

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Теория трехслойных оболочек с заполнителем и слоями переменной толщины // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.— 1962.— № 4.
2. Гольденштейн А. М., Муштари Х. М. Уравнения равновесия трехслойных оболочек со слоями переменной толщины с учетом различия в метрике слоев // Некоторые вопросы теории пластин и оболочек.— Казань: Казан. физ.-техн. ин-т АН СССР, 1967.
3. Паймушин В. Н., Галимов Н. К. К общей теории трехслойных оболочек со слоями переменной толщины // Тр. семинара по теории оболочек.— Казань: Казан. физ.-техн. ин-т АН СССР, 1975.— Вып. 6.
4. Пухлий В. А. Трехслойные ортотропные оболочки переменной жесткости (теория и приложения) // ПМ.— 1980.— Т. 16, № 9.
5. Андреев С. В., Паймушин В. Н. К теории среднего изгиба тонких трехслойных оболочек со слоями переменной толщины и сложной геометрии // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук.— 1980.— № 2.
6. Паймушин В. Н., Андреев С. В. К нелинейной теории трехслойных оболочек со слоями переменной толщины и сложной геометрии // Исследования по теории пластин и оболочек.— Казань: КГУ, 1981.— Вып. 16.
7. Григолюк Э. И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким заполнителем // Изв. АН СССР. ОТН.— 1958.— № 1.
8. Паймушин В. Н., Бобров С. Н. О формах устойчивости трехслойных пластин и оболочек с внешними слоями из однородных и армированных материалов // Механика композит. материалов.— 1985.— № 1.
9. Галимов Н. З., Паймушин В. П. Теория оболочек сложной геометрии.— Казань: КГУ, 1985.
10. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига/Под ред. Н. З. Галимова.— Казань: КГУ, 1977.

г. Пошкар-Ола

Поступила 27/X 1989 г.,
в окончательном варианте —
27/XII 1991 г.

УДК 539.3 : 629.7.015.4 : 624.07

В. Н. Максименко

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ТРЕЩИН ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Применение аналитических методов к оценке прочности композитных материалов с трещинами и тонкими включениями затруднительно из-за недостатка сведений о распределении напряжений в окрестности вершин разрезов и включений сложной конфигурации в анизотропных материалах. Обсуждение данной проблемы и обзор работ в этом направлении (главным образом для прямолинейных трещин и включений) можно найти, например, в [1—5].

Ниже на основе метода функций влияния дается решение основных задач плоской теории упругости для анизотропных тел, ослабленных криволинейными разрезами. Построены интегральные представления, позволяющие единообразно формировать разрешающую систему сингулярных интегральных уравнений (СИУ) первой, второй и смешанной задач теории упругости. Эффективность построенных интегральных представлений и предложенных алгоритмов численной реализации возникающих СИУ демонстрируется при решении ряда задач теории трещин для анизотропных пластин.

1. Рассмотрим бесконечную прямолинейно-анизотропную пластину, ослабленную системой гладких криволинейных непересекающихся разрезов $L_j = (a_j, b_j)$, $j = \overline{1, n}$ (рис. 1). Угол между Ox и нормалью n к левому берегу разреза в точке $t \in L = \bigcup_{j=1}^n L_j$ обозначим $\varphi(t)$. Определим на-

пряженно-деформированное состояние (НДС) такой пластины, обусловленное действием внешней нагрузки $X_n^\pm(t) + iY_n^\pm(t)$ ($t \in L$) по берегам разрезов и заданных усилий на бесконечности.

Предположим, что берега разрезов не контактируют*, а главный вектор внешних усилий, действующих на берега разрезов, известен. Будем также считать, что заданы комплексные потенциалы $\Phi_{v0}(z_v)$, дающие решение задачи для сплошной пластины от внешних усилий, приложенных на бесконечности.

Для решения сформулированной задачи на линии расположения трещин L зададим некоторые непрерывно распределенные дислокации и сосредоточенные силы и определим вызванное ими напряженное состояние в рассматриваемой области. Затем компоненты Бюргера дислокаций $Q(t)$ и сосредоточенных сил $P(t)$ (или, что то же самое, некоторых функций от них) подбираем так, чтобы усилия на берегах L , вызванные дислокациями и сосредоточенными силами, равнялись заданным.

Пусть в некоторой точке $z = \tau$ бесконечной анизотропной пластины приложена сосредоточенная сила с вектором $P = X + iY$ или сосредоточенная дислокация с вектором Бюргера $Q = U + iV$ [6]. Обусловленные ими потенциалы Лехницкого [7] соответственно можно представить в виде

$$(1.1) \quad \Phi_v^*(z_v) = \frac{A_v}{z_v - \tau_v}, \quad \Phi_v^{**}(z_v) = \frac{B_v}{z_v - \tau_v},$$

где комплексные постоянные A_v, B_v определяются из условий равновесия и однозначности смещений:

$$(1.2) \quad \sum_{v=1}^2 \{ \mu_v^{k-2} (A_v, B_v) - \bar{\mu}_v^{k-2} (\bar{A}_v, \bar{B}_v) \} = (f_{1k}, f_{2k}) (2\pi i)^{-1},$$

$$f_{11} = (a_{12}X + a_{26}Y) a_{22}^{-1}, \quad f_{12} = Y, \quad f_{13} = X,$$

$$f_{14} = -(a_{16}X + a_{26}Y) a_{22}^{-1}, \quad f_{21} = V, \quad f_{22} = f_{23} = 0, \quad f_{24} = U.$$

