УДК 532.516

НЕРЕЗОНАНСНЫЙ СЛУЧАЙ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ БИФУРКАЦИОННЫХ КРИВЫХ В ЗАДАЧЕ КУЭТТА — ТЕЙЛОРА

И. В. Моршнева, С. Н. Овчинникова

Южный федеральный университет, 344006 Ростов-на-Дону
E-mail: morsh4@yandex.ru

Рассматривается нерезонансный случай (Res 0) движения вязкой несжимаемой жидкости между соосными вращающимися цилиндрами в малой окрестности точки бифуркации коразмерности 2, когда амплитудная система имеет лишь обязательные резонансные слагаемые. Получены условия существования и устойчивости ее решений, которым соответствуют различные периодические и квазипериодические решения системы уравнений Навье — Стокса. В малой окрестности некоторых точек резонанса Res 0 найдены области существования и устойчивости этих решений.

Ключевые слова: нейтральные кривые, бифуркация коразмерности 2, резонансы, амплитудные уравнения.

Задача о течении вязкой несжимаемой жидкости между твердыми соосными вращающимися цилиндрами инвариантна относительно линейного ортогонального действия группы $G = SO(2) \times O(2)$. При всех значениях параметров данная задача имеет точное решение — вращательное течение Куэтта.

Точке пересечения двух нейтральных кривых (точке бифуркаций коразмерности 2) в задаче Куэтта — Тейлора соответствует несколько независимых нейтральных мод. В случае если параметры задачи изменяются в малой окрестности этой точки, становится возможным сильное взаимодействие всех нейтральных мод (точнее, несколько измененных), которое описывается нелинейной системой амплитудных уравнений, определенных на центральном многообразии. Амплитудные системы могут иметь G-стационарные решения, которым соответствуют различные периодические и квазипериодические решения системы Навье — Стокса, как устойчивые, так и неустойчивые. Впервые такие системы амплитудных уравнений для задачи Куэтта — Тейлора получены в работах [1–3] для случая одного из резонансов (Res 1).

Как известно, в случае невращательно-симметричных мод существует семь типов амплитудных систем, которые различаются ведущими кубическими резонансными слагаемыми. В настоящей работе рассмотрен нерезонансный случай Res 0, когда в амплитудной системе присутствуют только обязательные резонансные слагаемые. Точки резонанса Res 0, образующие двухпараметрические семейства в пространстве параметров, существуют вблизи каждой точки нейтральной кривой (точки простейшей бифуркации) и вблизи

Работа выполнена при финансовой поддержке Европейской научной лаборатории “Вихревая гидродинамика” и Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 07-01-92213, 09-01-00658-а), а также в рамках аналитических ведомственных целевых программ “Развитие научного потенциала высшей школы” № 2.1.1/554, 2.1.1/6095.

точек бифуркации коразмерности 2, соответствующих другим резонансам. Для фиксированных значений некоторых параметров задачи приведены результаты расчета точек резонанса Res 0, для которых вычислены коэффициенты амплитудной системы и проведен численный анализ условий существования и устойчивости G-стационарных решений амплитудной системы.

Настоящая работа, являющаяся продолжением работы [4], своим появлением в большой степени обязана учителю авторов В. И. Юдовичу.

1. Постановка задачи. Течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными соосными твердыми цилиндрами, имеющими радиусы r_1, r_2 и вращающимися с угловыми скоростями Ω_1, Ω_2 соответственно, описывается системой уравнений Навье — Стокса. Предполагается, что решения уравнений движения имеют периодические вдоль оси цилиндров (оси z) поля скорости и давления с заданным периодом $2\pi/\alpha$.

Система уравнений Навье — Стокса зависит от четырех безразмерных параметров: чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}_1 = \Omega_1 r_1^2/\nu$, $\mathrm{Re}_2 = \Omega_2 r_2^2/\nu$ (ν — кинематическая вязкость), отношения радиусов цилиндров $\eta = r_2/r_1$ и осевого волнового числа α. Известно, что при любых значениях параметров существует точное стационарное решение уравнений движения — течение Куэтта.

Как система уравнений Навье — Стокса, так и линеаризованная на течении Куэтта задача обладают группой симметрии $G = SO(2) \times O(2)$, т. е. являются инвариантными относительно вращений вокруг оси z и сдвигов вдоль нее, а также относительно преобразования инверсии, которые действуют на поле скоростей $\boldsymbol{u}$ по правилам

$$(L_\theta^\delta \boldsymbol{u})(t,r,\theta,z) = \boldsymbol{u}(t,r,\theta+\delta,z), \qquad (L_z^h \boldsymbol{u})(t,r,\theta,z) = \boldsymbol{u}(t,r,\theta,z+h),$$
$$(J\boldsymbol{u})(t,r,\theta,z) = (u_r(t,r,\theta,-z), u_\theta(t,r,\theta,-z), -u_z(t,r,\theta,-z)).$$

В силу симметрии задачи нормальные колебания находим в виде

$$\boldsymbol{\Phi}(r,\theta,z,t) = \mathrm{e}^{i\omega t - i(m\theta + k\alpha z)}\,\boldsymbol{\varphi}(r),$$

где m (целое), k (целое) — азимутальное и осевое квантовые числа.

