УДК 539.311

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО, СОДЕРЖАЩЕЙ ТРЕЩИНУ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Н. П. Лазарев

Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, 677000 Якутск
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: nyurgun@ngs.ru

Исследуется задача о равновесии композитной пластины, состоящей из матрицы и упругого включения, вдоль границы которого расположена сквозная трещина. Деформирование матрицы описывается моделью Тимошенко, а упругого включения — моделью Кирхгофа — Лява. На кривой, описывающей трещину, задаются условия взаимного непроникания берегов трещины. Доказана однозначная разрешимость вариационной задачи. Получена система краевых условий на кривой, ограничивающей (в срединной плоскости) упругое включение. Сформулирована дифференциальная постановка задачи, эквивалентная исходной вариационной постановке.

Ключевые слова: пластина, трещина, условие непроникания, вариационная задача, упругое включение.

Введение. Интерес к исследованию напряженно-деформированного состояния тел, содержащих упругие включения, обусловлен широким применением композитных материалов. Неоднородность материала может привести к образованию трещин (отслоению включения) вдоль границы между средами. Описание деформирования тел с включениями при наличии трещин является сложной проблемой. Как известно, в классическом подходе к моделированию трещин в деформируемых телах используются линейные краевые условия на берегах трещины, что часто приводит к противоречиям [1, 2]. В настоящее время имеется ряд результатов решения задач теории трещин, в которых краевые условия имеют вид системы равенств и неравенств [3–5]. Эти условия формулируются на кривой (поверхности), соответствующей трещине, и имеют ясную физическую интерпретацию — описание взаимного непроникания противоположных берегов трещины. В работах [6–8] изучены задачи с условиями непроникания в виде неравенств, описывающими равновесие пластин. В [9–11] исследованы различные модели композитных материалов.

В настоящей работе рассматривается пластина, состоящая из двух областей с различными механическими свойствами. Эти области разделяются цилиндрической поверхностью, проходящей через замкнутый контур в срединной плоскости пластины (образующие поверхности направлены перпендикулярно срединной плоскости пластины). Внутреннюю область пластины (относительно замкнутой цилиндрической поверхности) будем называть упругим включением, а внешнюю область — матрицей. Предполагается,

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение № 8222) и в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект № 4402).

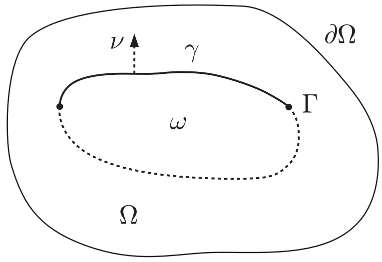

Схема задачи

что свойства матрицы пластины позволяют применить для описания ее деформирования модель Тимошенко. Деформирование включения с бесконечной жесткостью поперечного сдвига описывается моделью Кирхгофа — Лява. Незамкнутая область на цилиндрической поверхности, ограничивающей включение, представляет собой сквозную трещину в пластине. На внешней границе пластины выполняются условия жесткого защемления, на кривой, задающей трещину, — условия взаимного непроникания берегов.

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Подобласть ω находится строго внутри Ω, т. е. $\overline{\omega} \cap \partial\Omega = \varnothing$, а ее граница Γ является достаточно гладкой (см. рисунок). Будем считать, что Γ состоит из двух участков γ и $\Gamma \setminus \gamma$, причем $\operatorname{meas}(\Gamma \setminus \gamma) > 0$, γ — кривая, $\partial\gamma \notin \gamma$. Предположим, что пластина имеет постоянную толщину $h = 2$. Трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ определим таким образом, чтобы множество $\Omega_\gamma \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ соответствовало срединной плоскости пластины, причем $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \overline{\gamma}$. При этом кривая γ задает трещину (разрез) в пластине. Это означает, что поверхность сквозной трещины можно задать соотношениями $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \gamma$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$, где $|z|$ — расстояние до срединной плоскости. В данной работе подобласть ω соответствует области пластины, описываемой моделью Кирхгофа — Лява, а подобласть $\Omega \setminus \overline{\omega}$ — области пластины, описываемой моделью Тимошенко для трансверсально-изотропного материала.

Обозначим через $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{U}, u)$ вектор перемещений точек срединной поверхности, $\boldsymbol{x} \in \Omega_\gamma$ ($\boldsymbol{U} = (u^1, u^2)$ и u — горизонтальные и вертикальные перемещения соответственно). Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = (\varphi^1, \varphi^2)$, $\boldsymbol{x} \in \Omega_\gamma$. В соответствии с направлением внешней (по отношению к ω) нормали $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ к Γ имеются положительный Γ^+ и отрицательный Γ^- берега. В случае, когда след функции v выбирается на положительном берегу Γ^+, используется обозначение $v^+ = v\big|_{\Gamma^+}$, на отрицательном берегу — обозначение $v^- = v\big|_{\Gamma^-}$. Скачок функции на Γ обозначим через $[v] = v^+ - v^-$. Аналогичные обозначения будем использовать для γ^+ и γ^-.