Из последних соотношений, в частности, вытекает

$$(1.3) \quad A_0 A_1 - B_0 \bar{A}_1 + A_2 = 0, \quad a_0 B_1 - b_0 \bar{B}_1 + B_2 = 0,$$

$$A_0 = (\bar{p}_2 q_1 - p_1 \bar{q}_2) (\bar{p}_2 \bar{q}_2 - p_2 \bar{q}_2)^{-1}, \quad B_0 = (\bar{p}_2 \bar{q}_1 - \bar{p}_1 \bar{q}_2) (\bar{p}_2 \bar{q}_2 - p_2 \bar{q}_2)^{-1},$$

$$a_0 = (\mu_1 - \bar{\mu}_2) (\mu_2 - \bar{\mu}_2)^{-1}, \quad b_0 = (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) (\mu_2 - \bar{\mu}_2)^{-1},$$

$$p_v = a_{11} \mu_v + a_{12} - a_{16} \bar{\mu}_v, \quad q_v = a_{12} \mu_v + a_{22} \bar{\mu}_v^{-1} - a_{26} \quad (v = 1, 2).$$

Здесь μ_v — корни характеристического уравнения; a_{ij} — коэффициенты деформации из закона Гука [7].

Считая $P(t), Q(t)$ функциями класса H на L [8], найдем с помощью (1.2) соответствующие им $A(t), B(t)$, умножим соотношение (1.1) на ds и проинтегрируем вдоль L . Получим

$$(1.4) \quad \Phi_{v1}(z_v) = \int_L \frac{A_v(\tau) ds}{z_v - \tau_v}, \quad \Phi_{v2}(z_v) = \int_L \frac{B_v(\tau) ds}{z_v - \tau_v}.$$

Вводя замену переменных

$$\mu_v(t) = -2\pi i A_v(t) / M_v(t), \quad \omega_v(t) = -2\pi i B_v(t) / M_v(t),$$

$$d\tau_v = M_v(\tau) ds, \quad M_v(t) = \mu_v \cos \varphi(t) + \sin \varphi(t),$$

* В некоторых задачах необходимо накладывать физическое условие, исключающее возможность перекрытия берегов разреза. Такие задачи являются нелинейными и должны решаться в инкрементальной постановке, т. е. путем пошаговых изменений нагрузки на берегах разрезов.

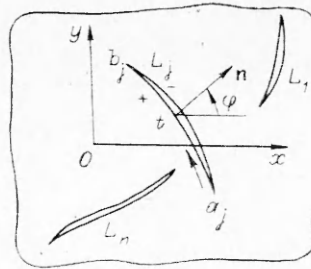


Рис. 1

перепишем (1.4), (1.3) в виде

$$(1.5) \quad \Phi_{v1}(z_v) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu_v(\tau) d\tau_v}{\tau_v - z_v}, \quad \Phi_{v2}(z_v) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_v(\tau) d\tau_v}{\tau_v - z_v};$$

$$(1.6) \quad A(t) \mu_1(t) + B(t) \overline{\mu_1(t)} + \mu_2(t) = 0;$$

$$(1.7) \quad a(t) \omega_1(t) + b(t) \overline{\omega_1(t)} + \omega_2(t) = 0,$$

$$A(t) = A_0 \frac{M_1(t)}{M_2(t)}, \quad B(t) = B_0 \frac{\overline{M_1(t)}}{\overline{M_2(t)}}, \quad a(t) = a_0 \frac{M_1(t)}{M_2(t)}, \quad b(t) = b_0 \frac{\overline{M_1(t)}}{\overline{M_2(t)}}.$$

Тогда искомые решения сформулированной выше задачи представим как

$$(1.8) \quad \Phi_v(z_v) = \sum_{j=0}^2 \Phi_{vj}(z_v).$$

Подставляя предельные значения функций $\Phi_v(z_v)$ (1.8) в краевые условия на L

$$(1.9) \quad a(t) \Phi_1^\pm(t_1) + b(t) \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} + \Phi_2^\pm(t_2) = F^\pm(t), \quad t \in L,$$

$$F^\pm(t) = \{X_n^\pm(t) + \bar{\mu}_2 Y_n^\pm(t)\} \{(\mu_2 - \bar{\mu}_2) M_2(t)\}^{-1}$$

и вычитая из первого равенства второе, находим

$$(1.10) \quad a(t) \mu_1(t) + b(t) \overline{\mu_1(t)} + \mu_2(t) = F_1(t), \quad F_1(t) = F^+(t) - F^-(t).$$

С помощью соотношений (1.6), (1.10) легко установить, что функции $\mu_v(t)$ явно выражаются через скачки напряжений $X(t) = X^+(t) - X^-(t)$, $Y(t) = Y^+(t) - Y^-(t)$ на берегах разрезов.