Точка пересечения $(\mathrm{Re}_{1*}, \mathrm{Re}_{2*})$ (типа m/n и k/l) двух нейтральных кривых определяется такими критическими значениями чисел Рейнольдса Re_{1*} и Re_{2*}, при которых линеаризованная на течении Куэтта задача имеет нетривиальные решения (нейтральные моды) с азимутальными (m, n) и осевыми (k, l) квантовыми числами. В каждой точке $(\mathrm{Re}_{1*}, \mathrm{Re}_{2*})$ существует четыре независимых нейтральных моды

$$\boldsymbol{\Phi}_1(t,r,\theta,z) = \mathrm{e}^{i\omega_m t}\,\boldsymbol{\Phi}_{0m}(r,\theta,z), \qquad \boldsymbol{\Phi}_2(t,r,\theta,z) = \mathrm{e}^{i\omega_m t}\,\boldsymbol{\Phi}_{1m}(r,\theta,z),$$
$$\boldsymbol{\Phi}_3(t,r,\theta,z) = \mathrm{e}^{i\omega_n t}\,\boldsymbol{\Phi}_{0n}(r,\theta,z), \qquad \boldsymbol{\Phi}_4(t,r,\theta,z) = \mathrm{e}^{i\omega_n t}\,\boldsymbol{\Phi}_{1n}(r,\theta,z),$$

где

$$\boldsymbol{\Phi}_{0m}(r,\theta,z) = \mathrm{e}^{-i(m\theta+k\alpha z)}\,\boldsymbol{\varphi}_{0m}(r), \qquad \boldsymbol{\Phi}_{0n}(r,\theta,z) = \mathrm{e}^{-i(n\theta+l\alpha z)}\,\boldsymbol{\varphi}_{0n}(r),$$
$$\boldsymbol{\Phi}_{1m}(r,\theta,z) = \mathrm{e}^{-i(m\theta-k\alpha z)}\,\boldsymbol{\varphi}_{1m}(r), \qquad \boldsymbol{\Phi}_{1n}(r,\theta,z) = \mathrm{e}^{-i(n\theta-l\alpha z)}\,\boldsymbol{\varphi}_{1n}(r),$$
$$\boldsymbol{\varphi}_{1s} = j(\boldsymbol{\varphi}_{0s}) = (\varphi_{0sr}, \varphi_{0s\theta}, -\varphi_{0sz}), \qquad s = m, n.$$

В соответствии с работой [5] в малой окрестности $(\mathrm{Re}_{1*}, \mathrm{Re}_{2*})$, состоящей из точек $\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_{1*} + k_1\varepsilon^2$ и $\mathrm{Re}_2 = \mathrm{Re}_{2*} + k_2\varepsilon^2$ (ε — малый параметр; k_1, k_2 — константы надкритичности ($k_1^2 + k_2^2 = 1$)), изучаются возможные бифуркации, возникающие при повороте вектора (k_1, k_2).

Вектор скорости асимптотического решения уравнений движения в окрестности $(\mathrm{Re}_{1*}, \mathrm{Re}_{2*})$ находим в виде

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_{00} + \varepsilon(\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}^*) + \ldots, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\Phi} = \xi_{0m}(\tau)\boldsymbol{\Phi}_1 + \xi_{1m}(\tau)\boldsymbol{\Phi}_2 + \xi_{0n}(\tau)\boldsymbol{\Phi}_3 + \xi_{1n}(\tau)\boldsymbol{\Phi}_4$; неизвестные комплексные амплитуды $\xi_{0m}(\tau)$, $\xi_{1m}(\tau)$, $\xi_{0n}(\tau)$, $\xi_{1n}(\tau)$ зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon^2 t$; символ "$*$" вверху означает комплексное сопряжение; $\boldsymbol{v}_{00}$ — вектор скорости течения Куэтта при Re_{1*} и Re_{2*}.

2. Амплитудная система. При малых значениях ε с использованием теоремы о центральном многообразии или метода осреднения по быстрому времени строится система комплексных дифференциальных уравнений для амплитуд. Вид амплитудной системы в точках пересечения невращательно-симметричных мод зависит от соотношений азимутальных m и n, осевых k и l квантовых чисел, а иногда и от соотношений фазовых частот ω_m и ω_n нейтральных мод. Имеется шесть резонансных соотношений [6], которым соответствуют амплитудные системы с различными дополнительными слагаемыми. Впервые амплитудные системы в задаче Куэтта — Тейлора построены в работах [1–3] для случая резонанса Res 1, при котором выполняется резонансное соотношение $k = l$. В нерезонансном случае Res 0, когда ни одно из резонансных соотношений не выполняется, система амплитудных уравнений содержит лишь обязательные резонансные слагаемые и имеет вид

$$\begin{aligned}
\xi'_{0m} &= \xi_{0m}(\sigma + A|\xi_{0m}|^2 + B|\xi_{1m}|^2 + C|\xi_{0n}|^2 + D|\xi_{1n}|^2),\\
\xi'_{1m} &= \xi_{1m}(\sigma + B|\xi_{0m}|^2 + A|\xi_{1m}|^2 + D|\xi_{0n}|^2 + C|\xi_{1n}|^2),\\
\xi'_{0n} &= \xi_{0n}(\mu + P|\xi_{0m}|^2 + S|\xi_{1m}|^2 + U|\xi_{0n}|^2 + V|\xi_{1n}|^2),\\
\xi'_{1n} &= \xi_{1n}(\mu + S|\xi_{0m}|^2 + P|\xi_{1m}|^2 + V|\xi_{0n}|^2 + U|\xi_{1n}|^2).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $\sigma = \sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2$; $\mu = \mu_1 k_1 + \mu_2 k_2$; штрих обозначает производную по τ. Коэффициенты системы (2.1) выражаются через нейтральные моды $\boldsymbol{\Phi}_{jp}$ ($j = 0, 1$; $p = m, n$), собственные решения сопряженной задачи и решения неоднородных систем, правые части которых зависят от тех же нейтральных мод. Выражения для коэффициентов приведены в работе [4].

