УДК 517.9:539.3

УСЛОЖНЕННЫЕ СТРУКТУРЫ ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

С. К. Годунов, В. М. Гордиенко

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск

Продолжается исследование галилеево-инвариантных уравнений математической физики, начатое ранее с использованием коэффициентов Клебша — Гордана из теории произведений представленной группы $SO(3)$. Конструируются сложные системы законов сохранения и термодинамические тождества. Приводятся конкретные примеры.

Введение. Данная работа является продолжением начатого в [1] детального исследования термодинамических структур галилеево-инвариантных уравнений математической физики, содержащих законы сохранения массы, импульса и энергии, а также компенсационные энтропийные уравнения. Для того чтобы такие уравнения отражали содержание классических термодинамических соотношений, при их формулировке должна быть использована производящая функция L, зависящая от искомых функций, вектор-функций и температуры. Эта производящая функция выполняет роль термодинамического потенциала среды, описываемой уравнениями. Законы сохранения, порождаемые такими термодинамическими потенциалами, обсуждаются в литературе начиная с 60-х гг. (см. работу [1] и библиографию к ней). Детально описанная в [1] простейшая структура уравнений, к сожалению, не охватывает всех известных и уже достаточно подробно изученных примеров из классической математической физики. Такие примеры описаны в [2] и в заключительной главе монографии [3]. В частности, в простейшую структуру не укладываются уравнения нелинейной упругости, магнитной гидродинамики. Усложненные конструкции законов сохранения, предлагаемые в настоящей работе, уже включают перечисленные примеры. Диссипативные процессы диффузии, теплопроводности и вязкого трения здесь не рассматриваются, за исключением одного примера.

Мы предполагаем от читателя знакомство с работой [1] и используем аналогичные обозначения. Так же как и в [1], мы опираемся на теорию ортогональных представлений группы вращений $SO(3)$, ограничиваясь нечетномерными однозначными представлениями целых весов N.

Усложненные системы уравнений конструируются в п. **2** из исходных простейших, описанных в [1] систем путем добавления в уравнения специальных дополнительных слагаемых. Эти слагаемые подбираются так, чтобы они не нарушали законов сохранения. Подбор возможных слагаемых основан на заранее подготовленной в п. **1** коллекции тождеств обобщенного векторного анализа.

В п. **3** из всех описанных усложненных систем отобраны те, для которых удается доказать, что они допускают запись в виде симметрических гиперболических уравнений. Приводятся варианты замены изучаемых уравнений переопределенными совместными системами законов сохранения. При этом используется и развивается схема, частично опи-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00766).

санная в [3, 4]. В п. **4** содержатся конкретные примеры уравнений, входящих в описываемый класс усложненных термодинамически согласованных структур.

1. Обобщенное векторное исчисление. Так же как в [1], предполагаем, что каждая из неизвестных вектор-функций $\boldsymbol{q}^{(A)}$ при вращениях системы координат преобразуется по неприводимому представлению веса A группы $SO(3)$. Координатный вектор $\boldsymbol{x}$ трехмерного евклидова пространства зададим его декартовыми компонентами x_{-1}, x_0, x_1. Вектор-функция $\boldsymbol{q}^{(N)}$ имеет $2N+1$ вещественные составляющие $q_n^{(N)}$ ($n = -N, -N+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N-1, N$). Вращение координатной системы задается ортогональной матрицей $\mathcal{P}$ с положительным определителем ($\mathcal{P}^{\mathrm{т}}\mathcal{P} = I_3$, $\det\mathcal{P} = +1$), при этом $\boldsymbol{x}$ заменяется на $\hat{\boldsymbol{x}} = \mathcal{P}\boldsymbol{x}$. При таком вращении вектор-функция $\boldsymbol{q}^{(N)}$ преобразуется в $\hat{\boldsymbol{q}}^{(N)} = \Omega^{(N)}(\mathcal{P})\boldsymbol{q}^{(N)}$ с помощью стандартной $(2N+1)\times(2N+1)$-матрицы $\Omega^{(N)}(\mathcal{P})$, осуществляющей представление. По определению представлений $\Omega^{(N)}(I_3) = I_{2N+1}$, $\Omega^{(N)}(\mathcal{P}_1\cdot\mathcal{P}_2) = \Omega^{(N)}(\mathcal{P}_1)\cdot\Omega^{(N)}(\mathcal{P}_2)$.

Вращение $\mathcal{P}$ обычно задается с помощью углов Эйлера φ, θ, ψ:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Явные формулы для элементов матрицы $\Omega^{(N)}(\mathcal{P})$, по которым эти элементы выражаются через углы Эйлера φ, θ, ψ, приведены в конце нашей предыдущей статьи [1] и обоснованы в [5]. При этом отмечалось, что $\Omega^{(1)}(\mathcal{P}) \equiv \mathcal{P}$.

Сформулируем основные положения теории кронекеровых произведений неприводимых представлений группы вращений. Пусть $\boldsymbol{p}^{(L)}$, $\boldsymbol{r}^{(M)}$ — векторы размерностей $2L+1$ и $2M+1$, преобразующиеся при вращениях по неприводимым представлениям весов L, M. Кронекеровым произведением этих векторов называется прямоугольная $(2L+1)\times(2M+1)$-матрица Π с элементами $\Pi_{lm} = p_l^{(L)}\cdot r_m^{(M)}$. Эту матрицу можно рассматривать как вектор размерности $(2L+1)\times(2M+1)$.