Приведем известные тензорные соотношения теории упругости, справедливые для упругих трансверсально-изотропных пластин. Тензоры, описывающие деформацию пластины, определяются по формулам

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) = (\varphi,^i_j + \varphi,^j_i)/2, \quad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U}) = (u,^i_j + u,^j_i)/2, \quad i, j = 1, 2,$$

где нижние индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей координате. Тензоры моментов и усилий вычисляются по формулам

$$m_{ij}(\boldsymbol{\varphi}) = b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{\varphi}), \quad \sigma_{ij}(\boldsymbol{U}) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{U}), \quad i, j, k, l = 1, 2 \tag{1}$$

(по повторяющимся индексам проводится суммирование). Здесь $A = \{a_{ijkl}\}$, $B = \{b_{ijkl}\}$ — тензоры модулей упругости, удовлетворяющие условиям симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad i, j, k, l = 1, 2,$$
$$a_{ijkl}\zeta_{kl}\zeta_{ij} \geqslant c_0\zeta_{ij}\zeta_{ij} \quad \forall \zeta_{ij} = \zeta_{ji}, \quad c_0 > 0,$$

аналогичные соотношения справедливы для тензора $B = \{b_{ijkl}\}$. В силу предположений о трансверсальной изотропности материала матрицы пластины в области $\Omega \setminus \overline{\omega}$ ненулевые коэффициенты тензоров A и B определяются соотношениями

$$b_{iiii} = D, \quad b_{iijj} = D\varkappa, \quad b_{ijij} = b_{ijji} = D(1-\varkappa)/2, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,2,$$
$$a_{ijkl} = 3b_{ijkl}, \quad i,j,k,l = 1,2,$$

где D — цилиндрическая жесткость; $0 < \varkappa < 1/2$ — коэффициент Пуассона. Поперечные силы, действующие в области пластины, описываемой моделью Тимошенко, задаются выражениями

$$q_i(u,\boldsymbol{\varphi}) = \Lambda(u_{,i} + \varphi^i) \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \overline{\omega}, \quad i = 1,2, \tag{2}$$

где $\Lambda = 2k'G$; k' — коэффициент сдвига; G — модуль сдвига на площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины.

Считая параметр жесткости поперечного сдвига равным бесконечности в упругом включении, тем самым задаем отсутствие сдвигов в нормальных к срединной поверхности пластины плоскостях. Это означает выполнение гипотезы прямых нормалей Кирхгофа — Лява (см. [12]). Таким образом, в области, занимаемой упругим включением, выполнены равенства

$$u_{,i} + \varphi^i = 0 \quad \text{в} \quad \omega, \quad i = 1,2. \tag{3}$$

Подставляя равенства (3) в формулы (1) для m_{ij}, $i,j = 1,2$, можно получить известные соотношения для моментов в модели Кирхгофа — Лява

$$m_{ij} = -b_{ijkl}u_{,kl} \quad \text{в} \quad \omega, \quad i = 1,2. \tag{4}$$

Для усилий $\sigma_{ij}(\boldsymbol{U})$ и деформаций $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{U})$, $i,j = 1,2$ в модели Кирхгофа — Лява справедливы соотношения (1).

Полная энергия деформации пластины $\Pi(\boldsymbol{\xi})$ представляет собой сумму функционалов энергии, соответствующих упругому включению и матрице:

$$\Pi(\boldsymbol{\xi}) = \Pi_1(\boldsymbol{\chi}) + \Pi_2(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{U}, u). \tag{5}$$

Как известно, в соответствии с моделями Кирхгофа — Лява (см. [13]) и Тимошенко (см. [3]) функционалы энергии упругого включения $\Pi_1(\boldsymbol{\chi})$ и матрицы $\Pi_2(\boldsymbol{\xi})$ определяются по формулам

$$\Pi_1(\boldsymbol{\chi}) = \frac{1}{2}\, b_\omega(\boldsymbol{\chi},\boldsymbol{\chi}) - \int\limits_\omega (f_i u^i + f_3 u), \quad \Pi_2(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\, B_{\Omega\setminus\overline{\omega}}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} (f_i u^i + f_3 u + \mu_i \varphi^i),$$

где $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(\Omega_\gamma)^3$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2) \in L^2(\Omega \setminus \overline{\omega})^2$ — векторы, задающие внешние нагрузки; билинейные формы $b_\omega(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ и $B_{\Omega\setminus\overline{\omega}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ определяются равенствами

$$b_M(\boldsymbol{\chi},\bar{\boldsymbol{\chi}}) = \int\limits_M \big(b_{ijkl}u_{,kl}\ \bar{u}_{,ij} + \sigma_{ij}(\boldsymbol{U})\varepsilon_{ij}(\bar{\boldsymbol{U}})\big),$$

$$B_M(\boldsymbol{\xi},\bar{\boldsymbol{\xi}}) = \int\limits_M \big(m_{ij}(\boldsymbol{\varphi})\varepsilon_{ij}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}) + \Lambda(u_{,i} + \varphi^i)(\bar{u}_{,i} + \bar{\varphi}^i) + \sigma_{ij}(\boldsymbol{U})\varepsilon_{ij}(\bar{\boldsymbol{U}})\big)$$

для достаточно гладких функций $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{U}, u, \boldsymbol{\varphi})$, $\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{U}, u)$, $\bar{\boldsymbol{\xi}} = (\bar{\boldsymbol{U}}, \bar{u}, \bar{\boldsymbol{\varphi}})$, $\bar{\boldsymbol{\chi}} = (\bar{\boldsymbol{U}}, \bar{u})$; $M \subset \Omega_\gamma$ — подобласть, относительно которой проводится интегрирование.

С помощью формул (3) функционал (5) можно представить в виде

$$\Pi(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\, B_{\Omega_\gamma}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i u^i + f_3 u) - \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu_i \varphi^i, \qquad \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{U}, u, \boldsymbol{\varphi}).$$

Для того чтобы сформулировать задачу о равновесии пластины в вариационном виде, выберем соответствующие функциональные пространства и введем множество допустимых функций.