Складывая оба предельных равенства и учитывая соотношение (1.7), после некоторых преобразований получаем основное СИУ задачи:

$$(1.11) \quad \int_L \frac{\omega_1(\tau) d\tau_1}{\tau_1 - t_1} + \int_L \{K_{11}(t, \tau) \omega_1(\tau) + K_{12}(t, \tau) \overline{\omega_1(\tau)}\} ds = f_1^*(t),$$

$$K_{11}(t, \tau) ds = \frac{1}{2} \left\{ d \ln \frac{\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2}{\tau_1 - t_1} + \frac{b(\tau) - b(t)}{b(\bar{t})(\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2)} d\bar{\tau}_2 \right\},$$

$$K_{12}(t, \tau) ds = \frac{1}{2} \left\{ d \ln \frac{\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2}{\tau_1 - t_1} + \frac{\bar{a}(\tau) - \bar{a}(t)}{b(\bar{t})(\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2)} d\bar{\tau}_2 \right\},$$

$$f_1^*(t) = f_1(t) - \int_L \{K_{13}(t, \tau) \mu_1(\tau) + K_{14}(t, \tau) \overline{\mu_1(\tau)}\} ds,$$

$$K_{13}(t, \tau) ds = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d\tau_1}{\tau_1 - z_1} + \frac{\overline{B(\tau)} d\bar{\tau}_2}{b(\bar{t})(\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2)} \right\},$$

$$K_{14}(t, \tau) ds = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overline{A(\tau)} d\bar{\tau}_2}{b(\bar{t})(\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2)} - \frac{\overline{a(\tau)} d\bar{\tau}_1}{b(\bar{t})(\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1)} \right\},$$

$$f_1(t) = \frac{\bar{z}_1}{2b(\bar{t})} \{F_2(t) - 2[\overline{a(t) \Phi_{10}(t_1)} + \overline{b(t) \Phi_{10}(t_1)} + \overline{\Phi_{20}(t_2)}]\},$$

$$F_2(t) = F^+(t) - F^-(t).$$

С учетом (1.5) и соотношений [7]

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{v=1}^2 (p_v, q_v) \varphi_v(z_v) \right\}, \quad \Phi_v(z_v) = \varphi'_v(z_v)$$

определим, что скачок смещений $w(t) = [(u + iv)^+ - (u + iv)^-]$ на L_j ($j = 1, n$) имеет вид

$$(1.12) \quad w(t) = \sum_{v=1}^2 \left\{ (p_v + iq_v) \int_{a_j}^t \omega_v(\tau) d\tau_v + (\bar{p}_v + i\bar{q}_v) \int_{a_j}^t \overline{\omega_v(\tau)} d\bar{\tau}_v \right\}.$$

С помощью соотношений (1.12) легко установить физическую сущность неизвестных функций $\omega_\nu(t)$. Дифференцируя (1.12), найдем

$$(1.13) \quad \frac{dw}{ds} = \sum_{\nu=1}^2 \{ (p_\nu + iq_\nu) M_\nu(t) \omega_\nu(t) + (\bar{p}_\nu + i\bar{q}_\nu) \overline{M_\nu(t)} \overline{\omega_\nu(t)} \}.$$

Таким образом, из (1.7), (1.13) следует, что значения $\omega_\nu(t)$ непосредственно связаны с производными от скачков смещений на берегах L .

Из условий непрерывности смещений в вершинах трещин и (1.12) получим

$$(1.14) \quad \int_{L_j} \omega_1(\tau) d\tau_1 = 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Уравнения (1.11), (1.14) дают решение поставленной задачи. Для частного случая самоуравновешенной непрерывной нагрузки ($F_1(t) = \mu_\nu(t) = 0$) из (1.5), (1.11), (1.14) вытекают результаты [1, 4], найденные другим методом.

Так как число условий, которым должны удовлетворять искомые функции $\omega_1(t)$, совпадает с числом СИУ по соответствующим контурам L_j , то решение системы (1.11), (1.14) следует искать в классе функций, не ограниченных на концах разрезов [8].

Если разрезы заданы вдоль прямой, то решение задачи, согласно [8], можно получить в замкнутом виде. Например, для пластины с трещиной $L = \{\alpha \leq x \leq \beta; y = 0\}$ вдоль отрезка действительной оси, нагруженной усилиями $\sigma_y^\pm, \tau_{xy}^\pm, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ по берегам разреза и на бесконечности, интегральное уравнение (1.11) примет вид

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega_1(\tau) d\tau}{\tau - t} = H(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{h(\tau) d\tau}{\tau - t},$$

$$H(t) = \{ (\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^-) + \mu_2 (\sigma_y^+ + \sigma_y^-) + 2(\tau_{xy}^\infty + \mu_2 \sigma_y^\infty) \} \{ 2(\mu_1 - \mu_2) \}^{-1},$$

$$h(t) = \{ (\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) + \mu_2 (\sigma_y^+ - \sigma_y^-) \} \{ 2(\mu_1 - \mu_2) \}^{-1},$$

а его общее решение

$$\omega_1(t) = h(t) + \frac{1}{\pi i X(t)} \int_L \frac{X(\tau) H(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{2C}{X(t)},$$

где C — неизвестная постоянная.

После некоторых преобразований найдем

$$(1.15) \quad \Phi_1(z_1) = \frac{1}{2(\mu_1 - \mu_2)} \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu_2 (\sigma_y^+ - \sigma_y^-) + (\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-)}{\tau - z_1} d\tau - \right.$$

$$-\frac{1}{2\pi i X(z_1)} \int_L \frac{X(\tau) [\mu_2 (\sigma_y^+ - \sigma_y^-) + (\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-)]}{\tau - z_1} d\tau +$$

$$\left. + (\mu_2 \sigma_y^\infty + \tau_{xy}^\infty) \left[1 - \frac{2z_1 - (\alpha + \beta)}{2X(z_1)} \right] + \frac{C}{X(z_1)} \right\},$$

$$\Phi_2(z_2) = \frac{1}{2(\mu_1 - \mu_2)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu (\sigma_y^+ - \sigma_y^-) + (\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-)}{\tau - z_2} d\tau + \right.$$

$$+\frac{1}{2\pi i X(z_2)} \int_L \frac{X(\tau) [\mu_1 (\sigma_y^+ + \sigma_y^-) + (\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^-)]}{\tau - z_2} d\tau -$$

$$\left. - (\mu_1 \sigma_y^\infty + \tau_{xy}^\infty) \left[1 - \frac{2z_2 - (\alpha + \beta)}{2X(z_2)} \right] - \frac{(\mu_1 - \mu_2) C - (\mu_1 - \mu_2) \bar{C}}{(\mu_2 - \mu_2) X(z_2)} \right\}.$$

