ЛИТЕРАТУРА

1. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.— М.: Мир, 1975.
2. **Napolitano L. G.** Thermodynamics and dynamics of pure interfaces // Acta Astronaut.— 1978.— V. 5, N 9.
3. **Entov V. M.** On the dynamics of films of viscous and elasto-viscous liquids // Arch. Mech.— 1982.— V. 34, N 4.



*Поступила 11/XII 1987 г.,*
*в окончательном варианте — 4/IV 1988 г.*


---


УДК 532.529.5


# УРАВНЕНИЯ МОДУЛЯЦИЙ ДЛЯ ПУЗЫРЬКОВОЙ СМЕСИ С НЕСЖИМАЕМОЙ НЕСУЩЕЙ ФАЗОЙ


*С. Л. Гаврилюк*

*(Новосибирск)*



Для односкоростного течения монодисперсной пузырьковой смеси с несжимаемой несущей фазой выведена система уравнений, промежуточная между известными равновесной и неравновесной моделями. Достоинство полученных уравнений — раздельное описание средних характеристик течения (скорость, давление, полная энергия смеси) и быстрых осцилляций на фоне этого среднего движения. При отсутствии диссипации уравнения для средних величин совпадают с уравнениями движения невязкого нетеплопроводного газа.


**1. Исходные уравнения движения.** В рамках модели Иорданского — Когарко [1, 2] (см. также [3, 4]) исследуется односкоростное течение монодисперсной пузырьковой смеси с несжимаемой несущей фазой:

$$v_t - u_x = 0,\ u_t + p_x = 0; \tag{1.1}$$

$$RR_{tt} + 3R_t^2/2 = (p_2 - p - 2\sigma/R)/\rho_1 - 4\nu_1 R_t/R; \tag{1.2}$$

$$c_{2t} = 0,\ n_t = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $t$ — время; $x$ — массовая лагранжева координата (см., например, [5]); $u$ — скорость смеси; $v = c_1/\rho_1 + c_2 v_2$ — удельный объем смеси; $c_i$ — массовые концентрации ($c_1 + c_2 = 1$, $c_2 = \alpha_2 v/v_2$); $\alpha_2$ — объемная концентрация газа; $\rho_1$ — плотность жидкости, которая предполагается несжимаемой; $v_2 = n4\pi R^3/(3c_2)$— удельный объем газа; $R$ — радиус пузырька; $\sigma$ — коэффициент поверхностного натяжения; $n$ — число пузырьков в единице массы смеси; $p$ — давление в смеси, которое полагается равным давлению в жидкости; $p_2 = p_2(v_2)$— давление в газе; $\nu_1$ — коэффициент кинематической вязкости жидкости. Массовая лагранжева координата $x$ введена для сокращения записи формул. Отметим, что уравнение Рэлея — Ламба (1.2) с учетом формул (1.1), (1.3) можно записать в виде

$$(\varepsilon + u^2/2 + n(E_r + E_\sigma))_t + (pu)_x = -8\nu_1 n E_r/R^2, \tag{1.2a}$$

где

$$\varepsilon = c_2\varepsilon_2(v_2),\ d\varepsilon_2/dv_2 = -p_2,\ E_r = 2\pi R^3\rho_1 R_t^2,\ E_\sigma = 4\pi R^2\sigma. \tag{1.4}$$

Формула (1.2) вытекает из (1.2a) непосредственно после дифференцирования и использования соотношений (1.4). Для сжимаемой жидкости запись уравнения Рэлея — Ламба в виде закона сохранения имеется, например, в [6].

Исследуется класс быстро осциллирующих решений системы (1.1)—(1.3). Это означает, что в течении присутствуют два характерных масштаба: $\lambda$, $L$ — длина короткой и модулированной волны, так что параметр $\delta = \lambda/L$ предполагается малым. Общий подход к изучению такого класса решений, представляющий, по существу, вариант метода усреднения Крылова — Боголюбова — Митропольского, был разработан для консервативных систем Д. Б. Уиземом [7] и его последователями. Различные асимптотические методы построения таких сингулярных решений и их приложения к гидродинамике, нелинейной оптике и т. д. представлены также в [8].