Пусть $H^1(\Omega_\gamma)$ — пространство Соболева, $H^{1,0}(\Omega_\gamma)$ — его подпространство, состоящее из всех функций, которые обращаются в нуль на внешней границе $\partial\Omega$. Введем следующие обозначения:

$$H = H^{1,0}(\Omega_\gamma)^5, \qquad \|\cdot\| = \|\cdot\|_H.$$

При определении множества K допустимых функций в модели пластины Тимошенко используем условие непроникания противоположных берегов сквозной трещины (см. [8])

$$[\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}] \geqslant |[\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}]| \quad \text{на} \quad \gamma, \quad \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}} = u^i \nu_i, \quad \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}} = \varphi^i \nu_i. \tag{6}$$

Класс искомой функции и условие жесткого защемления на внешней границе пластины $\partial\Omega$ зададим с помощью включения $K \subset H$. При определении множества K потребуем также выполнения гипотезы прямых нормалей в области ω. Таким образом, множество допустимых функций K определяется соотношением

$$K = \{\, \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{U}, u, \boldsymbol{\varphi}) \in H\colon\ u_{,i} + \varphi^i = 0 \text{ в } \omega,\ i = 1, 2;\ [\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}] \geqslant |[\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}]| \text{ на } \gamma \,\}.$$

Задачу о равновесии пластины сформулируем в виде минимизации функционала энергии

$$\min_{\boldsymbol{\xi}\in K} \Pi(\boldsymbol{\xi}). \tag{7}$$

Поскольку требуется найти решение $\boldsymbol{\xi}$ в пространстве H, предполагается, что на границе сред вне трещины выполнены условия склейки

$$[\boldsymbol{\xi}] = (\mathbf{0}, 0, \mathbf{0}) \quad \text{на} \quad \Gamma \setminus \overline{\gamma}, \qquad \mathbf{0} = (0, 0).$$

Выпуклость, слабая полунепрерывность и коэрцитивность функционала $\Pi(\boldsymbol{\xi})$ в пространстве H могут быть установлены аналогично тому, как это сделано в [8]. Свойства $\Pi(\boldsymbol{\xi})$, выпуклость и замкнутость множества K гарантируют существование и единственность решения задачи (7), которое далее обозначается $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{U}, u, \boldsymbol{\varphi})$. Задача (7) эквивалентна вариационному неравенству

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{U}, u, \boldsymbol{\varphi}) \in K,$$

$$B_{\Omega_\gamma}(\boldsymbol{\xi}, \bar{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi}) \geqslant \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i(\bar{u}^i - u^i) + f_3(\bar{u} - u)) + \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu_i(\bar{\varphi}^i - \varphi^i) \tag{8}$$

$$\forall\, \bar{\boldsymbol{\xi}} = (\bar{\boldsymbol{U}}, \bar{u}, \bar{\boldsymbol{\varphi}}) \in K.$$

С учетом соотношений (3) вариационное неравенство (8) можно представить в виде

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{U}, u, \boldsymbol{\varphi}) \in K,$$

$$B_{\Omega\setminus\overline{\omega}}(\boldsymbol{\xi}, \bar{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi}) + b_\omega(\boldsymbol{\chi}, \bar{\boldsymbol{\chi}} - \boldsymbol{\chi}) \geqslant \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i(\bar{u}^i - u^i) + f_3(\bar{u} - u)) + \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu_i(\bar{\varphi}^i - \varphi^i) \tag{9}$$

$$\forall\, \bar{\boldsymbol{\xi}} = (\bar{\boldsymbol{U}}, \bar{u}, \bar{\boldsymbol{\varphi}}) \in K.$$

В результате сравнения двух неравенств, полученных путем подстановки в (9) пробных функций $\bar{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi} + \tilde{\boldsymbol{\xi}}$ и $\bar{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi} - \tilde{\boldsymbol{\xi}}$, где $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = (\tilde{\boldsymbol{U}}, \tilde{u}, \tilde{\boldsymbol{\varphi}}) \in C_0^\infty(\Omega \setminus \overline{\omega})^5$, получаем равенство

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \big(m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}) + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\boldsymbol{U}}) + q_i(\tilde{u},_i + \tilde{\varphi}^i)\big) = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} (f_i\tilde{u}^i + f_3\tilde{u} + \mu_i\tilde{\varphi}^i).$$

Здесь $m_{ij} = m_{ij}(\boldsymbol{\varphi})$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\boldsymbol{U})$, $q_i = q_i(u, \boldsymbol{\varphi})$, $i, j = 1, 2$. Учитывая независимость функций $\tilde{u}^1$, $\tilde{u}^2$, $\tilde{u}$, $\tilde{\varphi}^1$, $\tilde{\varphi}^2$, из этого равенства находим

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\boldsymbol{U}}) = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} f_i\tilde{u}^i \qquad \forall\tilde{\boldsymbol{U}} \in C_0^\infty(\Omega \setminus \overline{\omega})^2,$$

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} q_i(\tilde{u},_i) = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} f_3\tilde{u} \qquad \forall\tilde{u} \in C_0^\infty(\Omega \setminus \overline{\omega}),$$

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} (m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}) + q_i\tilde{\varphi}^i) = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu_i\tilde{\varphi}^i \qquad \forall\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \in C_0^\infty(\Omega \setminus \overline{\omega})^2.$$

Поскольку справедливы представления

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} m_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}) = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} m_{ij}(\tilde{\varphi},^i_j), \qquad \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\tilde{\boldsymbol{U}}) = \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \sigma_{ij}(\tilde{u},^i_j),$$

из последних трех равенств следуют уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = -f_i \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \overline{\omega}, \quad i = 1, 2; \tag{10}$$

$$q_{i,i} = -f_3 \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \overline{\omega}; \tag{11}$$

$$m_{ij,j} - q_i = -\mu_i \quad \text{в} \quad \Omega \setminus \overline{\omega}, \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