Для определения C из условий однозначности смещений получим уравнение

$$(1.16) \quad C = \{(X + \bar{\mu}_2 Y) [\bar{A}(p_2 + iq_2 + B) + B(p_2 - iq_2 - \bar{A})] - \\ - (X + \mu_2 Y) [\bar{A}(p_2 + iq_2 - A) + B(\bar{p}_2 - i\bar{q}_2 + \bar{B})]\} \{2\pi i (|A|^2 - |B|^2)\}^{-1}, \\ A = \{(p_1 + iq_1)(\mu_2 - \bar{\mu}_2) - (p_2 + iq_2)(\mu_1 - \bar{\mu}_2) + \\ + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)(\mu_1 - \mu_2)\} [2(\mu_1 - \mu_2)]^{-1}, \\ B = \{(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)(\mu_2 - \bar{\mu}_2) - (p_2 + iq_2)(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \times \\ \times (\bar{\mu}_1 - \mu_2)\} [2(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2)]^{-1}, \\ X + iY = \int_L (\tau_{xy}^- - \tau_{xy}^+) d\tau + i \int_L (\sigma_y^- - \sigma_y^+) d\tau.$$

Ограничиваясь случаем ортотропного материала с $\mu_\nu = i\beta_\nu$ ($\nu = 1, 2$) и трещины $L = \{|x| < a; y = 0\}$, нагруженной вдоль отрезка $b < x < c$ ($-a < b < c < a$) верхнего берега постоянным давлением и касательными усилиями σ и τ , из (1.15), (1.16) найдем коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) отрыва и сдвига в вершинах трещины:

$$K_1(\pm a) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left\{ \pm \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \mp \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2} + \arcsin \frac{c}{a} - \right. \\ \left. - \arcsin \frac{b}{a} \right\} + \frac{\tau(c-b)}{2\pi\sqrt{a}} \left\{ \frac{1}{(\beta_1 + \beta_2)} \left[\frac{a_{12}}{a_{22}} \beta_1 \beta_2 + 1 \right] \right\}, \\ K_2(\pm a) = -\frac{\sigma(c-b)}{2\pi\sqrt{a}} \left\{ \frac{1}{(\beta_1 + \beta_2)} \left[\frac{a_{12}}{a_{11}} + \beta_1 \beta_2 \right] \right\} + \\ + \frac{\tau\sqrt{a}}{2\pi} \left\{ \pm \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \mp \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2} + \arcsin \frac{c}{a} - \arcsin \frac{b}{a} \right\}.$$

2. Рассмотрим сформулированную выше задачу, когда на берегах разрезов L заданы смещения

$$(2.1) \quad (u + iv)^\pm = G^\pm(t) = g_1^\pm(t) + ig_2^\pm(t), \quad t \in L.$$

Будем считать, что главный вектор внешних усилий, действующих на берегах разрезов L_j , известен: $X_j + iY_j$, а функции $G^\pm(t)$ удовлетворяют в вершинах a_j, b_j разреза L_j условию непрерывности

$$(2.2) \quad G^+(a_j) = G^-(a_j), \quad G^+(b_j) = G^-(b_j).$$

Краевым условиям (2.1) можно придать вид

$$(2.3) \quad W^\pm(t) = \left(p_2 \frac{d\sigma_2^\pm}{ds} - q_2 \frac{d\sigma_1^\pm}{ds} \right) \{(\bar{p}_2 q_2 - p_2 \bar{q}_2) M_2(t)\}^{-1}.$$

Подставляя $\Phi_\nu(z_\nu)$ из (1.8) в (2.3) и вычитая из первого равенства второе, получим

$$(2.4) \quad A(t)\omega_1(t) + B(t)\overline{\omega_1(t)} + \omega_2(t) = W_1(t), \quad W_1(t) = W^+(t) - W^-(t).$$

Из соотношений (1.7), (2.4) определим $\omega_\nu(t)$ и далее будем считать их и потенциалы $\Phi_{\nu 2}(z_\nu)$ из (1.5) известными.

Складывая предельные равенства (2.3) и учитывая соотношение (1.6), аналогично найдем основное СИУ задачи:

$$(2.5) \quad \int_L \frac{\mu_1(\tau) d\tau_1}{\tau_1 - t_1} + \int_L \{K_{21}(t, \tau)\mu_1(\tau) + K_{22}(t, \tau)\overline{\mu_1(\tau)}\} ds = f_2^*(t), \\ K_{21}(t, \tau) ds = \frac{1}{2} \left\{ d \ln \frac{\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2}{\tau_1 - t_1} + \frac{\bar{B}(\tau) - \bar{B}(t)}{B(t)(\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2)} d\bar{\tau}_2 \right\},$$