**2. Вывод уравнений модуляций.** В качестве исходных будем рассматривать уравнения (1.1)—(1.3). Пусть $\delta$ — малый параметр. Согласно [7], введем медленные переменные $T = \delta t$, $X = \delta x$ и быструю переменную (фазу) $\theta = \Theta(T, X)/\delta$; назовем $k = \theta_x = \Theta_X$ локальным волновым числом, $\omega = -\theta_t = -\Theta_T$ — локальной частотой. Обозначив $\mathbf{w} = (R, p, u, c_2, n)$, считаем, что $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\theta, T, X)$, причем зависимость от переменной $\theta$ предполагается периодической. Не уменьшая общности, период полагаем равным $2\pi$. Действительно, если период $\tau_0$, то достаточно сделать замену $\theta' = 2\pi\theta/\tau_0$. Принимая во внимание формулы замены производных

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -\omega\frac{\partial}{\partial\theta} + \delta\frac{\partial}{\partial T}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \to k\frac{\partial}{\partial\theta} + \delta\frac{\partial}{\partial X},$$

из исходной системы получаем расширенную

$$\delta(v_T - u_X) + (-v\omega - uk)_\theta = 0, \ \delta(u_T + p_X) + (-u\omega + pk)_\theta = 0,$$

$$\delta\{(\varepsilon + u^2/2 + n(E_r + E_\sigma))_T + (pu)_X\} +$$

$$+ (-\omega(\varepsilon + u^2/2 + n(E_r + E_\sigma)) + kpu)_\theta = -8\nu_1 nE_r/R^2,$$

$$\delta n_T + (-n\omega)_\theta = 0, \ \delta c_{2T} + (-c_2\omega)_\theta = 0.$$

Будем также считать, что коэффициент вязкости жидкости $\nu_1$ — либо нуль, либо $O(\delta)$. В последнем случае $\nu = \lim\limits_{\delta\to 0} \nu_1/\delta$. Представляя $\mathbf{w}$ в виде ряда $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0(\theta, T, X) + \delta\mathbf{w}_1(\theta, T, X) + \ldots$, удержим в расширенной системе только члены, содержащие в качестве сомножителя либо $\delta^0$, либо $\delta$. При $\delta^0$ возникают законы сохранения (после интегрирования по $\theta$)

$$v_0\omega + u_0k = M(T, X), \ -u_0\omega + p_0k = P(T, X),$$

$$n_0 = N(X), \ c_{20} = C(X),$$

$$-\omega\left(\varepsilon_0 + n_0(E_{r0} + E_{\sigma 0}) + u_0^2/2\right) + kp_0u_0 = A(T, X),$$

а при $\delta$ уравнения

$$v_{0T} - u_{0X} + (-v_1\omega - u_1k)_\theta = 0, \ u_{0T} + p_{0X} + (-u_1\omega + p_1k)_\theta = 0,$$

$$(\varepsilon_0 + n_0(E_{r0} + E_{\sigma 0}) + u_0^2/2)_T + (p_0u_0)_X + F(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1)_\theta = -8\nu n_0E_{r0}/R_0^2,$$

$$n_{0T} + (-n_1\omega)_\theta = 0, \ c_{20T} + (-c_{21}\omega)_\theta = 0.$$

Функцию $F(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1)$ легко можно восстановить из уравнения энергии. Для произвольной функции $f(\theta, T, X)$ обозначим

$$\langle f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta, T, X)\,d\theta.$$