Аналогично, подставляя в (9) произвольную функцию $\bar{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi} + \tilde{\boldsymbol{\xi}}$, такую что $\tilde{\boldsymbol{\xi}} \in C_0^\infty(\omega)^5$, $\tilde{\varphi}^i = -\tilde{u},_i$ в ω, $i = 1, 2$, можно получить равенства

$$-m_{ij,ij} = f_3 \quad \text{в} \quad \omega; \tag{13}$$

$$\sigma_{ij,j} = -f_i \quad \text{в} \quad \omega, \quad i = 1, 2. \tag{14}$$

Из (10)–(14) следует

$$\Delta u \in L^2(\Omega \setminus \overline{\omega}), \quad \sigma_{ij,j} \in L^2(\Omega \setminus \overline{\omega}), \quad m_{ij,j} \in L^2(\Omega \setminus \overline{\omega}), \quad i = 1, 2; \tag{15}$$

$$\sigma_{ij,j} \in L^2(\omega), \quad m_{ij,ij} \in L^2(\omega), \quad i, j = 1, 2. \tag{16}$$

2. Эквивалентная дифференциальная постановка задачи. В данном пункте приводится эквивалентная дифференциальная постановка задачи (7). Используя вариационное неравенство (9) и выбирая пробные функции, выведем краевые условия на кривой Γ. При этом будем использовать формулы Грина, возможность применения которых следует из (15), (16) и свойства гладкости кривой Γ. Предположим, что решение $\boldsymbol{\xi}$ задачи (7) является достаточно гладким.

Для произвольной функции $\bar{\boldsymbol{U}} = (\bar{u}^1, \bar{u}^2) \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$ справедливы формулы Грина (см. [14, 15])

$$\int\limits_{\omega} \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(\bar{\boldsymbol{U}}) = -\int\limits_{\omega} \sigma_{ij,j}\bar{u}^i + \int\limits_{\Gamma^-} (\sigma_{\boldsymbol{\nu}}\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\nu}} + \sigma_{\boldsymbol{\tau}}\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\tau}}); \tag{17}$$

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(\bar{\boldsymbol U}) = -\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \sigma_{ij,j}\bar u^i - \int\limits_{\Gamma^+} (\sigma_{\boldsymbol\nu}\bar{\boldsymbol U}_{\boldsymbol\nu} + \sigma_{\boldsymbol\tau}\bar{\boldsymbol U}_{\boldsymbol\tau}), \qquad (18)$$

где $\sigma_{\boldsymbol\nu} = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$; $\sigma_{\boldsymbol\tau} = \sigma_{ij}\nu_j\tau_i$; $\boldsymbol\tau = (-\nu_2, \nu_1)$; $\bar{\boldsymbol U}_{\boldsymbol\tau} = \bar u^i\tau_i$; $\bar{\boldsymbol U}_{\boldsymbol\nu} = \bar u^i\nu_i$. Для произвольных $\bar{\boldsymbol\varphi} \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$ имеет место формула

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} m_{ij}\varepsilon_{ij}(\bar{\boldsymbol\varphi}) = -\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} m_{ij,j}\bar\varphi^i - \int\limits_{\Gamma^+} (m_{\boldsymbol\nu}\bar{\boldsymbol\varphi}_{\boldsymbol\nu} + m_{\boldsymbol\tau}\bar{\boldsymbol\varphi}_{\boldsymbol\tau}), \qquad (19)$$

где $m_{\boldsymbol\nu} = m_{ij}\nu_j\nu_i$; $m_{\boldsymbol\tau} = m_{ij}\nu_j\tau_i$; $\bar{\boldsymbol\varphi}_{\boldsymbol\tau} = \bar\varphi^i\tau_i$; $\bar{\boldsymbol\varphi}_{\boldsymbol\nu} = \bar\varphi^i\nu_i$. Справедливы следующие соотношения:

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \nabla u\nabla\bar u = -\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \bar u\Delta u - \int\limits_{\Gamma^+} \frac{\partial u}{\partial\boldsymbol\nu}\,\bar u \qquad \forall\bar u \in H^{1,0}(\Omega_\gamma); \qquad (20)$$

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \boldsymbol\varphi\nabla\bar u = -\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \bar u\,\mathrm{div}\,\boldsymbol\varphi - \int\limits_{\Gamma^+} \bar u\boldsymbol\varphi_{\boldsymbol\nu} \qquad \forall\bar u \in H^{1,0}(\Omega_\gamma). \qquad (21)$$

Далее потребуется еще одна формула Грина (см. [3]), справедливая для $\bar u \in H^2(\omega)$:

$$-\int\limits_{\omega} m_{ij}\bar u_{,ij} = -\int\limits_{\omega} \bar u m_{ij,ij} + \int\limits_{\Gamma^-} \Big(t^-_{\boldsymbol\nu}\bar u - m^-_{\boldsymbol\nu}\frac{\partial\bar u}{\partial\boldsymbol\nu}\Big). \qquad (22)$$

Здесь моменты m_{ij}, $i, j = 1, 2$ задаются формулами (4); $m^-_{\boldsymbol\nu} = m_{ij}\nu_i\nu_j$; $t^-_{\boldsymbol\nu} = m_{ij,k}\tau_k\tau_j\nu_i + m_{ij,j}\nu_i$. Для пробной функции $\bar{\boldsymbol\xi} = 2\boldsymbol\xi \in K$ неравенство (9) принимает вид

$$B_{\Omega\setminus\overline{\omega}}(\boldsymbol\xi, \boldsymbol\xi) + b_\omega(\boldsymbol\chi, \boldsymbol\chi) \geqslant \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i u^i + f_3 u) + \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu_i\varphi^i. \qquad (23)$$