$$K_{22}(t, \tau) ds = \frac{1}{2} \left\{ d \ln \frac{\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2}{\tau_1 - t_1} + \frac{\overline{A(\tau)} - \overline{A(t)}}{B(t)(\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2)} d\bar{\tau}_2 \right\},$$

$$f^*(t) = f_2(t) - \int_L \{K_{23}(t, \tau) \omega_1(\tau) + K_{24}(t, \tau) \overline{\omega_1(\tau)}\} ds,$$

$$f_2(t) = \frac{\pi i}{2B(t)} \{W_2(t) - 2[\overline{A(t)} \overline{\Phi_{10}(t_1)} + \overline{B(t)} \overline{\Phi_{10}(t_1)} + \overline{\Phi_{20}(t_2)}]\},$$

$$K_{23}(t, \tau) ds = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t_1} + \frac{b(\tau) d\bar{\tau}_2}{B(t)(\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2)} \right\},$$

$$K_{24}(t, \tau) ds = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a(\tau)}{B(t)} \frac{d\bar{\tau}_2}{\tau_2 - \bar{t}_2} - \frac{\overline{A(t)}}{B(t)} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t_1} \right\},$$

$$W_2(t) = W^+(t) - W^-(t).$$

Из соотношений (1.9), (2.2) вытекает, что искомую функцию следует подчинить дополнительному условию

$$(2.6) \quad \int_L \mu_1(\tau) d\tau_1 = \Lambda_j \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$\Lambda_j = \frac{(X_j + \mu_2 Y_j) \{(\mu_1 - \bar{\mu}_2) - (\mu_2 - \bar{\mu}_2) A_0\} + (X_j - \mu_2 Y_j) \{(\mu_1 - \bar{\mu}_2) - (\mu_2 - \bar{\mu}_2) B_0\}}{|(\mu_1 - \mu_2) - (\mu_2 - \bar{\mu}_2) A_0|^2 + |(\mu_1 - \bar{\mu}_2) - (\mu_2 - \bar{\mu}_2) B_0|^2}.$$

Пусть на разрезах L_j ($j = \overline{1, k}$; $k < n$) заданы краевые условия (1.9), а на L_{k+1}, \dots, L_n — (2.3). В этом случае искомые решения имеют вид

$$(1.8). \text{ Для определения неизвестных } \omega_v(t) \text{ при } t \in L_1 = \bigcup_{j=1}^k L_j \text{ и } \mu_v(t)$$

при $t \in L_2 = \bigcup_{j=k+1}^n L_j$ получим систему СИУ

$$(2.7) \quad \int_{L_1} \frac{\omega_1(\tau) d\tau_1}{\tau_1 - t_1} + \int_{L_1} \{K_{11}(t, \tau) \omega_1(\tau) + K_{12}(t, \tau) \overline{\omega_1(\tau)}\} ds + \\ + \int_{L_2} \{K_{13}(t, \tau) \mu_1(\tau) + K_{14}(t, \tau) \overline{\mu_1(\tau)}\} ds = f_1^{**}(t_1), t \in L_1;$$

$$(2.8) \quad \int_{L_2} \frac{\mu_1(\tau) d\tau_1}{\tau_1 - t_1} + \int_{L_2} \{K_{21}(t, \tau) \mu_1(\tau) + K_{22}(t, \tau) \overline{\mu_1(\tau)}\} ds + \\ + \int_L \{K_{23}(t, \tau) \omega_1(\tau) + K_{24}(t, \tau) \overline{\omega_1(\tau)}\} ds = f_2^{**}(t), t \in L_2,$$

$$f_1^{**}(t) = f_1(t) - \int_{L_2} \{K_{13}(t, \tau) \mu_1(\tau) + K_{14}(t, \tau) \overline{\mu_1(\tau)}\} ds -$$

$$- \int_{L_2} \left\{ \frac{\omega_1(\tau) d\tau_1}{\tau_1 - t_1} + K_{11}(t, \tau) \omega_1(\tau) + K_{12}(t, \tau) \overline{\omega_1(\tau)} \right\} ds,$$

$$f_2^{**}(t) = f_2(t) - \int_{L_2} \{K_{23}(t, \tau) \omega_1(\tau) + K_{24}(t, \tau) \overline{\omega_1(\tau)}\} ds -$$

$$- \int_L \left\{ \frac{\mu_1(\tau) d\tau_1}{\tau_1 - t_1} + K_{21}(t, \tau) \mu_1(\tau) + K_{22}(t, \tau) \overline{\mu_1(\tau)} \right\} ds, \quad \dot{\tau}_v = \frac{d\tau_v}{ds}.$$

Уравнения (2.7), (2.8) необходимо дополнить условиями (1.14) при $j = \overline{1, k}$ и (2.6) при $j = k+1, n$.

Аналогично решается с помощью потенциалов (1.8) задача, когда на одном берегу разрезов L заданы смещения, а на другом — напряжения.

Интегральные представления (1.5) являются общим решением, и с их помощью можно изучать самые различные краевые задачи для областей с разрезами и линейными включениями. В частности, удовлетворив с помощью представлений (1.5) и формул (1.9), (2.3) граничным условиям для анизотропной пластины с разрезами, когда на одном берегу разреза заданы напряжения, а на другом — смещения, найдем СИУ второго рода. При использовании условий неидеального контакта упругих тел, когда напряжения и смещения берегов разреза связаны линейными зависимостями (см. [3, 4, 9]), можно получить сингулярные интегродифференциальные уравнения типа Прандтля для тел с тонкостенными упругими включениями. Полученные интегральные представления могут применяться и при решении различных смешанных (контактных) задач для тел с разрезами, задач о полосах пластичности, моделируемых скачками смещений [9].