Система (2.1) сохраняет инвариантность относительно преобразований группы симметрии $G = SO(2) \times O(2)$, действие которой на амплитуды задается равенствами

$$\begin{gathered}
L^{\delta}_{\theta}(\xi_{0m}, \xi_{1m}, \xi_{0n}, \xi_{1n}) = (\mathrm{e}^{im\delta}\,\xi_{0m}, \mathrm{e}^{im\delta}\,\xi_{1m}, \mathrm{e}^{in\delta}\,\xi_{0n}, \mathrm{e}^{in\delta}\,\xi_{1n}),\\
L^{h}_{z}(\xi_{0m}, \xi_{1m}, \xi_{0n}, \xi_{1n}) = (\mathrm{e}^{-ik\alpha h}\,\xi_{0m}, \mathrm{e}^{ik\alpha h}\,\xi_{1m}, \mathrm{e}^{-il\alpha h}\,\xi_{0n}, \mathrm{e}^{il\alpha h}\,\xi_{1n}),\\
J(\xi_{0m}, \xi_{1m}, \xi_{0n}, \xi_{1n}) = (\xi_{1m}, \xi_{0m}, \xi_{1n}, \xi_{0n}).
\end{gathered}$$

При определенных значениях параметров надкритичности k_1, k_2 амплитудная система (2.1) помимо тривиального решения, соответствующего течению Куэтта, может иметь другие предельные режимы. G-стационарным решениям системы (2.1) на инвариантных подпространствах, порождаемым различными однопараметрическими подгруппами группы симметрии G, соответствуют G-стационарные режимы системы уравнений Навье — Стокса. Однопараметрические подгруппы группы симметрии G изоморфны группе собственных вращений окружности $SO(2)$, а соответствующие им стационарные режимы представляют собой бегущие волны.

Как и все нормальные формы дифференциальных уравнений, амплитудная система (2.1) обладает более широкой группой симметрии, чем исходная система. Так, данная система является инвариантной относительно преобразований

$$\begin{aligned}
L^{\sigma}_{1}&\colon\quad (\xi_{0m}, \xi_{1m}, \xi_{0n}, \xi_{1n}) \mapsto (\mathrm{e}^{i\sigma}\,\xi_{0m}, \xi_{1m}, \xi_{0n}, \xi_{1n}),\\
L^{\sigma}_{2}&\colon\quad (\xi_{0m}, \xi_{1m}, \xi_{0n}, \xi_{1n}) \mapsto (\xi_{0m}, \mathrm{e}^{i\sigma}\,\xi_{1m}, \xi_{0n}, \xi_{1n}),
\end{aligned}$$

$$L_3^\sigma\colon\quad (\xi_{0m},\xi_{1m},\xi_{0n},\xi_{1n})\mapsto(\xi_{0m},\xi_{1m},\mathrm{e}^{i\sigma}\,\xi_{0n},\xi_{1n}),$$
$$L_4^\sigma\colon\quad (\xi_{0m},\xi_{1m},\xi_{0n},\xi_{1n})\mapsto(\xi_{0m},\xi_{1m},\xi_{0n},\mathrm{e}^{i\sigma}\,\xi_{1n}).$$

Следовательно, система (2.1) может иметь стационарные решения, которым соответствуют нестационарные решения системы уравнений Навье — Стокса.

Введем обозначения для инвариантных подпространств в $\mathbb{C}^4$, на которых становятся равными нулю одна, две или три амплитуды: $Y^1(\xi_{j_1p_1})$ — одномерное инвариантное подпространство пространства амплитуд Y с одной ненулевой амплитудой $\xi_{j_1p_1}\neq 0$ ($j_1=0,1$; $p_1=m,n$); $Y^2(\xi_{j_1p_1},\xi_{j_2p_2})$ — двумерное подпространство Y с двумя не равными нулю амплитудами $\xi_{j_1p_1}$ и $\xi_{j_2p_2}$ ($j_1,j_2=0,1$; $p_1,p_2=m,n$); $Y^3(\xi_{j_1p_1},\xi_{j_2p_2},\xi_{j_3p_3})$ — трехмерное подпространство Y, на котором только одна из амплитуд $\xi_{j_4p_4}=0$, индексы могут принимать значения $j_s=0,1$; $p_s=m,n$; $s=1,2,3,4$.

3. Моторная подсистема. Целесообразно выделить подсистему относительно инвариантов группы симметрии (фактор-систему или моторную подсистему). В данном случае инвариантами группы симметрии являются модули комплексных амплитуд, поэтому в амплитудной системе достаточно перейти к полярным координатам:

$$\xi_{0m}=r_0(\tau)\,\mathrm{e}^{i\varphi_0(\tau)},\quad \xi_{1m}=r_1(\tau)\,\mathrm{e}^{i\varphi_1(\tau)},\quad \xi_{0n}=\rho_0(\tau)\,\mathrm{e}^{i\phi_0(\tau)},\quad \xi_{1n}=\rho_1(\tau)\,\mathrm{e}^{i\phi_1(\tau)}\,. \tag{3.1}$$

Моторная подсистема записывается в виде

$$\begin{aligned} r_0'&=r_0(\sigma_r+A_rr_0^2+B_rr_1^2+C_r\rho_0^2+D_r\rho_1^2),\\ r_1'&=r_1(\sigma_r+B_rr_0^2+A_rr_1^2+D_r\rho_0^2+C_r\rho_1^2),\\ \rho_0'&=\rho_0(\mu_r+P_rr_0^2+S_rr_1^2+U_r\rho_0^2+V_r\rho_1^2),\\ \rho_1'&=\rho_1(\mu_r+S_rr_0^2+P_rr_1^2+V_r\rho_0^2+U_r\rho_1^2)\end{aligned} \tag{3.2}$$

(нижний индекс r означает вещественную часть числа, i — мнимую часть).