Подставляя $\bar{\boldsymbol\xi} = (\mathbf 0, 0, \mathbf 0)$ в (9), получаем, что неравенство (23) выполняется с противоположным знаком. Таким образом, из (9) следует

$$B_{\Omega\setminus\overline{\omega}}(\boldsymbol\xi, \boldsymbol\xi) + b_\omega(\boldsymbol\chi, \boldsymbol\chi) = \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i u^i + f_3 u) + \int\limits_{\omega} \mu_i\varphi^i; \qquad (24)$$

$$B_{\Omega\setminus\overline{\omega}}(\boldsymbol\xi, \bar{\boldsymbol\xi}) + b_\omega(\boldsymbol\chi, \bar{\boldsymbol\chi}) \geqslant \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i\bar u^i + f_3\bar u) + \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \mu_i\bar\varphi^i \quad \forall\bar{\boldsymbol\xi} \in K. \qquad (25)$$

Применяя формулы Грина (17)–(22) для интегралов в левой части (25), входящих в билинейные формы, с учетом уравнений равновесия (10)–(14) находим

$$\int\limits_{\Gamma^-} \Big(t^-_{\boldsymbol\nu}\bar u - m^-_{\boldsymbol\nu}\frac{\partial\bar u}{\partial\boldsymbol\nu}\Big) + \int\limits_{\Gamma^-} (\sigma_{\boldsymbol\nu}\bar{\boldsymbol U}_{\boldsymbol\nu} + \sigma_{\boldsymbol\tau}\bar{\boldsymbol U}_{\boldsymbol\tau}) - \Lambda\int\limits_{\Gamma^+} \Big(\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol\nu} + \boldsymbol\varphi_{\boldsymbol\nu}\Big)\bar u -$$

$$- \int\limits_{\Gamma^+} (\sigma_{\boldsymbol\nu}\bar{\boldsymbol U}_{\boldsymbol\nu} + \sigma_{\boldsymbol\tau}\bar{\boldsymbol U}_{\boldsymbol\tau}) - \int\limits_{\Gamma^+} (m_{\boldsymbol\nu}\bar{\boldsymbol\varphi}_{\boldsymbol\nu} + m_{\boldsymbol\tau}\bar{\boldsymbol\varphi}_{\boldsymbol\tau}) \geqslant 0. \qquad (26)$$

Подставляя в (26) $\bar{\boldsymbol\xi} = (\bar{\boldsymbol U}, 0, \mathbf 0)$, $\bar{\boldsymbol U} \in H^1_0(\Omega)^2$ (заметим, что $\bar{\boldsymbol\xi} \in K$), имеем

$$\int\limits_{\Gamma} ([\sigma_{\boldsymbol\nu}]\bar{\boldsymbol U}_{\boldsymbol\nu} + [\sigma_{\boldsymbol\tau}]\bar{\boldsymbol U}_{\boldsymbol\tau}) \leqslant 0. \qquad (27)$$

Вследствие произвольности $\bar{\boldsymbol{U}} \in H_0^1(\Omega)^2$ из (27) получаем уравнения

$$[\sigma_{\boldsymbol{\nu}}] = 0, \quad [\sigma_{\boldsymbol{\tau}}] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{28}$$

Пусть $\bar{u} \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\Omega)$ — произвольная функция. Определим функцию $\bar{\boldsymbol{\varphi}} \in H_0^1(\Omega)$, такую что $\bar{\varphi}^i = -\bar{u}_{,i}$ в ω, $i = 1, 2$. Тогда $[\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}}] = 0$ на γ, $\bar{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbf{0}, \bar{u}, \bar{\boldsymbol{\varphi}}) \in K$. При этом согласно (3) $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}}^+ = \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}}^- = -\partial \bar{u}^-/\partial \boldsymbol{\nu}$, $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\tau}}^+ = \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\tau}}^- = -\partial \bar{u}^-/\partial \boldsymbol{\tau}$. Подставляя $\bar{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbf{0}, \bar{u}, \bar{\boldsymbol{\varphi}})$ в (26), получаем

$$\int\limits_\Gamma \Big(t_{\boldsymbol{\nu}}^- \bar{u} - m_{\boldsymbol{\nu}}^- \frac{\partial \bar{u}^-}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big) - \Lambda \int\limits_\Gamma \Big(\frac{\partial u^+}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}^+\Big)\bar{u} + \int\limits_\Gamma \Big(m_{\boldsymbol{\nu}}^+ \frac{\partial \bar{u}^-}{\partial \boldsymbol{\nu}} + m_{\boldsymbol{\tau}}^+ \frac{\partial \bar{u}^-}{\partial \boldsymbol{\tau}}\Big) \geqslant 0. \tag{29}$$

Поскольку функция $m_{\boldsymbol{\tau}}^+$ предполагается гладкой, имеем $\bar{u} m_{\boldsymbol{\tau}}^+ \in H^2(\omega)$. С помощью известной формулы Грина можно получить соотношение

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial\,(m_{\boldsymbol{\tau}}^+ \bar{u})}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \int\limits_\omega \frac{\partial^2\,(m_{\boldsymbol{\tau}}^+ \bar{u})}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{\partial^2\,(m_{\boldsymbol{\tau}}^+ \bar{u})}{\partial x_2\,\partial x_1} = 0,$$