Тогда, пользуясь периодичностью $\mathbf{w}_0$ и $\mathbf{w}_1$, после интегрирования по $\theta$ имеем следующую систему уравнений для $\mathbf{w}_0$ и $\langle\mathbf{w}_0\rangle$ (индекс нуль у зависимых переменных опускается):

$$\langle v\rangle_T - \langle u\rangle_X = 0, \ \langle u\rangle_T + \langle p\rangle_X = 0; \tag{2.1}$$

$$\langle\varepsilon + n(E_r + E_\sigma) + u^2/2\rangle_T + \langle pu\rangle_X = -8\nu\langle nE_r/R^2\rangle; \tag{2.2}$$

$$\langle n\rangle_T = 0, \ \langle c_2\rangle_T = 0. \tag{2.3}$$

Так как $n$ и $c_2$ от $\theta$ не зависят, то $\langle n\rangle = n$, $\langle c_2\rangle = c_2$. Для простоты в дальнейшем полагаем $n$ и $c_2$ постоянными. Уравнения, возникающие при $\delta^0$, запишем в виде

$$v\omega + uk = \langle v\rangle\omega + \langle u\rangle k, \ -u\omega + pk = -\langle u\rangle\omega + \langle p\rangle k; \tag{2.4}$$

$$-\omega(\varepsilon + n(E_r + E_\sigma) + u^2/2) + puk = A(T, X). \tag{2.5}$$

Отметим, что если $\nu_1 = 0$, то уравнения (2.1)—(2.5) можно было бы получить, используя метод усредненного лагранжиана [7], формулируемого для функционала, представляющего собой действие по Гамильтону

$$I=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[q_t^2/2+n\left(E_r-E_\sigma\right)-\varepsilon+p\left(q_x-c_1/\rho_1-n4\pi R^3/3\right)\right]dt\,dx$$

($q_t = u$, $q_x = v$, $q$ — эйлерова координата).

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы написать замкнутую систему уравнений для средних величин. Соответствующая система получена в два этапа. Во-первых, доказан следующий замечательный факт.

**Теорема 2.1.** *Выполнены равенства* $\langle pu\rangle=\langle p\rangle\langle u\rangle+O(\alpha_2^2)$, $\langle u\rangle^2=\langle u\rangle^2+O(\alpha_2^2)$ ($\alpha_2$ — *объемная концентрация пузырьков*).

Это на самом деле означает, что соответствующие корреляции расщепляются. Действительно, исходная система (1.1)—(1.3) получена отбрасыванием членов $O(\alpha_2^2)$ [1], и потому удерживать члены такого порядка бессмысленно. Во-вторых, выписаны конкретные формулы для величин типа $\langle E_r\rangle$.

Доказательство. Умножим первое из уравнений (2.4) на $vk^{-1}$, а затем осредним. Аналогичную процедуру проделаем и после умножения этого же уравнения на $uk^{-1}$. Обозначая $D=\omega/k$, имеем

$$\langle uv\rangle-\langle u\rangle\langle v\rangle=\left(\langle v\rangle^2-\langle v^2\rangle\right)D; \tag{2.6}$$

$$\langle u^2\rangle-\langle u\rangle^2=\left(\langle v\rangle\langle u\rangle-\langle vu\rangle\right)D. \tag{2.7}$$

Из (2.6), (2.7) вытекает

$$\langle u^2\rangle-\langle u\rangle^2=\left(\langle v^2\rangle-\langle v\rangle^2\right)D^2. \tag{2.8}$$

Умножая второе уравнение (2.4) на $uk^{-1}$ и используя (2.8), аналогично получим

$$\langle pu\rangle-\langle p\rangle\langle u\rangle=D^3\left(\langle v^2\rangle-\langle v\rangle^2\right). \tag{2.9}$$

Заметим, что $v=c_1/\rho_1+4\pi R^3n/3$, т. е. $\langle v^2\rangle-\langle v\rangle^2=(4\pi n)^2(\langle R^6\rangle-\langle R^3\rangle^2)/9=O(\alpha_2^2)$. Так как фазовая скорость $D$ конечна (в противном случае, как это следует из формул (2.4), зависимость от быстрой переменной исчезает), то из равенств (2.8), (2.9) вытекает утверждение теоремы.

