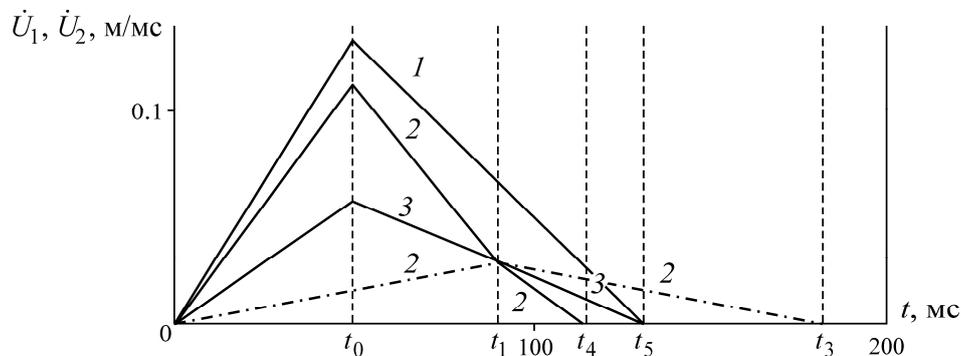


Рис. 3. Скорости трубы и пробки при $\tau_1 = \tau_*/(\gamma + 1)$: 1 — $\tau_2 = 0$; 2 — $\tau_2 = 0.01$ МПа; 3 — $\tau_2 = 0.036564$ МПа

На рис. 4 представлены скорости трубы и пробки, рассчитанные по модели I при $\tau_1 = 2\tau_2$. Параметры задачи для кривой 1 отвечают области решений II, для кривых 2 — области решений I, для кривых 3, 4 — области решений III. Горизонтальные штриховые линии соответствуют значениям $\dot{U}_* = Q_0 t_0 / M_1$ и $\dot{U}_{**} = Q_0 t_0 \beta / M_2 / (\gamma + \alpha)$ ($\alpha = 2$). В случае параметров из области решений III труба и пробка движутся вместе до момента времени t_0 , а затем с разными скоростями до момента остановки.

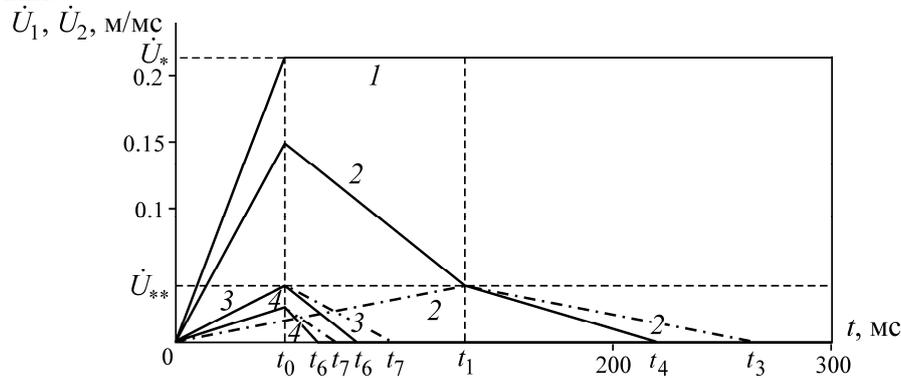


Рис. 4. Скорости трубы и пробки при $\tau_1 = 2\tau_2$: 1 — $\tau_1 = 0$; 2 — $\tau_1 = 0.02$ МПа; 3 — $\tau_1 = 0.053$; 4 — $\tau_1 = 0.07$ МПа

На рис. 5 показаны скорости трубы и пробки, рассчитанные по модели I при $\tau_1 = 0$. Параметры задачи для кривых 1–4 отвечают области решений II, для кривой 5 — области решений IV. Горизонтальная штриховая линия соответствует значению $\dot{U}_* = Q_0 t_0 / (M_1 + M_2)$. Видно, что в случае отсутствия сухого трения на внешней поверхности трубы ($\tau_1 = 0$) скорости трубы и пробки со временем выходят на постоянное значение, равное \dot{U}_* .