3. СИУ (1.11), (2.5), (2.7) и (2.8) принадлежат к типу уравнений, подробно изученных в литературе [8]. В классе функций, не ограниченных вблизи концов a_j, b_j (в классе H_0^*), индекс СИУ равен $\kappa = 1$ (см. [8]), эти уравнения всегда разрешимы и их решение на каждой дуге L_j содержит линейным образом одну произвольную постоянную. При выполнении условий (1.14), (2.6) решение данных уравнений единственно.

Таким образом, решение, например, уравнений (1.11), (1.14) можно представить в виде

$$\omega_1(t) = \frac{\Omega_j^*(t)}{\sqrt{(t-a_j)(t-b_j)}}, \quad t \in L_j \quad (j = \overline{1, n}),$$

где $\Omega_j^*(t)$ — функция класса H на L_j в окрестности концов разреза; $\sqrt{(t-a_j)(t-b_j)}$ — любая определенная ветвь, непрерывно изменяющаяся на L_j .

Пусть уравнения дуг L_j описываются соотношениями $t = \tau^j(\eta)$, $a_j = \tau^j(-1)$, $b_j = \tau^j(1)$ (η — безразмерный действительный параметр). Функции $\tau^j(\eta)$ будем считать непрерывно дифференцируемыми на $[-1, 1]$. После замены переменных уравнение (1.11) можно представить в виде системы СИУ:

$$(3.1) \quad \int_{-1}^1 \frac{F_j(\xi, \eta) \chi_j(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \sum_{p=1}^n \int_{-1}^1 \{k_1^{jp}(\xi, \eta) \chi_p(\eta) + k_2^{jp}(\xi, \eta) \overline{\chi_p(\eta)}\} d\eta = f_j(\xi),$$

$$\omega_1(t) = \omega_1[\tau^j(\xi)] = \chi_j(\xi) = \chi_j^c(\xi) (1 - \xi^2)^{-1/2},$$

$$F_j(\xi, \eta) = \frac{(\eta - \xi) \dot{\tau}_1^j(\eta)}{\tau_1^j(\eta) - \tau_1^j(\xi)}, \quad \dot{\tau} = \frac{d\tau}{d\xi}, \quad f_j(\xi) = f_j[\tau^j(\xi)],$$

$$k_1^{jp}(\xi, \eta) = \frac{ds}{d\eta} K_{11}[\tau^j(\xi), \tau^p(\eta)] + \frac{(1 - \delta_{js}) \dot{\tau}_1^p(\eta)}{\tau_1^p(\eta) - \tau_1^j(\xi)},$$

$$k_2^{jp}(\xi, \eta) = \frac{ds}{d\eta} K_{13}[\tau^j(\xi), \tau^p(\eta)]$$

(δ_{jp} — символ Кронекера). Условия (1.14) запишем как

$$(3.2) \quad \int_{-1}^1 \chi_j(\eta) \dot{\tau}_1^j(\eta) d\eta = 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

При помощи квадратурных формул Гаусса — Чебышева сводим решение уравнений (3.1), (3.2) к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомых функций $\chi_j^0(\beta)$ ($j = \overline{1, n}$) в чебышевских узлах $\beta_i = \cos((2i-1)\pi/(2M))$ ($i = \overline{1, N}$). Теоретические оценки сходимости этого численного метода даны, например, в [10].

Зная $\chi_j^0(\bar{\rho}_i)$ и $\chi_j^0(+i)$, на основании (1.5), (1.6), (2.4) находим асимптотические формулы для напряжений в окрестности $c = \tau^j(\pm 1)$ концов разреза L_j (ниже индекс j опускаем):

$$\lim \sqrt{2r} (\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y) = \operatorname{Re} \left\{ \left(\pm \frac{ds}{d\eta} \Big|_{\eta=\pm 1} \right)^{1/2} \sum_{v=1}^2 (\mu_v^2 - \mu_v, 1) C_v(\vartheta) \right\},$$

$$C_v(\vartheta) = \Omega_v [M_v(c) (\cos \vartheta + \mu_v \sin \vartheta)^{-1}]^{1/2}, \quad z - c = re^{i\vartheta},$$

$$\Omega_1 = \chi^0(\mp 1) + \psi^0(\mp 1), \quad \psi^0(\eta) = \mu_1 [\tau(\eta)] (1 - \eta^2)^{1/2},$$

$$\Omega_2 = -a(c) \chi^0(+1) - b(c) \overline{\chi^0(+1)} - A(c) \psi^0(+1) - B(c) \overline{\psi^0(+1)},$$

а также значения КИН отрыва и сдвига K_1, K_2 [4].

Полученные выше СИУ основных задач теории упругости для системы гладких криволинейных разрезов могут быть использованы и при рассмотрении кусочно-гладких криволинейных разрезов (ломаных и ветвящихся). При этом разрез разбивается на гладкие участки и рассматривается как система гладких разрезов, имеющих общие точки пересечения, а также применяется хорошо зарекомендовавшая себя упрощенная процедура численного решения возникающих СИУ (3.1), (3.2) с неподвижными особенностями [9], позволяющая избежать исследования характера поведения искомых функций в окрестности угловых точек.

Представления (1.5), (1.8) и алгоритмы численного решения возникающих СИУ оказались эффективным инструментом определения НДС в окрестности вершин разрезов сложной формы в анизотропных и изотропных пластинах. В качестве иллюстрации ниже приводятся результаты численного решения ряда модельных задач механики разрушения.