Вычислим $\langle\varepsilon+n(E_r+E_\sigma)\rangle$ и $\langle E_r/R^2\rangle$. Для этого преобразуем формулу (2.5). Подставляя вместо $u$ и $p$ выражения $u=\langle u\rangle-(v-\langle v\rangle)D$, $p=\langle p\rangle-(v-\langle v\rangle)D^2$, находим $\varepsilon+n(E_r+E_\sigma)+\langle p\rangle v-(v-\langle v\rangle)^2\times D^2/2=H(T,X)$, $H(T,X)=-A(T,X)/\omega-\langle u\rangle^2/2+\langle p\rangle\langle u\rangle/D+\langle p\rangle\times\langle v\rangle$. Так как $(v-\langle v\rangle)^2=O(\alpha_2^2)$, то окончательно получаем

$$\varepsilon+n(E_r+E_\sigma)+\langle p\rangle v=H(T,X) \tag{2.10}$$

($H$ имеет смысл удельной внутренней энергии смеси). Из (2.10), в частности, следует

$$\langle\varepsilon+n(E_r+E_\sigma)\rangle=H-\langle p\rangle\langle v\rangle. \tag{2.11}$$

Так как $E_r=2\pi R^3\rho_1R_\theta^2\omega^2$, то (2.10) можно переписать в виде

$$2\pi R^3\rho_1n\omega^2R_\theta^2=\Phi(H,\langle p\rangle,R)\equiv H-\langle p\rangle v-nE_\sigma-\varepsilon. \tag{2.12}$$

Если функция $\Phi$ имеет два простых нуля: $R_1(H,\langle p\rangle)$, $R_2(H,\langle p\rangle)$ ($R_1<R_2$), между которыми $\Phi>0$, то это будет означать, что быстрая переменная введена корректно. Ниже приведены конкретные примеры, когда такое введение имеет смысл. Равенство периода колебаний $2\pi$ дает нелинейное дисперсионное соотношение, вытекающее из (2.12):

$$\omega=\omega(H,\langle p\rangle)=\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}n\rho_1}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{R^{3/2}}{\sqrt{\Phi}}\right)^{-1}. \tag{2.13}$$

Далее,

$$(2.14)\qquad \langle nE_r/R^2\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} nE_r/R^2 d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{nE_r dR}{R^2 dR/d\theta} =$$

$$= \left(\int_{R_1}^{R_2} R^{-1/2}\sqrt{\Phi}\, dR\right)\Bigg/\left(\int_{R_1}^{R_2} \frac{R^{3/2}dR}{\sqrt{\Phi}}\right),$$

а выражение для среднего удельного объема смеси

$$(2.15)\qquad \langle v\rangle = V(H, \langle p\rangle) = c_1/\rho_1 + 4\pi n\langle R^3\rangle/3 =$$

$$= c_1/\rho_1 + (4\pi n/3)\left(\int_{R_1}^{R_2} \frac{R^{9/2}\,dR}{\sqrt{\Phi}}\right)\Bigg/\left(\int_{R_1}^{R_2} \frac{R^{3/2}dR}{\sqrt{\Phi}}\right).$$

Окончательно, в исходных нерастянутых переменных $t$, $x$ с учетом теоремы 2.1 и равенства (2.11) получаем систему уравнений для средних $\langle u\rangle$, $\langle p\rangle$, $H$:

$$(2.16)\qquad \langle v\rangle_t - \langle u\rangle_x = 0;$$

$$(2.17)\qquad \langle u\rangle_t + \langle p\rangle_x = 0;$$

$$(2.18)\qquad (H - \langle p\rangle\langle v\rangle + \langle u\rangle^2/2)_t + (\langle p\rangle\langle u\rangle)_x = -8\nu_1\langle nE_r/R^2\rangle$$

($\langle v\rangle = V(H, \langle p\rangle)$ дается формулой (2.15), а $\langle nE_r/R^2\rangle$ — (2.14)). Если известны значения средних величин, то можно восстановить и пульсации. Действительно, из уравнения совместности $\theta_{tx} = \theta_{xt}$ следует

$$(2.19)\qquad k_t + \omega_x = 0.$$

Задавая $k(0, x)$, из (2.13), (2.19) определяем $k(t, x)$. Зависимость $R(\theta, t, x)$ находим из (2.12), а $u(\theta, t, x)$ и $p(\theta, t, x)$ — из (2.4).