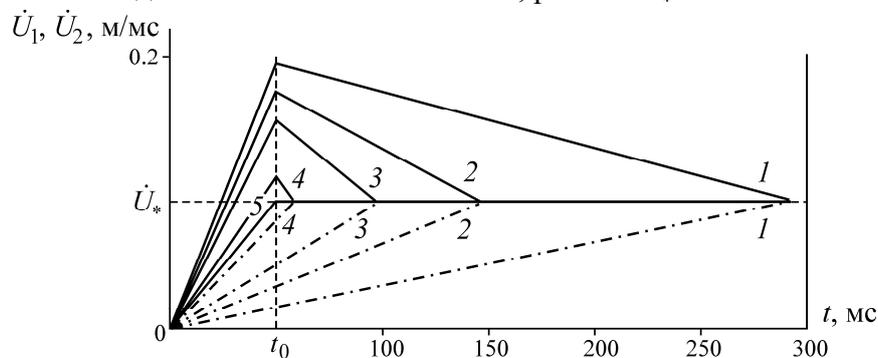


Рис. 5. Скорости трубы и пробки при $\tau_1 = 0$: 1 — $\tau_2 = 0.01$ МПа; 2 — $\tau_2 = 0.02$; 3 — $\tau_2 = 0.03$; 4 — $\tau_2 = 0.05$; 5 — $\tau_2 = 0.0589$ МПа

На рис. 6а приведены скорости трубы и пробки, рассчитанные по модели I при $\tau_1 = \tau_2$. Параметры задачи для кривых 1–4 отвечают области решений II, для кривых 5, 6 — области решений IV. Горизонтальные штриховые линии соответствуют значениям $\dot{U}_* = Q_0 t_0 / M_1$ и $\dot{U}_{**} = Q_0 t_0 \beta / M_2 / (\gamma + \alpha)$ ($\alpha = 1$). Видно, что в отличие от решений области I, в случае решений области II труба и пробка сначала движутся с разными скоростями, т. е. происходит проскальзывание между ними, а затем склеиваются и движутся вместе. Кроме того, значение \dot{U}_{**} постоянно для любых предельных сдвиговых напряжений на внешней и внутренней поверхности трубы при условии, что $\tau_1 / \tau_2 = \text{const}$.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в начальный момент времени площадь соприкосновения трубы и внешнего грунта равна нулю. Будем полагать, что по мере того, как при внешнем воздействии труба погружается в грунт, площадь соприкосновения трубы и окружающего грунта растет пропорционально перемещению U_1 . Уравнения движения в этом случае имеют вид (модель II):

$$M_1 \ddot{U}_1(t) = Q(t) - P_1 U_1 \tau_1 k_1 - P_2 L_2 \tau_2 k_2, \quad M_2 \ddot{U}_2(t) = P_2 L_2 \tau_2 k_2. \quad (11)$$

Получить аналитическое решение уравнений (11) достаточно сложно, поэтому они рассчитывались методом конечных разностей. На рис. 6б представлены результаты расчетов по модели II при тех же параметрах, что и на рис. 6а. Однако скорости перемещений на рис. 6б больше, чем соответствующие скорости на рис. 6а. Объясняется это тем, что если сила трения пропорциональна перемещению трубы, то она меньше, чем когда она пропорциональна длине трубы на всем интервале времени.

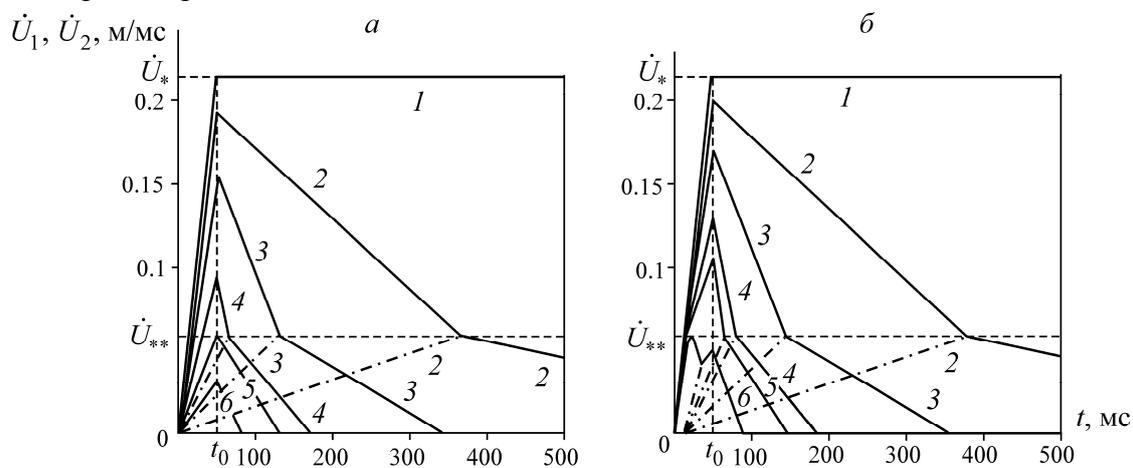


Рис. 6. Скорости трубы и пробки при $\tau_1 = \tau_2$: а — модель I; б — модель II; 1 — $\tau_2 = 0$; 2 — $\tau_2 = 0.005$ МПа; 3 — $\tau_2 = 0.014$; 4 — $\tau_2 = 0.028$; 5 — $\tau_2 = 0.036564$; 6 — $\tau_2 = 0.065$ МПа