На рис. 2 для пластин из ортотропного материала ($E_x = E_1 = 53,84$ ГПа, $E_y = E_2 = 17,95$ ГПа, $G_{12} = 8,63$ ГПа, $\nu_{yx} = \nu_1 = 0,25$) приводятся зависимости поправочного КИН отрыва и сдвига $k_{1,2} = K_{1,2} / ((\sigma \sqrt{\pi l^*})$ (нисходящие и восходящие кривые, $2l^*$ — длина трещины) в верхнем конце трещины L , расположенной по дуге эллипса ($a_1 = a, b_1 = (a \cos \vartheta + ib \sin \vartheta)$ — вершина трещины), как функции параметра ϑ для различных отношений полуосей эллипса $\lambda = a/b$ при нагружении $\sigma_x^\infty = \sigma, \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0$. Горизонтальные кривые $k_1 = 1, k_2 = 0$ соответствуют значению $K_{1,2}$ в концах прямолинейной трещины ($\lambda = 0$). Расчеты свидетельствуют о хорошей сходимости алгоритма для сильно и слабо анизотропных материалов ($1 \leq E_1/E_2 \leq 25$): уже при $N \geq 5$ наблюдается совпадение в первых трех значащих цифрах.

Рассмотрим симметричную систему трех трещин $L_1 = \{|x| < a; y = 0\}, L_{2,3} = \{b < |x| < c; y = 0\}$, нагруженных постоянным давлением (рис. 3), и ограничимся случаем ортотропного материала с $\mu_v = i\beta_v$ ($\beta_v > 0$) при $(c - b) < 2a$ (крайние трещины не больше центральной). Из (1.8), (1.11) и (1.14) найдем ($\lambda = 3 - \nu$)

$$\Phi_v(z_v) = \frac{\mu_\lambda \sigma}{\mu_v - \mu_\lambda} \frac{z_v^3 + Cz_v - R(z_v)}{2R(z_v)},$$

$$C = - \int_b^c \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(c^2 - x^2)}} \left\{ \int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(c^2 - x^2)}} \right\}^{-1},$$

$$R(z) = \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)(z^2 - c^2)}, \quad R(z) \rightarrow z^3, \quad z \rightarrow \infty.$$

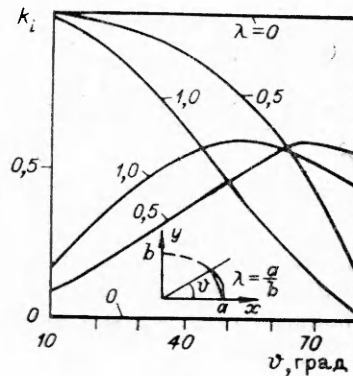


Рис. 2

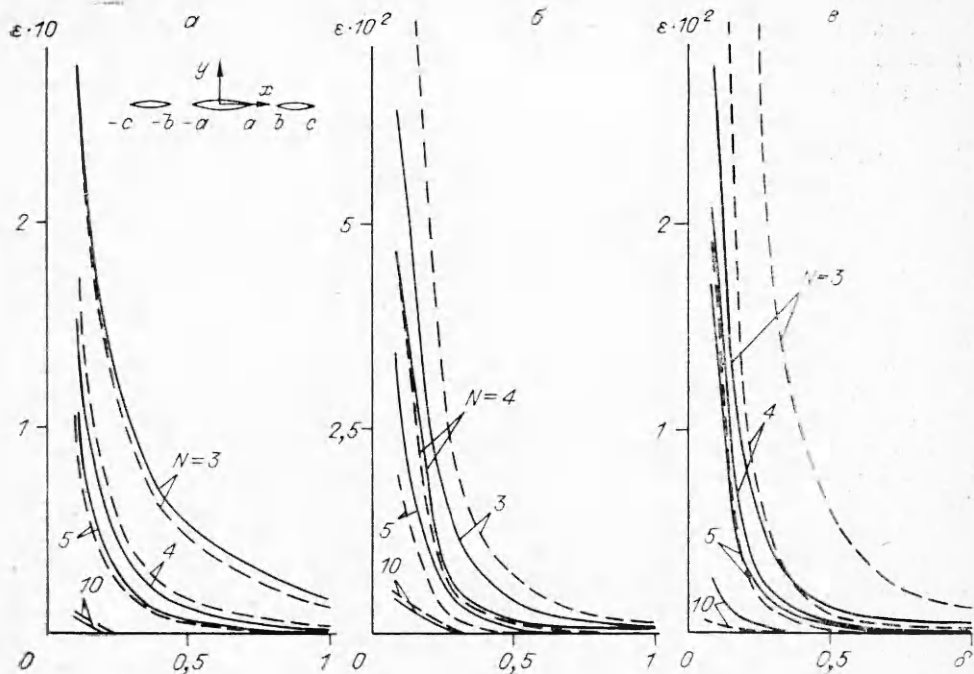


Рис. 3

Интегралы в S могут быть приведены к полным эллиптическим. Распределение напряжений σ_y на оси x совпадает с распределением для изотропного тела, а КИН отрыва в вершинах $x = \pm a$, $y = \pm b$ трещин $L_1, L_{2,3}$ примут вид

$$K_1^0(\pm a) = \sigma \sqrt{\pi a} (c^2 - a^2)^{1/2} (b^2 - c^2)^{-1/2} E(k)/K^*(k),$$

$$K_1^0(\pm b) = \sigma \sqrt{\pi b} (b^2 - a^2)^{1/2} (c^2 - b^2)^{-1/2} \{ (c^2 - a^2)E(k) / [(b^2 - a^2)K^*(k)]^{-1} - 1 \},$$

где $K^*(k)$, $E(k)$ — полный эллиптический интеграл первого и второго рода с модулем $k = (c^2 - b^2)^{1/2} (c^2 - a^2)^{-1/2}$ [11].