**3. Анализ системы (2.16)—(2.18) и конкретные примеры.** Уравнения модуляций совпадают с уравнениями невязкого нетеплопроводного газа, в котором присутствует сток энергии (если $\nu_1 \neq 0$). При этом $H$ — энтальпия такого газа. Получим выражение для «температуры» и «энтропии» газожидкостной смеси.

**Теорема 3.1.** *Пусть* $\tau = \omega$, $S = 2\sqrt{2n\rho_1/\pi}\int_{R_1}^{R_2} R^{3/2}\sqrt{\Phi}\,dR$. *Тогда* $\tau dS = dH - \langle v\rangle d\langle p\rangle$.

Доказательство. Достаточно показать, что $\tau S_H = 1$, $\tau S_{\langle p\rangle} = -\langle v\rangle$, что проверяется непосредственным дифференцированием и использованием формулы (2.15).

Замечание. Если $\nu_1 \neq 0$, то на непрерывных решениях «энтропия» $S$ (мера интенсивности колебаний в смеси) убывает.

Выясним тип системы уравнений модуляций. Вычисляя наклоны характеристик, получим $\lambda_{1,3} = \mp 1/\sqrt{-VV_H - V_{\langle p\rangle}}$, $\lambda_2 = 0$. Следовательно, условие гиперболичности состоит в том, что

$$(3.1)\qquad VV_H + V_{\langle p\rangle} < 0.$$

**Теорема 3.2.** *Пусть* $R_*$ *— точка равновесия, т. е.* $\Phi_R(H, \langle p\rangle, R_*) = 0$. *Предположим также, что* $\Phi_{RR}(H, \langle p\rangle, R_*) < 0$. *Тогда неравенство* (3.1) *выполнено при малых отклонениях от положения равновесия.*

Доказательство. Разложим функцию $\Phi(H, \langle p\rangle, R)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $R_*$, $\Phi_R(H, \langle p\rangle, R_*) = 0$:

$$(3.2)\qquad \Phi(H, \langle p\rangle, R) = \Phi_* + \Phi_{RR}(H, \langle p\rangle, R_*)(R - R_*)^2/2 + \ldots$$

Так как $\Phi_R = 4\pi R^2 n(p_2 - 2\sigma/R - \langle p\rangle)$, то

$$(3.3)\qquad \Phi_{RR}(H, \langle p\rangle, R_*) = 4\pi R_* n(2\sigma/R_* + 3v_2 dp_2/dv_2|_{R=R_*}).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что если газ в пузырьках политропный и $\langle p\rangle > 0$, то $\Phi_{RR}(H, \langle p\rangle, R_*) < 0$. Действительно, $\operatorname{sgn} \Phi_{RR}(R_*) = \operatorname{sgn}(p_2(1-3\gamma) - \langle p\rangle) = -1$, так как $\gamma > 1$ ($\gamma$ — показатель политропы). Главный член, определяющий уравнение состояния, запишем в виде $v = c_1/\rho_1 + 4\pi n R_*^3/3$. Так как $R_*$ зависит только от $\langle p\rangle$, то $V_H = 0$, а производная по $\langle p\rangle$ вычисляется по формуле

$$V_{\langle p\rangle} = 4\pi n R_*^2 dR_*/d\langle p\rangle = 4\pi n R_*^3/(2\sigma/R_* + 3v_2 dp_2/dv_2|_{R=R_*}).$$

Знак знаменателя дроби в выражении для $V_{\langle p\rangle}$ совпадает с $\Phi_{RR}(H, \langle p\rangle, R_*)$. Тем самым теорема доказана.