В нерезонансном случае моторная подсистема не зависит от фаз φ_0, φ_1, ϕ_0, ϕ_1. Если все вещественные амплитуды r_0, r_1, ρ_0, ρ_1 не равны нулю, то фазы удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_0'&=\sigma_i+A_ir_0^2+B_ir_1^2+C_i\rho_0^2+D_i\rho_1^2,\quad \varphi_1'=\sigma_i+B_ir_0^2+A_ir_1^2+D_i\rho_0^2+C_i\rho_1^2,\\ \phi_0'&=\mu_i+P_ir_0^2+S_ir_1^2+U_i\rho_0^2+V_i\rho_1^2,\quad \phi_1'=\mu_i+S_ir_0^2+P_ir_1^2+V_i\rho_0^2+U_i\rho_1^2.\end{aligned} \tag{3.3}$$

В случае если получено некоторое решение системы (3.2), фазы ненулевых вещественных амплитуд находятся непосредственным интегрированием соответствующих им уравнений системы (3.3). Фаза нулевой амплитуды не определена.

Любое равновесие моторной подсистемы порождает периодическое или квазипериодическое решение амплитудной системы (2.1) с проходящей через него орбитой действия группы симметрии.

Если коэффициенты амплитудной системы таковы, что равновесию моторной подсистемы с ненулевыми значениями (r_0,r_1,ρ_0,ρ_1) соответствуют независимые и несоизмеримые фазы, то равновесие моторной подсистемы определяет четырехчастотный квазипериодический режим системы (2.1).

Моторная подсистема сохраняет инвариантность относительно преобразований группы симметрии Z_2, действие которой на модули амплитуд задается равенством $J(r_0,r_1,\rho_0,\rho_1)=(r_1,r_0,\rho_1,\rho_0)$. Следовательно, множество равновесий моторной подсистемы разбивается на J-симметричные равновесия и J-связанные пары — орбиты действия группы Z_2.

При переходе от равновесий моторной подсистемы к решению амплитудной системы (2.1) по формулам (3.1) возникает орбита действия группы $SO(2)\times O(2)$, заполненная соответствующими предельными режимами. Ясно, что J-симметричным равновесиям моторной подсистемы соответствуют связные орбиты, а J-связанным парам равновесий — орбиты с двумя компонентами связности.

Фазовым пространством моторной подсистемы является ортант Z в $\mathbb{R}^4$, состоящий из точек с неотрицательными координатами $(r_0, r_1, \rho_0, \rho_1)$.

4. Равновесия моторной подсистемы и соответствующие им режимы. Далее перечислим равновесия моторной подсистемы (3.2) на инвариантных конусах Z^k, состоящих из точек с k положительными координатами ($k = 1, 2, 3$); на инвариантном конусе K^2, определяемом равенствами $r_0 = r_1$, $\rho_0 = \rho_1$, а также равновесия общего положения, не принадлежащие инвариантным подпространствам. Приведем соответствующие этим равновесиям периодические и квазипериодические режимы уравнений движения. Когда возможно, для каждого равновесия запишем собственные числа его спектра устойчивости. (Заметим, что если вещественные части ненулевых собственных чисел отрицательны, то рассматриваемое равновесие является орбитально устойчивым.)

4.1. *Инверсионно-связанные пары спиральных волн.* В случае если выполняется условие

$$\sigma_r/A_r < 0, \tag{4.1}$$

моторная подсистема (3.2) на одномерных инвариантных конусах $Z^1(r_0)$ и $Z^1(r_1)$ имеет равновесия, которым соответствуют J-связанные решения (спиральные m-волны) системы (2.1) с амплитудами $\xi_{0m} = r_0\,\mathrm{e}^{i\varphi_0}$, $\xi_{1m} = 0$, $\xi_{0n} = 0$, $\xi_{1n} = 0$ и $\xi_{0m} = 0$, $\xi_{1m} = r_0\,\mathrm{e}^{i\varphi_0}$, $\xi_{0n} = 0$, $\xi_{1n} = 0$ ($r_0 = \sqrt{-\sigma_r/A_r}$; $\varphi_0 = c_m\tau + \psi_1$; $c_m = \sigma_i + A_i r_0^2$; ψ_1 — произвольная постоянная). Каждой спиральной m-волне соответствует G-стационарный режим системы уравнений Навье — Стокса, который реализуется с помощью преобразований однопараметрической подгруппы вращений группы G. Соответствующее асимптотическое решение (1.1) системы уравнений Навье — Стокса имеет вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}(t, r, \theta, z) = \boldsymbol{v}_{00} + \varepsilon(L_\theta^{-(\hat\omega_m t + \psi_1)/m}\boldsymbol{X}_0 + \text{к.с.}) + \dots,\\ \boldsymbol{X}_0(r, \theta, z) = r_0\boldsymbol{\Phi}_{0m}(r, \theta, z) = r_0\,\mathrm{e}^{-i(m\theta + k\alpha z)}\,\boldsymbol{\varphi}_{0m}(r), \qquad \hat\omega_m = \omega_m + c_m\varepsilon^2.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Для того чтобы получить второе решение J-связанной пары, в формуле (4.2) необходимо заменить z, $\boldsymbol{\varphi}_{0m}$ на $-z$, $\boldsymbol{\varphi}_{1m} = j(\boldsymbol{\varphi}_{0m})$.