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ С УЧЕТОМ И БЕЗ УЧЕТА УПРУГОСТИ ТРУБЫ И ПРОБКИ

Исследуем, насколько правомерно моделировать движение трубы и пробки как жестких сосредоточенных масс. Для этого рассмотрим случай взаимодействия упругой трубы и упругой пробки. Их движение будем описывать как движение упругих стержней одномерными волновыми уравнениями относительно перемещений (модель III):

$$\rho_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = E_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - P_2 \tau_2 \text{sign}(\dot{u}_1 - \dot{u}_2), \quad (12)$$

$$\rho_2 S_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = E_2 S_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + P_2 \tau_2 \text{sign}(\dot{u}_1 - \dot{u}_2). \quad (13)$$

Здесь u_1 , u_2 — перемещения трубы и пробки; τ_2 — предельное сдвиговое напряжение между трубой и пробкой; P_2 — внутренний периметр трубы; S_1 , S_2 — площади поперечного сечения трубы и пробки; E_1 , E_2 — модули Юнга трубы и пробки; ρ_1 , ρ_2 — плотности материала трубы и пробки; t — время; x — осяевая координата. Начальные условия, как и ранее, нулевые. Система координат выбрана так, чтобы ее начало совпадало с ударяемым концом трубы, а ось x была направлена параллельно оси трубы (см. рис. 1). Продольная нагрузка $Q(t) = Q_0 H(t) H(t_0 - t)$ приложена в сечении $x = 0$. На торцах трубы и пробки заданы следующие граничные условия:

$$E_1 S_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -Q(t), \quad E_1 S_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=L_1} = 0, \quad E_2 S_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad E_2 S_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=L_2} = 0. \quad (14)$$

Для решения данной задачи использовалась явная схема типа “крест” метода конечных разностей. Алгоритм расчета сухого трения в процессе численного решения для стержневой модели трубы описан в [21, 22].

На рис. 7 показаны фрагменты скоростей перемещений трубы. Сплошная линия соответствует скорости в среднем сечении трубы ($x = L_1/2$) в случае использования модели III упругих тел. Для модели I жестких масс скорость представлена штрихпунктирной линией. Заметим, что полный график для модели I приведен на рис. 5, кривая 1. Параметры задачи имеют следующие значения: $E_1 = 195 \cdot 10^6$, $E_2 = 0.6 \cdot 10^6$ МПа, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0.01$ МПа, $\tau = 0.002$ мс, шаг разностной сетки по продольной координате $h = 0.01$ м, остальные параметры те же, что и на рис. 3–6.

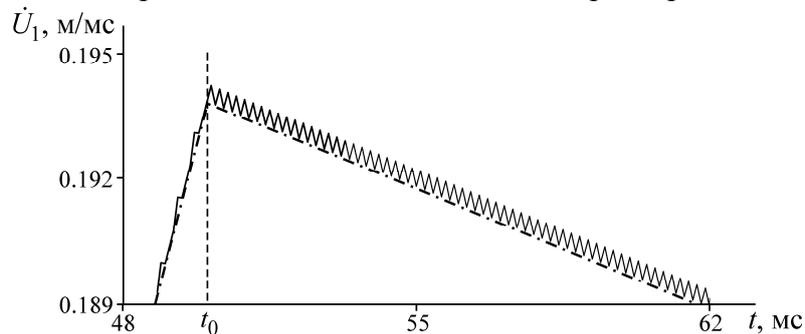


Рис. 7. Скорости трубы: штрихпунктирная линия — модель I, сплошная — модель III

Видно, что качественное поведение решений, описываемых упругой и жесткой моделью взаимодействующих тел, совпадает. Различия состоят в появлении в решении для упругой модели осцилляций, связанных с отражениями волн от торцов трубы. Погрешность в определении максимальной амплитуды скорости трубы, рассчитанная по более простой модели I, составляет менее 0.25% относительно упругой модели III. Сравнение решений по двум моделям свидетельствует о том, что если длительность импульса существенно больше времени пробега волны по трубе туда и обратно со стержневой скоростью, то для описания движения трубы и пробки можно пользоваться упрощенной моделью (1), (2).

ВЫВОДЫ

Получены аналитические решения, описывающие процесс забивания в грунт трубы с грунтовой пробкой. Исследованы различные режимы движения данной системы в зависимости от параметров предельных сдвиговых напряжений на внутренней и внешней поверхности трубы.

Разработаны конечно-разностные алгоритмы расчета различных моделей трубы и пробки с учетом сухого трения. Показано, что численные и аналитические решения совпадают с большой точностью.