Всюду ниже будем полагать $\sigma = 0$. Вычислим в этом случае для малых отклонений от положения равновесия главное значение частоты $\omega$, определяемой формулой (2.13). Обозначим $B = -2\Phi_*/\Phi_{RR}(R_*)$ (см. (3.2)). Тогда

$$\omega \sim \omega_0 = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi} n\rho_1}\, R_*^{3/2} \int_{R_{1*}}^{R_{2*}} \frac{dR}{\sqrt{-\frac{\Phi_{RR}(R_*)}{2}}\,\sqrt{B-(R-R_*)^2}} \right\}^{-1}$$

($R_{i*}$ — корни уравнения $B = (R-R_*)^2$). Делая подстановку $R = (R_{2*} + R_{1*})/2 + s(R_{2*} - R_{1*})/2$ и пользуясь формулой (3.3) с $\sigma = 0$, получаем

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{-3v_2 dp_2/dv_2}{\rho_1 R_*^2}}\Bigg|_{R=R_*}.$$

Если газ политропный, то

$$\omega_0 = \sqrt{3\gamma\langle p\rangle/(\rho_1 R_*^2)}. \tag{3.4}$$

Выражение (3.4) совпадает, как и следовало ожидать, с резонансной частотой Миннаерта [4, с. 303].

Исследуем уравнение состояния (2.15) при интенсивных колебаниях в модельном случае, когда газ в пузырьках политропный с $\gamma = 2$. При этом значении $\gamma$ корни уравнения $\Phi = 0$ вычисляются явно. Действительно, функция $\Phi$ запишется в виде

$$\Phi = H - \langle p\rangle(c_1/\rho_1 + 4\pi R^3 n/3) - p_0 R_0^6 4\pi R^{-3} n/3 \tag{3.5}$$

($p_0$, $R_0$ —постоянные, характеризующие адиабатический процесс $(p_2 R^6 = p_0 R_0^6)$). Обозначим

$$a = H - \langle p\rangle c_1/\rho_1,\ b = 4\pi n\langle p\rangle/3,\ c = 4\pi n R_0^6 p_0/3,\ z = R^3. \tag{3.6}$$

Тогда формула (2.15) преобразуется:

$$\langle v\rangle = V(H, \langle p\rangle) = c_1/\rho_1 + (4\pi n/3) I(4/3)/I(1/3) \tag{3.7}$$

$\left( I(\alpha) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^\alpha\, dz}{\sqrt{az - bz^2 - c}},\ z_i \text{ — корни уравнения } az - bz^2 - c = 0 \right)$. Делая замену $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$, имеем

$$I(\alpha) = \frac{(z_2 - z_1)^\alpha}{\sqrt{b}} \int_0^1 \frac{(t + z_1/(z_2 - z_1))^\alpha\, dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Предположим, что рассматриваются сильные колебания, т. е. параметр $\varepsilon_1 = z_1/(z_2 - z_1)$ мал. Тогда из (3.7) вытекает

$$\langle v\rangle = c_1/\rho_1 + 4\pi n(z_2 - z_1)/3\, \frac{\int_0^1 t^{5/6}(1-t)^{-1/2}\, dt + m_1}{\int_0^1 t^{-1/6}(1-t)^{-1/2}\, dt + m_2}$$

$(m_1 = O(\varepsilon_1)$, $m_2 = O(\varepsilon_1^{1/3}))$. Оценка для $m_1$ следует из неравенства $(t + \varepsilon_1)^\alpha - t^\alpha \leqslant \varepsilon_1 \alpha (t + \varepsilon_1)^{\alpha - 1}$ при $1 < \alpha < \infty$, а для $m_2$ — из $(t + \varepsilon_1)^{1/3} - t^{1/3} \leqslant \varepsilon_1^{1/3}$. Так как $z_1 = \varepsilon_1 z_2 + O(\varepsilon_1^2)$, то с учетом (3.6) окончательно находим

$$(3.8) \qquad \langle v \rangle = c_1/\rho_1 + \mu (H - \langle p \rangle c_1/\rho_1)/\langle p \rangle + O(\varepsilon_1^{1/3}).$$