С точностью до произвольных сдвигов вдоль оси и поворотов вокруг оси цилиндров вектор скорости, соответствующий спиральной m-волне на $Y^1(\xi_{0m})$, можно записать в виде $\boldsymbol{u}(t, r, \theta, z) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}, \zeta)$, где $\boldsymbol{U}$ — 2π-периодическая вектор-функция по $\zeta = \tilde\omega_m t - m\theta - k\alpha z$; $\tilde\omega_m = \omega_m + O(\varepsilon^2)$. Такой периодический режим представляет собою косую бегущую волну. Спектр устойчивости спиральных m-волн состоит из собственных чисел

$$\begin{gathered}\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -2\sigma_r, \qquad \lambda_{3,4} = (\mu_r A_r - \sigma_r S_r \pm i(\mu_i A_r - \sigma_r S_i))/A_r,\\ \lambda_{5,6} = ((A_r - B_r)\sigma_r \pm i(\sigma_i A_r - \sigma_r B_i))/A_r, \quad \lambda_{7,8} = (\mu_r A_r - \sigma_r P_r \pm i(\mu_i A_r - \sigma_r P_i))/A_r.\end{gathered}$$

В случае если выполняется условие

$$\mu_r/U_r < 0, \tag{4.3}$$

на подпространствах $Y^1(\xi_{0n})$ и $Y^1(\xi_{1n})$ существует пара J-связанных спиральных n-волн. Заменяя во всех приведенных выше формулах индекс m на индекс n, а также модуль амплитуды, фазу и коэффициенты r_0, φ_0, σ, μ, A, B, P, S на ρ_0, ϕ_0, μ, σ, U, V, C, D, получаем выражения для амплитуд и собственных значений спектра устойчивости для спиральных n-волн.

4.2. *Азимутальные волны.* При выполнении условия

$$\sigma_r/(A_r + B_r) < 0 \tag{4.4}$$

моторная подсистема (3.2) имеет равновесия на двумерном инвариантном конусе $Z^2(r_0, r_1)$, которым соответствует семейство решений амплитудной системы (2.1) на $Y^2(\xi_{0m}, \xi_{1m})$ с амплитудами $\xi_{0m} = r_0\,\mathrm{e}^{i\varphi_0}$, $\xi_{1m} = r_0\,\mathrm{e}^{i\varphi_1}$, $\xi_{0n} = 0$, $\xi_{1n} = 0$ ($r_0 = \sqrt{-\sigma_r/(A_r + B_r)}$; $\varphi_0 = c_m\tau + \psi_1$; $\varphi_1 = c_m\tau + \psi_2$; $c_m = \sigma_i - \sigma_r(A_i + B_i)/(A_r + B_r)$; ψ_1, ψ_2 — произвольные постоянные). Каждому такому решению соответствует асимптотическое решение системы уравнений Навье — Стокса с вектором скорости

$$\boldsymbol{u}(t, r, \theta, z) = \boldsymbol{v}_{00} + \varepsilon(L_z^{\psi} L_\theta^{\varphi(t)} \boldsymbol{X}_0 + \text{к.с.}) + \ldots,$$

где $\psi = (\psi_2 - \psi_1)/(2k\alpha)$; $\varphi(t) = -(2\hat{\omega}_m t + \psi_1 + \psi_2)/(2m)$; $\boldsymbol{X}_0 = r_0(\boldsymbol{\Phi}_{0m}(r, \theta, z) + \boldsymbol{\Phi}_{1m}(r, \theta, z))$; $\hat{\omega}_m = \omega_m + c_m\varepsilon^2$. Данный J-симметричный автоколебательный режим (азимутальная m-волна) представляет собой нелинейную комбинацию пары J-связанных спиральных m-волн, движущихся вдоль оси цилиндров z в противоположных направлениях. Вектор скорости этого режима с точностью до произвольных сдвигов вдоль оси и поворотов вокруг оси цилиндров можно записать в виде $\boldsymbol{u}(t, r, \theta, z) = \boldsymbol{U}(r, \zeta, \zeta_1)$, где $\boldsymbol{U}(r, \zeta, \zeta_1)$ — 2π-периодическая вектор-функция по переменным $\zeta = \tilde{\omega}_m t - m\theta - k\alpha z$ и $\zeta_1 = \tilde{\omega}_m t - m\theta + k\alpha z$; $\tilde{\omega}_m = \omega_m + O(\varepsilon^2)$. Сдвиги вдоль оси z и повороты вокруг нее сводятся к добавлению произвольных констант к ζ и ζ_1 (двухпараметрическое семейство азимутальных m-волн).

Спектр устойчивости азимутальных m-волн представляет собой объединение двукратного нулевого собственного значения $\lambda_{1,2} = 0$, собственных чисел $\lambda_3 = -2\mu_r$, $\lambda_4 = -2\sigma_r(A_r - B_r)/(A_r + B_r)$ и двух пар двукратных собственных чисел

$$\lambda_{5,6,7,8} = \bigl\{\mu_r(A_r + B_r) - \sigma_r(P_r + S_r) \pm i[\sigma_i(A_r + B_r) - \mu_r(P_i + S_i)]\bigr\}/(A_r + B_r).$$

Сравнение спектров спиральных и азимутальных m-волн показывает, что они не могут быть устойчивыми одновременно.