Установлено, что в случае импульса достаточно большой длительности влиянием упругости трубы и пробки можно пренебречь и моделировать процесс движения трубы и пробки как сосредоточенных масс.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Coulomb C. A.** Theorie des machines simples. — Bachelier, 1821. — 395 p.
2. **Levitan E. S.** Forced oscillation of a spring-mass system having combined Coulomb and viscous damping, Trans. ASME, 1960, Vol. 32. — P. 1265–1269.

3. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания. — М.: Физматгиз, 1960. — 580 с.
4. Hundal M. S. Response of a base excited system with Coulomb and viscous friction, *J. Sound Vib.*, 1979, Vol. 64. — P. 371–378. Doi: 10.1016/0022-460X(79)90583-2.
5. Pratt T. K. and Williams R. Nonlinear analysis of stick/slip motion, *J. Sound Vib.*, 1981, Vol. 74. — P. 531–542.
6. Pielorz A. and Nadolski W. Criterion of multiple collisions in a simple mechanical system with viscous damping and dry friction, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1983, Vol. 18. — P. 479–489.
7. Martins J. A. C. and Oden J. T. A numerical analysis of a class of problems in elastodynamics with friction, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1983, Vol. 40. — P. 327–360.
8. Oden J. T. and Martins J. A. C. Models and computational methods for dynamic friction phenomena, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1985, Vol. 52. — P. 527–634. Doi: 10.1016/0045-7825(85)90009-X.
9. Oertel Ch. On the integration of the equation of motion of an oscillator with dry friction and two degrees of freedom, *Ing.-Arch.*, 1989, Vol. 60, No. 1. — P. 10–19. Doi: 10.1007/BF00538404.
10. Makris N. and Constantinou M. C. Analysis of motion resisted by friction. I. Constant coulomb and linear Coulomb friction, *Mech. Struct. Mach.*, 1991, Vol. 19, No. 4. — P. 477–500. Doi: 10.1080/08905459108905153.
11. Olsson H., Åström K. J., Canudas de Wit C., Gäfvert M., and Lischinsky P. Friction models and friction compensation, *Eur. J. Control*, 1998, Vol. 4. — P. 176–195.
12. Krivtsov A. M. and Wiercigroch M. Dry friction model of percussive drilling, *Meccanica*, 1999, Vol. 34, No. 6. — P. 425–435. Doi: 10.1023/A:1004703819275.
13. Hong H.-K. and Liu C.-S. Coulomb friction oscillator: modeling and responses to harmonic loads and base excitations, *J. Sound Vib.*, 2000, Vol. 229, No. 5. — P. 1171–1192. Doi: 10.1006/jsvi.1999.2594.
14. Hong H.-K. and Liu C.-S. Non-sticking oscillation formulae for Coulomb friction under harmonic loading, *J. Sound Vib.*, 2001, Vol. 244. — P. 883–898. Doi: 10.1006/jsvi.2001.3519.
15. Renard Y. Numerical analysis of a one-dimensional elastodynamic model of dry friction and unilateral, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2001, Vol. 190. — P. 2031–2050.
16. Bereteu L. Numerical integration of the differential equations for a dynamic system with dry friction coupling, *Facta Univ., Ser. Mech. Autom. Control Robot*, 2003, Vol. 3, No. 14. — P. 931–936.
17. Lopez I., Busturia J., and Nijmeijer H. Energy dissipation of a friction damper, *J. Sound Vib.*, 2004, Vol. 278, No. 3. — P. 539–561. Doi: 10.1016/j.jsv.2003.10.051.
18. Yang S. P. and Guo S. Q. Two-stop-two-slip motions of a dry friction oscillator, *Sci. China, Technol. Sci.*, 2010, Vol. 53, No. 3. — P. 623–632. Doi: 10.1007/s11431-010-0080-x.
19. Al-Bender F. Fundamentals of friction modeling. In: *ASPE Spring Topical Meeting on Control of Precision Systems*, 2010.
20. Rao S. S. *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley Longman Incorporated, USA, 1995. — 912 p.
21. Александрова Н. И. Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. I: Внешняя среда не деформируема // ФТПРПИ. — 2012. — № 5. — С. 104–119.
22. Александрова Н. И. Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. II. Внешняя среда деформируема // ФТПРПИ. — 2013. — № 3. — С. 91–106.
23. Сумбатов А. С., Юнин Е. К. Избранные задачи механики систем с сухим трением. — М.: Физматлит, 2013. — 200 с.
24. Pennestrì E., Rossi V., Salvini P., and Valentini P. P. Review and comparison of dry friction force models. *Nonlinear Dyn.*, 2015, Vol. 83, No. 4. — P. 1785–1801. Doi: 10.1007/s11071-015-2485-3.

Поступила в редакцию 14/X 2017