Здесь коэффициент $\mu$ вычисляется по формуле

$$(3.9) \qquad \mu = \mathrm{B}(11/6,\ 1/2)/\mathrm{B}(5/6,\ 1/2)$$

($\mathrm{B}(x, y)$ — полная бета-функция [9]). Так как $\mathrm{B}(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p + q)$ ($\Gamma(z)$ — гамма-функция, $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$), то из (3.9) вытекает, что $\mu = 5/8$. Так как $\mu < 1$, то неравенство (3.1) выполнено, т. е. система уравнений модуляций гиперболическая. Делая замену

$$(3.10) \qquad H \to H + \langle p \rangle c_1/\rho_1, \quad \langle v \rangle \to \langle v \rangle + c_1/\rho_1$$

и отбрасывая члены порядка $O(\varepsilon_1^{1/3})$, из (3.8) получаем, что газожидкостная среда ведет себя как политропный газ с показателем политропы 8/3. Интересно отметить, что такой «газ» не является идеальным (совершенным) [5]. Действительно, вычислим «энтропию» $S$ (см. теорему 3.1):

$$S = \sqrt{\frac{2}{\pi} n \rho_1} \frac{2}{3} \sqrt{b} (z_2 - z_1)^{4/3} \int_0^1 (t + z_1/(z_2 - z_1))^{-2/3} \sqrt{t(1-t)}\, dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi} n \rho_1} \frac{2}{3} \sqrt{b} \left(\frac{a}{b}\right)^{4/3} \int_0^1 (1 - t)^{1/2} t^{-1/6} dt + m_3$$

$(m_3 = O(\varepsilon_1^{1/3}))$. Оценка для $m_3$ следует из неравенства $|(t + \varepsilon_1)^{-2/3} - t^{-2/3}| \leqslant 2\varepsilon_1^{1/3} t^{-1}$. Или, отбрасывая члены $O(\varepsilon_1^{1/3})$, с учетом (3.6), (3.10) имеем

$$(3.11) \qquad S = c_0 H^{4/3} \langle p \rangle^{-5/6}, \quad c_0 = \sqrt{2n\rho_1/\pi}(4\pi n/3)^{-5/6}(2/3)\mathrm{B}(5/6,\ 3/2).$$

Из (3.8)—(3.11) находим

$$\langle p \rangle = \left(\frac{S}{c_0}\right)^2 \mu^{8/3} \langle v \rangle^{-8/3} = \frac{c_0^2}{(3/4)^2 \mu^{2/3}} \langle v \rangle^{2/3} \tau^2$$

($\tau = (S_H)^{-1}$ — «температура»). Тем самым доказано, что уравнение Клапейрона не выполняется.

**4. Разрывные решения уравнений модуляций.** Из вышеприведенных примеров видно, что в некоторой области параметров среды система уравнений модуляций гиперболична. Тем самым правомерно рассмотрение ударных волн в такой среде. Отметим, что исходная система (1.1)—(1.3) ударных волн не допускает. Действительно, скорость распространения слабых возмущений здесь бесконечна, и потому сверхзвуковой характер движения перед фронтом волны обеспечить невозможно.

Условия Гюгонио для (2.16)—(2.18) представляют собой обычные законы сохранения массы, импульса и энергии на скачке. Частота $\omega$ за фронтом волны определяется из конечного соотношения (2.13). И наконец, условие сохранения фазы на скачке, следующее из (2.19), $U[k] = [\omega]$ ($U$ — скорость разрыва, квадратные скобки означают скачок величины), дает значение волнового числа за фронтом волны. Таким образом, система соотношений на разрыве полная.

Вопрос о сохранении фазы спорный. Соответствующие доводы за, а также некоторые альтернативные подходы имеются в [7, с. 500—503; 10, с. 42—45].