При выполнении условия

$$\mu_r/(U_r + V_r) < 0 \tag{4.5}$$

у амплитудной системы (2.1) на инвариантном подпространстве $Y^2(\xi_{0n}, \xi_{1n})$ существует двухпараметрическое семейство J-симметричных азимутальных n-волн. Заменяя в формулах данного подпункта m, r_0, φ_0, σ, μ, A, B, P, S на n, ρ_0, ϕ_0, μ, σ, U, V, C, D, для этих режимов получаем такие же результаты, как и для азимутальных m-волн.

Спиральные и азимутальные волны возникают также вне точек пересечения нейтральных кривых.

4.3. *Инверсионно-связанные двойные спиральные волны.* При выполнении условий

$$r_0^2 = \frac{\mu_r D_r - \sigma_r U_r}{A_r U_r - D_r S_r} > 0, \qquad \rho_0^2 = \frac{\sigma_r S_r - \mu_r A_r}{A_r U_r - D_r S_r} > 0$$

моторная подсистема (3.2) на двумерных инвариантных конусах $Z^2(r_0, \rho_1)$ и $Z^2(r_1, \rho_0)$ имеет равновесия, которым соответствуют J-связанные решения амплитудной системы (2.1) (двойные спиральные волны). Двойные спиральные волны имеют на $Y^2(\xi_{0m}, \xi_{1n})$ амплитуды $\xi_{0m} = r_0\,\mathrm{e}^{i\varphi_0}$, $\xi_{1n} = \rho_1\,\mathrm{e}^{i\phi_1}$, $\xi_{1m} = 0$, $\xi_{0n} = 0$ ($\varphi_0 = c_m\tau + \psi_1$; $\phi_1 = c_n\tau + \psi_2$; $c_m = \sigma_i + A_i r_0^2 + D_i\rho_1^2$; $c_n = \mu_i + S_i r_0^2 + U_i\rho_1^2$; ψ_1, ψ_2 — произвольные постоянные).

Двойной спиральной волне соответствует асимптотическое решение системы уравнений Навье — Стокса с вектором скорости

$$\boldsymbol{u}(t, r, \theta, z) = \boldsymbol{v}_{00} + \varepsilon(L_z^{\psi(t)} L_\theta^{-\varphi(t)} \boldsymbol{X}_0 + \text{к.с.}) + \ldots, \tag{4.6}$$

где $\psi(t) = ((m\hat{\omega}_n - n\hat{\omega}_m)t + m\psi_2 - n\psi_1)/(lm + kn)\alpha$ — сдвиг вдоль оси z; $\varphi(t) = ((l\hat{\omega}_m + k\hat{\omega}_n)t + k\psi_2 + l\psi_1)/(lm + kn)$ — поворот вокруг оси цилиндров; $\hat{\omega}_m = \omega_m + c_m\varepsilon^2$; $\hat{\omega}_n = \omega_n + c_n\varepsilon^2$; $\boldsymbol{X}_0 = r_0\boldsymbol{\Phi}_{0m}(r, \theta, z) + \rho_1\boldsymbol{\Phi}_{1n}(r, \theta, z)$ — вектор-функция.

Решение (4.6) представляет собой двухчастотный квазипериодический режим системы уравнений Навье — Стокса — нелинейную комбинацию спиральной m- и n-волн, распространяющихся вдоль оси z в противоположных направлениях. Вектор скорости данного режима с точностью до произвольных сдвигов вдоль оси и поворотов вокруг оси цилиндров можно записать в виде $\boldsymbol{u}(t,r,\theta,z) = \boldsymbol{U}(r,\zeta,\zeta_1)$, где $\boldsymbol{U}(r,\zeta,\zeta_1)$ — 2π-периодическая вектор-функция по переменным $\zeta = \tilde{\omega}_m t - m\theta - k\alpha z$ и $\zeta_1 = \tilde{\omega}_n t - n\theta + l\alpha z$; $\tilde{\omega}_m = \omega_m + O(\varepsilon^2)$; $\tilde{\omega}_n = \omega_n + O(\varepsilon^2)$.

Решению моторной подсистемы (3.2) на $Z^2(r_1,\rho_0)$ соответствует двойная спиральная волна на $Y^2(\xi_{1m},\xi_{0n})$ с комплексными амплитудами $\xi_{1m} = r_0\,\mathrm{e}^{i\varphi_0}$, $\xi_{0n} = \rho_1\,\mathrm{e}^{i\phi_1}$, $\xi_{0m} = 0$, $\xi_{1n} = 0$. Заменяя во всех формулах этого подпункта z, $\boldsymbol{\varphi}_{0m}$, $\boldsymbol{\varphi}_{1n}$ на $-z$, $\boldsymbol{\varphi}_{1m}$, $\boldsymbol{\varphi}_{0n}$, для данной J-связанной двойной спиральной волны получаем аналогичные результаты.

Спектр устойчивости двойных спиральных волн на $Y^2(\xi_{0m},\xi_{1n})$ и на $Y^2(\xi_{1m},\xi_{0n})$ состоит из двукратного нулевого значения $\lambda_{1,2} = 0$ и собственных чисел

$$\lambda_{3,4} = A_r r_0^2 + U_r\rho_1^2 \pm \sqrt{(A_r r_0^2 + U_r\rho_1^2)^2 - 4r_0^2\rho_1^2(A_rU_r - D_rS_r)},$$

$$\lambda_{5,6} = \sigma_r + B_r r_0^2 + C_r\rho_1^2 \pm i(\sigma_i + B_i r_0^2 + C_i\rho_1^2), \qquad \lambda_{7,8} = \mu_r + P_r r_0^2 + V_r\rho_1^2 \pm i(\mu_i + P_i r_0^2 + V_i\rho_1^2).$$

Аналогично для J-связанных двойных спиральных волн на инвариантных подпространствах $Y^2(\xi_{0m},\xi_{0n})$ и $Y^2(\xi_{1m},\xi_{1n})$ получаем такие же результаты, заменив во всех формулах данного подпункта $\boldsymbol{\Phi}_{1n}$, ρ_1, ϕ_1, C, D, P, S на $\boldsymbol{\Phi}_{0n}$, ρ_0, ϕ_0, D, C, S, P. Двойные спиральные волны этого семейства представляют собой нелинейную комбинацию спиральных m- и n-волн, распространяющихся вдоль оси z в одном направлении.