из которого следует

$$\int\limits_\Gamma m_{\boldsymbol{\tau}}^+ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = -\int\limits_\Gamma \frac{\partial m_{\boldsymbol{\tau}}^+}{\partial \boldsymbol{\tau}}\,\bar{u}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (29), получаем

$$\int\limits_\Gamma (t_{\boldsymbol{\nu}}^- - t_{\boldsymbol{\nu}}^+)\bar{u} + \int\limits_\Gamma (m_{\boldsymbol{\nu}}^+ - m_{\boldsymbol{\nu}}^-)\,\frac{\partial \bar{u}^-}{\partial \boldsymbol{\nu}} \leqslant 0,$$

где

$$t_{\boldsymbol{\nu}}^+ = \Lambda\Big(\frac{\partial u^+}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}^+\Big) + \frac{\partial m_{\boldsymbol{\tau}}^+}{\partial \boldsymbol{\tau}}.$$

Отсюда в силу произвольности и независимости значений $\bar{u}$ и $\partial \bar{u}^-/\partial \boldsymbol{\nu}$ имеем

$$t_{\boldsymbol{\nu}}^- = t_{\boldsymbol{\nu}}^+, \quad m_{\boldsymbol{\nu}}^+ = m_{\boldsymbol{\nu}}^- \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{31}$$

Преобразуем (26) с учетом соотношений (28), (30), (31):

$$\int\limits_\Gamma \Big(t_{\boldsymbol{\nu}}[\bar{u}] + m_{\boldsymbol{\nu}}\Big(\frac{\partial \bar{u}^-}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}}^+\Big)\Big) + \int\limits_\Gamma (\sigma_{\boldsymbol{\nu}}[\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\nu}}] + \sigma_{\boldsymbol{\tau}}[\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\tau}}]) + \\ + \int\limits_\Gamma m_{\boldsymbol{\tau}}^+\Big(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\tau}}^+ + \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial \boldsymbol{\tau}}\Big) \leqslant 0 \quad \forall \bar{\boldsymbol{\xi}} \in K. \tag{32}$$

Для функции $\bar{\boldsymbol{U}} \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$, такой что $\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\nu}} = 0$ на берегах Γ^+ и Γ^- (т. е. на Γ), справедливо включение $\boldsymbol{\xi} = (\bar{\boldsymbol{U}}, 0, \mathbf{0}) \in K$. Подставляя $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ в (32), находим

$$\int\limits_\Gamma \sigma_{\boldsymbol{\tau}}[\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\tau}}] = \int\limits_\gamma \sigma_{\boldsymbol{\tau}}[\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\tau}}] \leqslant 0$$

для всех $\bar{\boldsymbol{U}} \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$, удовлетворяющих $\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\nu}} = 0$ на Γ. В силу произвольности значений $\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\tau}}$ на границе Γ из последнего неравенства следует

$$\sigma_{\boldsymbol{\tau}} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{33}$$

Рассмотрим функцию $\bar{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbf{0}, 0, \bar{\boldsymbol{\varphi}})$, такую что $\bar{\boldsymbol{\varphi}} \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$, $\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{0}$ на ω, $\bar{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}} = 0$ на Γ^+. По построению $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in K$. Подставляя функцию $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ в (32), получаем

$$\int\limits_{\gamma} m_{\boldsymbol{\tau}}^+ \bar{\varphi}_{\boldsymbol{\tau}}^+ \leqslant 0. \tag{34}$$

Поскольку на участке γ значения $\bar{\varphi}_{\boldsymbol{\tau}}$ произвольные, из (34) следует

$$m_{\boldsymbol{\tau}}^+ = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{35}$$

Пусть $\bar{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbf{0}, \bar{u}, \mathbf{0})$, где $\bar{u} \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)$ — функция, такая что $\bar{u} = 0$ в ω. Очевидно, что $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in K$. В силу равенств $\partial\bar{u}/\partial\boldsymbol{\nu} = 0$, $\bar{u} = 0$ на Γ^- неравенство (32) для построенной функции $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ принимает вид

$$\int\limits_{\Gamma} t_{\boldsymbol{\nu}}[\bar{u}] = \int\limits_{\gamma} t_{\boldsymbol{\nu}} \bar{u}^+ \leqslant 0.$$

Так как перемещение $\bar{u}\big|_{\gamma^+}$ произвольное, то

$$t_{\boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{36}$$

С помощью полученных равенств (33), (35), (36) можно упростить соотношение (32):

$$\int\limits_{\Gamma} \Big(m_{\boldsymbol{\nu}} \Big(\frac{\partial \bar{u}^-}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \bar{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}^+ \Big) + \sigma_{\boldsymbol{\nu}} [\bar{U}_{\boldsymbol{\nu}}] \Big) \leqslant 0 \qquad \forall \bar{\boldsymbol{\xi}} \in K. \tag{37}$$

Пусть $\bar{\boldsymbol{U}} \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2$, $\bar{\boldsymbol{U}} = \mathbf{0}$ в ω, $\bar{U}_{\boldsymbol{\nu}}^+ \geqslant 0$ на γ. Тогда имеют место включения $\bar{\boldsymbol{\xi}}_1 = (\bar{\boldsymbol{U}}, 0, \bar{\boldsymbol{U}}) \in K$, $\bar{\boldsymbol{\xi}}_2 = (\bar{\boldsymbol{U}}, 0, -\bar{\boldsymbol{U}}) \in K$ (т. е. $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_1 = \bar{\boldsymbol{U}}$ для $\bar{\boldsymbol{\xi}}_1$ и $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_2 = -\bar{\boldsymbol{U}}$ для $\bar{\boldsymbol{\xi}}_2$). В результате сравнения двух неравенств для $\bar{\boldsymbol{\xi}}_1$, $\bar{\boldsymbol{\xi}}_2$, полученных из (37), находим

$$\int\limits_{\gamma} (\sigma_{\boldsymbol{\nu}} \bar{U}_{\boldsymbol{\nu}}^+ + |m_{\boldsymbol{\nu}}| \bar{U}_{\boldsymbol{\nu}}^+) \leqslant 0.$$