Автор признателен Р. М. Гарипову, замечания которого существенно улучшили первоначальный вариант статьи, а также В. Ю. Ляпидевскому за обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Иорданский С. В.** Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки га за // ПМТФ.— 1960.— № 6.
2. **Когарко Б. С.** Одномерное неустановившееся движение жидкости с возникнове нием и развитием кавитации // ДАН СССР.— 1964.— Т. 155.— № 4.
3. **Гарипов Р. М.** Замкнутые уравнения движения жидкости с пузырьками / ПМТФ.— 1973.— № 6.
4. **Нигматулин Р. И.** Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.
5. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики.— М.: Наука, 1981.
6. **Ляпидевский В. Ю., Плаксин С. И.** Структура ударных волн в газожидкостно среде с нелинейным уравнением состояния // Динамика сплошной среды.— Но восибирск: ИГ СО АН СССР, 1983.— Вып. 62.
7. **Уизем Д. Б.** Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
8. **Маслов В. П.** Асимптотические методы решения псевдодифференциальных урав нений.— М.: Наука, 1987.
9. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике.— М.: Наука, 1978.
10. **Доброхотов С. Ю., Маслов В. П.** Конечнозонные почти периодические решени в ВКБ-приближениях.— М.: ВИНИТИ. Сер. Современные проблемы математи ки, 1980.— Т. 15.


*Поступила 19/XI 1987 г.*

УДК 517.9 + 532.5 + 534.26

# ЭФФЕКТ ВОЛНОВОДА

*С. В. Сухинин*

*(Новосибирск)*

Основная цель теории рассеяния — изучение качественных особенностей рас сеянных волн. В настоящей работе исследованы аномальные явления типа эффект волновода для задач рассеяния на одномерно-периодических структурах. Эффект вол новода, по определению Р. М. Гарипова,— существование собственных волн, локали зованных в окрестности структуры. Свойства этих волн описываются обобщенным собственными функциями, которые являются решениями задач для установившихс колебаний. Рассмотрены условия существования и возможность эффекта волновод для одномерно-периодических структур: для длинных волн на мелкой воде — одно мерно-периодическая цепочка островов, или береговая линия, или одномерно-перио дический подводный хребет типа плато; для акустических или электромагнитны волн — одномерно-периодическая решетка пластин или гладких препятствий *.

**1. Формулировка задач. Необходимые сведения.** Пусть Г описывае на плоскости $\mathbf{R}^2$ декартовых переменных $(x, y)$ границу свободного про странства и препятствия. Считается, что Г может быть связной кривой ил совокупностью достаточно гладких замкнутых или разомкнутых кривых Предполагается, что Г периодична вдоль оси $y$ с периодом $2\pi$. Препятстви могут быть проницаемыми или непроницаемыми (рис. 1).

Волновые явления около препятствий описываются достаточно глад кой вне границы препятствия Г комплексно-значной функцией $u(x, y)$ физическое содержание которой конкретизируется в зависимости от зада чи. Пусть $\Omega_1$ и $\Omega_2$ — области, на которые Г делит плоскость $\mathbf{R}^2$. Сужени функции $u(x, y)$ на области $\Omega_1$ и $\Omega_2$ обозначено далее $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ соот ветственно. Функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ должны быть решениями уравнени Гельмгольца

(1.1) $$(\Delta + \varkappa^2\lambda^2)u_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (\Delta + \lambda^2)u_2 = f \text{ в } \Omega_2.$$

На границе Г областей $\Omega_1$ и $\Omega_2$ выполняются условия сопряжения

(1.2) $$\delta u_1 = u_2, \quad \gamma \partial u_1/\partial \mathbf{n} = \partial u_2/\partial \mathbf{n} \text{ на } \Gamma.$$

Здесь $\varkappa > 0$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$ — вещественные, а $\lambda$ — комплексный парамет ры, физический смысл которых определяется содержанием исследуемог явления. Функция $f(x, y)$ описывает источники колебаний и считается пе риодической по $y$ с периодом $2\pi$ и локализованной в окрестности структу

* Основные результаты этой работы были доложены на VI Всесоюзном съезд по теоретической и прикладной механике.