4.4. *Суперпозиция азимутальных m- и n-волн.* В случае если правые части выражений

$$r_0^2 = \frac{\sigma_r(U_r + V_r) - \mu_r(C_r + D_r)}{(C_r + D_r)(P_r + S_r) - (A_r + B_r)(U_r + V_r)},$$

$$\rho_0^2 = \frac{\mu_r(A_r + B_r) - \sigma_r(P_r + S_r)}{(C_r + D_r)(P_r + S_r) - (A_r + B_r)(U_r + V_r)}$$

положительны, на инвариантном конусе K^2, определяемом равенствами $r_0 = r_1$, $\rho_0 = \rho_1$, существует равновесие моторной подсистемы (3.2). Данному равновесию соответствует решение системы (2.1) (суперпозиция азимутальных m- и n-волн) с амплитудами $\xi_{0m} = r_0\,\mathrm{e}^{i\varphi_0}$, $\xi_{1m} = r_0\,\mathrm{e}^{i\varphi_1}$, $\xi_{0n} = \rho_0\,\mathrm{e}^{i\phi_0}$, $\xi_{1n} = \rho_0\,\mathrm{e}^{i\phi_1}$ ($\varphi_0 = c_m\tau + \psi_{0m}$; $\varphi_1 = c_m\tau + \psi_{1m}$; $\phi_0 = c_n\tau + \psi_{0n}$; $\phi_1 = c_n\tau + \psi_{1n}$; $c_m = \sigma_i + (A_i + B_i)r_0^2 + (C_i + D_i)\rho_0^2$; $c_n = \mu_i + (P_i + S_i)r_0^2 + (U_i + V_i)\rho_0^2$; ψ_{0s}, ψ_{1s} ($s = m, n$) — произвольные постоянные). Соответствующее асимптотическое решение системы уравнений Навье — Стокса имеет вид

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_{00} + \varepsilon(L_z^{h_1}L_\theta^{\varphi_1(t)}\boldsymbol{X}_1 + L_z^{h_2}L_\theta^{\varphi_2(t)}\boldsymbol{X}_2 + \text{к.с.}) + \ldots, \qquad (4.7)$$

где $\boldsymbol{X}_1 = r_0(\boldsymbol{\Phi}_{0m} + \boldsymbol{\Phi}_{1m})$; $\boldsymbol{X}_2 = \rho_0(\boldsymbol{\Phi}_{0n} + \boldsymbol{\Phi}_{1n})$; $h_1 = (\psi_{1m} - \psi_{0m})/(2k\alpha)$; $h_2 = (\psi_{1n} - \psi_{0n})/(2l\alpha)$; $\varphi_1(t) = -(2\hat{\omega}_m t + \psi_{0m} + \psi_{1m})/(2m)$; $\varphi_2(t) = -(2\hat{\omega}_n t + \psi_{0n} + \psi_{1n})/(2n)$; $\hat{\omega}_m = \omega_m + c_m\varepsilon^2$; $\hat{\omega}_n = \omega_n + c_n\varepsilon^2$.

С точностью до произвольного сдвига оси цилиндров или поворота вокруг нее решение (4.7) можно записать в виде $\boldsymbol{u}(t,r,\theta,z) = \boldsymbol{U}(r,\zeta,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$, где $\boldsymbol{U}(r,\zeta,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ — 2π-периодическая вектор-функция по переменным $\zeta = \tilde{\omega}_m t - m\theta - k\alpha z$, $\zeta_1 = \tilde{\omega}_m t - m\theta + k\alpha z$, $\zeta_2 = \tilde{\omega}_n t - n\theta - l\alpha z$ и $\zeta_3 = \tilde{\omega}_n t - n\theta + l\alpha z$; $\tilde{\omega}_m = \omega_m + O(\varepsilon^2)$; $\tilde{\omega}_n = \omega_n + O(\varepsilon^2)$. При этом сдвиги вдоль оси и повороты вокруг оси цилиндров z сводятся к добавлению произвольных констант к ζ, ζ_1, ζ_2, ζ_3 (четырехпараметрическое множество).

Решение (4.7) представляет собой двухчастотный квазипериодический режим — нелинейную комбинацию распространяющихся вдоль оси z азимутальных m- и n-волн.

В спектре устойчивости суперпозиции азимутальных m- и n-волн содержатся четырехкратное нулевое значение и четыре собственных числа, которые явно выражаются через коэффициенты амплитудных уравнений и в силу громоздкости не приводятся.