Поскольку в последнем неравенстве функция $\bar{\boldsymbol{U}}$ может быть выбрана произвольно (с точностью до указанных свойств), имеем

$$|m_{\boldsymbol{\nu}}| \leqslant -\sigma_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{38}$$

С учетом (28), (31), (33), (35), (36) преобразуем (24) с помощью формул Грина к виду

$$\int\limits_{\gamma} \Big(m_{\boldsymbol{\nu}} \Big(\frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \varphi_{\boldsymbol{\nu}}^+ \Big) + \sigma_{\boldsymbol{\nu}} [U_{\boldsymbol{\nu}}] \Big) = 0. \tag{39}$$

С учетом (6), (38) из (39) находим

$$m_{\boldsymbol{\nu}} \Big(\frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \varphi_{\boldsymbol{\nu}}^+ \Big) + \sigma_{\boldsymbol{\nu}} [U_{\boldsymbol{\nu}}] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Таким образом, справедлива

Теорема. *Гладкое решение задачи* (7) *является решением краевой задачи, состоящей из соотношений теории упругости* (1), (2), *уравнений равновесия* (10)–(14), *соотношений* (3) *и краевых условий*:

$$[t_{\boldsymbol{\nu}}] = [m_{\boldsymbol{\nu}}] = [\sigma_{\boldsymbol{\tau}}] = [\sigma_{\boldsymbol{\nu}}] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma; \tag{40}$$

$$t_{\boldsymbol{\nu}} = \sigma_{\boldsymbol{\tau}} = m_{\boldsymbol{\tau}}^+ = 0, \quad |m_{\boldsymbol{\nu}}| \leqslant -\sigma_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{на} \quad \gamma; \tag{41}$$

$$[U_{\boldsymbol{\nu}}] \geqslant |[\varphi_{\boldsymbol{\nu}}]|, \quad m_{\boldsymbol{\nu}} \Big(\frac{\partial u^-}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \varphi_{\boldsymbol{\nu}}^+ \Big) + \sigma_{\boldsymbol{\nu}} [U_{\boldsymbol{\nu}}] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{42}$$

Можно показать обратное: решение $\boldsymbol{\xi}$ задачи (1)–(3), (10)–(14), (40)–(42) в дифференциальной постановке является также решением задачи минимизации (7).

Пусть $\bar{\boldsymbol{\xi}} = (\bar{\boldsymbol{U}}, \bar{u}, \bar{\boldsymbol{\varphi}}) \in K$. Покажем, что выполняется вариационное неравенство (8). Умножим равенство (10) на $\bar{\boldsymbol{U}} - \boldsymbol{U}$, а затем проинтегрируем по области $\Omega \backslash \overline{\omega}$. В результате, используя формулу Грина (18), получаем

$$\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\bar{\boldsymbol{U}} - \boldsymbol{U}) + \int\limits_{\Gamma^+} (\sigma_{\boldsymbol{\nu}}(\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}) + \sigma_{\boldsymbol{\tau}}(\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\tau}})) - \int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} f_i(\bar{u}^i - u^i) = 0. \tag{43}$$

Аналогично для уравнения (13) имеем

$$\int\limits_{\omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\bar{\boldsymbol{U}} - \boldsymbol{U}) - \int\limits_{\Gamma^-} (\sigma_{\boldsymbol{\nu}}(\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}) + \sigma_{\boldsymbol{\tau}}(\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\tau}})) - \int\limits_{\omega} f_i(\bar{u}^i - u^i) = 0. \tag{44}$$

Умножая уравнения (11), (14) на $\bar{u} - u$, уравнение (12) на $\bar{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi}$ и интегрируя по соответствующим областям, получаем

$$\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} q_i(\bar{u} - u)_{,i} + \Lambda \int\limits_{\Gamma^+} \Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}\Big)(\bar{u} - u) - \int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} f_3(\bar{u} - u) = 0,$$

$$-\int\limits_{\omega} m_{ij}(\bar{u} - u)_{,ij} - \int\limits_{\Gamma^-} \Big(t^-_{\boldsymbol{\nu}}(\bar{u} - u) - m^-_{\boldsymbol{\nu}} \frac{\partial\,(\bar{u} - u)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big) - \int\limits_{\omega} f_3(\bar{u} - u) = 0, \tag{45}$$

$$\int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} (m_{ij}\varepsilon_{ij}(\bar{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi}) + q_i(\bar{\varphi}^i - \varphi^i)) +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma^+} (m_{\boldsymbol{\nu}}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}) + m_{\boldsymbol{\tau}}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\tau}})) - \int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \mu_i(\bar{\varphi}^i - \varphi^i) = 0.$$

Суммируя (43)–(45), с учетом (3), (40) находим

$$B_{\Omega_\gamma}(\boldsymbol{\xi}, \bar{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} (f_i(\bar{u}^i - u^i) + f_3(\bar{u} - u)) - \int\limits_{\Omega\backslash\overline{\omega}} \mu_i(\bar{\varphi}^i - \varphi^i) =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma} \Big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}}[\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}] + \sigma_{\boldsymbol{\tau}}[\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\tau}}] + \Lambda\Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \varphi_{\boldsymbol{\nu}}\Big)^+ (\bar{u} - u)^+ +$$

$$+ m^+_{\boldsymbol{\nu}}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}})^+ + m^+_{\boldsymbol{\tau}}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\tau}})^+ - t^-_{\boldsymbol{\nu}}(\bar{u} - u)^- + m^-_{\boldsymbol{\nu}} \frac{\partial\,(\bar{u} - u)^-}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big). \tag{46}$$