Сравнение полученных в счете значений $K_1(\pm a)$, $K_1(\pm b)$ с точными K_1^0 дано на рис. 3 и в таблице. В качестве меры погрешности численного решения взята относительная погрешность $\varepsilon = |K_1 - K_1^0| / (K_1^0)^{-1}$ в вершинах a и b трещин (сплошные и штриховые линии) в зависимости от относительного размера перемычки $\delta = (b - a)/a$ для различного числа узлов разбиения N и соотношений размеров трещин $\Delta = (c - b) / (2a)^{-1} = 1; 0,1; 0,05$ (рис. 3, $a - v$ соответственно). Расчеты по-

Δ	δ	N					
		$\varepsilon(+a)$			$\varepsilon(+b)$		
		3	4	5	3	4	5
1	0,1	0,27	0,15	0,10	0,27	0,17	0,10
	0,5	0,05	0,01	0	0,05	0,02	0
	1,0	0,02	0	0	0,01	0	0
0,1	0,1	0,06	0,04	0,03	0,12	0,05	0,02
	0,5	0	0	0	0,01	0	0
	1,0	0	0	0	0	0	0
0,05	0,1	0,03	0,02	0,01	0,11	0,05	0,02
	0,5	0	0	0	0	0	0
	1,0	0	0	0	0	0	0

казывают, что при не слишком малой перемычке между вершинами трещин L_1 и $L_{2,3}$ ($\delta > 0,2$) и $\Delta < 1$ удовлетворительная точность достигается уже при $N \geq 3$. С уменьшением Δ и увеличением δ сходимость улучшается.

На рис. 4 представлены результаты расчетов КИН отрыва и сдвига $K_{1,2}$ (сплошные и штриховые линии) в вершинах трехзвенной ломаной трещины, состоящей из двух криволинейных разрезов (вдоль дуги гиперболы с одинаковыми осями величины a), исходящих от концов прямолинейного разреза $\Lambda = \{z = a\eta e^{i(\pi/4)} | |\eta| < 1\}$, в зависимости от параметра α , характеризующего размер дефекта. Данные приведены для изотропного ($E_1/E_2 \rightarrow 1$, кривая 1) и ортотропного материалов (боропластик: $E_1 = 276,1$ ГПа, $E_2 = 27,61$ ГПа, $G_{12} = 10,35$ ГПа, $\nu_1 = 0,25$) при значениях угла $\varphi = 0; \pi/4; \pi/2; 3\pi/4$ (кривые 2—5), обра-

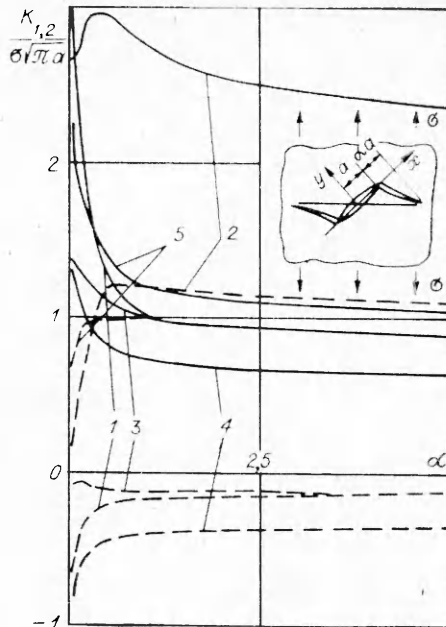


Рис. 4.

зованного главным направлением анизотропии E_1 с осью x . Расчеты для сильно ($E_1/E_2 = 10$) и слабо ($E_1/E_2 \rightarrow 1$) анизотропных материалов показывают, что уже при $N \geq 10$ (N — число чебышевских узлов на гладких звеньях) наблюдается совпадение K_1 в первых трех значащих цифрах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами // Изв. АН СССР. МТТ.— 1976.— № 5.
2. Sih G. G., Chen E. P. Mechanics of fracture.— Hague e. a.: M. Nijhoff Publ., 1981.— V. 6. Cracks in composite materials.
3. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле.— Киев: Наук. думка, 1983.
4. Максименко В. Н. Расчет анизотропных пластин, ослабленных трещинами и подкрепленных ребрами жесткости, при помощи сингулярных интегральных уравнений // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Матер. VII Всесоюз. конф.— Новосибирск: ИГиМ, 1982.
5. Бардзокас Д. Я., Партон В. З., Теокарис П. С. Плоская задача теории упругости для ортотропной области с дефектами // ДАН СССР.— 1989.— Т. 309, № 5.
6. Екобори Т. Научные основы прочности и разрушения материалов.— Киев: Наук. думка, 1978.
7. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки.— М.: ГИТТЛ, 1957.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: Физматгиз, 1963.
9. Саврук М. П., Осив П. М., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин.— Киев: Наук. думка, 1989.
10. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.— М.: Наука, 1985.
11. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.

г. Новосибирск

Поступила 16/VI 1992 г.