4.5. *Равновесия на инвариантных трехмерных подпространствах и равновесия общего положения.* При выполнении условия

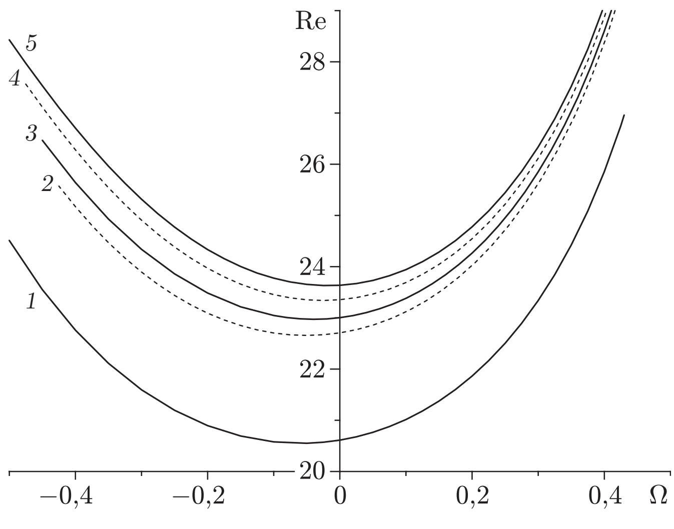
$$(A_r - B_r)(U_r - V_r) - (C_r - D_r)(P_r - S_r) = 0$$

возможно существование равновесий моторной подсистемы (3.2) на инвариантных трехмерных конусах $Z^3(r_0, r_1, \rho_i)$, $Z^3(r_i, \rho_0, \rho_1)$ $(i = 0, 1)$, а также равновесий общего положения, не принадлежащих инвариантным подпространствам. Остальные условия существования, зависящие от констант надкритичности k_1 и k_2, не приводятся ввиду их громоздкости. Таким равновесиям моторных подсистем соответствуют двух-, трех- или четырехчастотные периодические или квазипериодические решения системы уравнений Навье — Стокса. Вычисление амплитуд соответствующих режимов и исследование их устойчивости необходимо проводить численно.

5. Результаты расчета. Точки резонанса Res 0 образуют поверхности (двухпараметрические семейства) в четырехмерном пространстве параметров задачи Re_1, Ω, η, α (отношение угловых скоростей Ω введено вместо параметра $\mathrm{Re}_2 = \Omega R_1 \eta^2$).

На рисунке приведены нейтральные кривые при $\eta = 1{,}2$. Каждой точке кривой *1*, на которой происходит первая потеря устойчивости течения Куэтта, соответствует критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{1*}(\alpha_*, \Omega) = \min\limits_{\alpha} \mathrm{Re}_{1*}(\alpha, \Omega)$. Для $\Omega > -0{,}65$ наименьшее значение $\mathrm{Re}_{1*}(\alpha_*, \Omega)$ достигается при $m = 0$. Кривые *2–5* состоят из точек резонанса Res 0 для различных волновых чисел α, азимутальных и осевых квантовых чисел.

В области плоскости надкритичности, где $\sigma_r > 0$, $\mu_r > 0$, условия существования спиральных и азимутальных волн (4.1), (4.3)–(4.5) зависят лишь от значений коэффициентов амплитудных уравнений A, B или U, V. Для смешанных режимов эти условия зависят от констант надкритичности k_1, k_2 и от всех коэффициентов амплитудных уравнений.



Нейтральные кривые при $\eta = 1{,}2$:
1 — кривая, на которой происходит первая потеря устойчивости течения Куэтта, *2–5* — кривые, состоящие из точек резонанса Res 0 различного типа (*2* — $m/n = 1/1$, $k/l = 1/2$; *3* — $m/n = 1/2$, $k/l = 1/2$; *4* — $m/n = 1/2$, $k/l = 2/1$; *5* — $m/n = 2/2$, $k/l = 1/2$)

Вычисления для точек Res 0 типа $m/n = 1/1$, $k/l = 1/2$ (кривая *2* на рисунке) показывают, что даже при существовании в их окрестности азимутальных n-волн, двойных спиральных волн с амплитудами $\xi_{0m} \neq 0$, $\xi_{0n} \neq 0$ и суперпозиции азимутальных m- и n-волн данные режимы всегда неустойчивы.

Получены значения Ω, при которых в некоторой области плоскости надкритичности существуют и устойчивы следующие режимы: спиральные m-волны — при $0{,}63 < \Omega < 0{,}68$; спиральные n-волны — при $-0{,}57 < \Omega < 0{,}68$; азимутальные m-волны — при $0{,}550 < \Omega < 0{,}605$; двойные спиральные волны с амплитудами $\xi_{0m} \neq 0$, $\xi_{1n} \neq 0$ при $-0{,}55 < \Omega < -0{,}35$. Область существования и устойчивости данных режимов находится выше прямой $k_2 = \operatorname{tg} \gamma k_1$ ($\gamma \approx \pm 2^\circ$).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Юдович В. И.** Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости // Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент, 24–30 сент. 1986 г. Ташкент: Фан, 1986. С. 661.
2. **Chossat P., Demay Y., Iooss G.** Interaction de modes azimutaux dans le probleme de Couette — Taylor // Arch. Rational Mech. Anal. 1987. V. 99, N 3. P. 213–248.
3. **Chossat P.** The Couette — Taylor problem / P. Chossat, G. Iooss. N. Y.: Springer-Verlag, 1991.
4. **Юдович В. И., Овчинникова С. Н.** Пересечения бифуркаций в проблеме Куэтта — Тейлора. 1. Нерезонансный случай. М., 2005. Деп. в ВИНИТИ 05.04.05, № 458-В2005.
5. **Арнольд В. И.** Лекции о бифуркациях и версальных семействах // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 5. С. 119–184.
6. **Yudovich V. I., Ovchinnikova S. N.** Resonances in the codimension-2 bifurcations in the Couette — Taylor problem // J. Math. Fluid Mech. 2009. V. 11. P. 469–491.

Поступила в редакцию 2/IX 2009 г.