Покажем, что выражение в правой части (46) является неотрицательной величиной. Заметим, что для произвольной функции $v \in H^{1,0}(\Omega_\gamma)$ на $\Gamma \setminus \overline{\gamma}$ выполняется равенство $[v] = 0$. С учетом (40), (41) правая часть соотношения (46) преобразуется следующим образом:

$$-\int\limits_{\Gamma} \Big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}}[\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}] + \Lambda\Big(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}}\Big)^+ (\bar{u} - u)^+ +$$

$$+ m_{\boldsymbol{\nu}}\Big((\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}})^+ + \frac{\partial\,(\bar{u} - u)^-}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big) + m^+_{\boldsymbol{\tau}}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\tau}})^+ - t^-_{\boldsymbol{\nu}}(\bar{u} - u)^-\Big). \tag{47}$$

С учетом равенств

$$t_{\boldsymbol{\nu}}^{+} = \Lambda\Big(\frac{\partial u^{+}}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \varphi_{\boldsymbol{\nu}}^{+}\Big) + \frac{\partial m_{\boldsymbol{\tau}}^{+}}{\partial \boldsymbol{\tau}}$$

и (30), (40) из (47) получаем

$$-\int\limits_{\Gamma} \Big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}}[\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}] + m_{\boldsymbol{\nu}}\Big((\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}})^{+} + \frac{\partial\,(\bar{u} - u)^{-}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big) + {}$$

$$+ t_{\boldsymbol{\nu}}[\bar{u} - u] + m_{\boldsymbol{\tau}}^{+}\Big((\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\tau}})^{+} + \frac{\partial\,(\bar{u} - u)^{+}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\Big)\Big). \qquad (48)$$

В силу (3), (41) последние два слагаемых в (48) равны нулю. Из условия $(\bar{\boldsymbol{U}} - \boldsymbol{U}) \in H^{1,0}(\Omega)^2$ следует $[\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}] = 0$ на $\Gamma \setminus \overline{\gamma}$. На участке границы $\Gamma \setminus \overline{\gamma}$ справедливы также равенства $(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}})^{+} = (\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}})^{-} = -\partial\,(\bar{u} - u)^{-}/\partial \boldsymbol{\nu}$, следовательно, $(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}})^{+} + \partial\,(\bar{u} - u)^{-}/\partial \boldsymbol{\nu} = 0$ на $\Gamma \setminus \overline{\gamma}$. Таким образом, выражение (48) можно привести к виду

$$-\int\limits_{\gamma} \Big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}}[\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\nu}}] + m_{\boldsymbol{\nu}}\Big((\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{\nu}})^{+} + \frac{\partial\,(\bar{u} - u)^{-}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big)\Big). \qquad (49)$$

Из (49) с учетом соотношений (42) следует

$$-\int\limits_{\gamma} \Big(\sigma_{\boldsymbol{\nu}}[\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\nu}}] + m_{\boldsymbol{\nu}}\Big(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}}^{+} + \frac{\partial \bar{u}^{-}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big)\Big). \qquad (50)$$

Неотрицательность выражения (50) можно установить, используя неравенство $|m_{\boldsymbol{\nu}}| \leqslant -\sigma_{\boldsymbol{\nu}}$ из (41), а также неравенство $[\bar{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\nu}}] \geqslant |[\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}}]|$ на γ, следующее из условия $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in K$. Заметим, что на кривой γ выполняются равенства $[\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}}] = (\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}}^{+} - \bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}}^{-}) = (\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{\nu}}^{+} + \partial \bar{u}^{-}/\partial \boldsymbol{\nu})$. Тогда при произвольном значении $\bar{\boldsymbol{\xi}} \in K$ выражение в правой части (46) имеет неотрицательное значение, следовательно, справедливо вариационное неравенство (8). Это означает, что в силу свойств функционала Π и множества K функция $\boldsymbol{\xi}$ является решением вариационного неравенства (8) и задачи минимизации (7).

Таким образом, в работе доказана однозначная разрешимость вариационной задачи о равновесии пластины, содержащей трещину. С использованием вариационной постановки задачи получена система краевых условий на замкнутой кривой, описывающей границу упругого включения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Партон В. З.** Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. М.: Наука, 1974.
2. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
3. **Хлуднев А. М.** Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
4. **Khludnev A. M.** Analysis of cracks in solids / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
5. **Ротанова Т. А.** Контакт пластин, жесткие включения в которых выходят на границу // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2011. № 3. С. 99–107.
6. **Хлуднев А. М.** Об изгибе упругой пластины с отслоившимся тонким жестким включением // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 114–126.

7. **Рудой Е. М.** Асимптотика функционала энергии для смешанной краевой задачи четвертого порядка в области с разрезом // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 430–445.
8. **Лазарев Н. П.** Итерационный метод штрафа для нелинейной задачи о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину // Сиб. журн. вычисл. математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 381–392.
9. **Черепанов Г. П.** Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983.
10. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982.
11. **Работнов Ю. И.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
12. **Пелех Б. Л.** Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. думка, 1973.
13. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
14. **Темам Р.** Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991.
15. **Хлуднев А. М.** Метод гладких областей в задаче о равновесии пластины с трещиной // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1388–1400.

Поступила в редакцию 13/IV 2012 г.,
в окончательном варианте — 26/VI 2012 г.