При вращениях $\hat{\boldsymbol{x}} = \mathcal{P}\boldsymbol{x}$ вектор Π преобразуется в $\hat{\Pi}$ преобразованиями, осуществляющими также некоторое представление группы вращений. Такое представление называется *кронекеровым произведением представлений* весов L, M. Если считать, что скалярное произведение в пространстве $(2L+1)\times(2M+1)$-матриц задается формулой $(\Phi, \Pi) = \sum\limits_{l,m}\Phi_{lm}\Pi_{lm} = \mathrm{tr}(\Phi\Pi^{\mathrm{т}})$, то кронекерово произведение ортогональных представлений также будет ортогональным, но если среди весов L, M нет равных нулю, оно оказывается приводимым. Его можно разложить в прямую сумму неприводимых ортогональных представлений весов $|L-M|$, $|L-M|+1$, $|L-M|+2$, $\ldots$, $L+M-1$, $L+M$. Разложение осуществляется с помощью так называемых коэффициентов Клебша — Гордана. Эти коэффициенты естественно разместить в качестве матричных элементов специальных матриц. Будем называть эти матрицы матрицами Клебша — Гордана. Каждая такая $(2L+1)\times(2M+1)$-матрица $G^k_{K[L,M]}$ составляется из элементов $G^{k[l,m]}_{K[L,M]}$, в записи которых верхние индексы l, m ($-L \leqslant l \leqslant L$, $-M \leqslant m \leqslant M$) указывают номера строки и столбца, на пересечении которых этот элемент расположен. Индексы K, k нумеруют матрицы. Нижний индекс K ($|L-M| \leqslant K \leqslant L+M$) означает вес неприводимого представления, верхний k — номер матрицы, являющейся каноническим базисным элементом в $(2K+1)$-мерном подпространстве матриц, преобразующихся по представлению веса K ($-K \leqslant k \leqslant K$).

В выборе канонических базисов имеется некоторый произвол. Базис, используемый нами, обеспечивает равенство

$$G^k_{K[L,M]} = (-1)^{K+L+M}\{G^k_{K[M,L]}\}^{\text{т}}, \tag{1.1}$$

т. е. перестановка нижних индексов в квадратных скобках приводит к транспонированию матрицы Клебша — Гордана и при нечетной сумме $K+L+M$ — к смене знаков всех элементов. Следует отметить, что условия ортонормированности

$$\operatorname{tr}\{G^k_{K[L,M]} \cdot [G^n_{N[L,M]}]^{\text{т}}\} = \delta_{KN} \cdot \delta_{kn} \tag{1.2}$$

допускают и следующую запись:

$$\sum_{l=-L,\, m=-M}^{l=L,\, m=M} G^{k[l,m]}_{K[L,M]} \cdot G^{n[l,m]}_{N[L,M]} = \delta_{KN}\delta_{kn}.$$

Приведем еще несколько полезных равенств:

$$\begin{gathered} G^{0[\lambda,l]}_{0[L,L]} = \delta_{\lambda l}/\sqrt{2L+1}, \\ G^{k[l,m]}_{K[L,M]} = \sqrt{(2K+1)/(2M+1)}\, G^{m[k,l]}_{M[K,L]} = (-1)^{K+L+M}\sqrt{(2K+1)/(2L+1)}\, G^{l[k,m]}_{L[K,M]}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Представляя кронекерово произведение векторов $\boldsymbol{p}^{(L)}$ и $\boldsymbol{r}^{(M)}$ в виде линейной комбинации базисных матриц Клебша — Гордана

$$[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{r}^{(M)}] = \sum_{K=|L-M|}^{K=L+M} \left(\sum_{k=-K}^{k=K} w^{(K)}_k G^k_{K[L,M]} \right),$$

естественно коэффициенты $w^{(K)}_k$ этой линейной комбинации сгруппировать в векторы $\boldsymbol{w}^{(K)}$ размерностей $2K+1$. В силу (1.2) компоненты этих векторов вычисляются по правилу

$$w^{(K)}_k = \operatorname{tr}\{[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{r}^{(M)}] \cdot [G^k_{K[L,M]}]^{\text{т}}\}. \tag{1.4}$$

При повороте $\hat{\boldsymbol{x}} = \mathcal{P}\boldsymbol{x}$ координатной системы векторы $\boldsymbol{p}^{(L)}$, $\boldsymbol{r}^{(M)}$ преобразуются с помощью преобразований $\hat{\boldsymbol{p}}^{(L)} = \Omega^{(L)}(\mathcal{P})\boldsymbol{p}^{(L)}$, $\hat{\boldsymbol{r}}^{(M)} = \Omega^{(M)}(\mathcal{P})\boldsymbol{r}^{(M)}$, а это индуцирует преобразования векторов $\hat{\boldsymbol{w}}^{(K)} = \Omega^{(K)}(\mathcal{P})\boldsymbol{w}^{(K)}$. Эти преобразования реализуют неприводимые представления соответствующих весов. Естественно ввести обозначение

$$\boldsymbol{w}^{(K)} = [\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{r}^{(M)}]^{(K)} \tag{1.5}$$

и назвать $[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{r}^{(M)}]^{(K)}$ *векторным произведением веса* K векторов $\boldsymbol{p}^{(L)}$, $\boldsymbol{r}^{(M)}$. Напомним, что $|L-M| \leqslant K \leqslant L+M$ или, что то же самое, $K \leqslant L+M$, $L \leqslant M+K$, $M \leqslant K+L$ (неравенства треугольника). Векторное произведение веса 0 только множителем отличается от скалярного произведения векторных сомножителей, которые должны иметь одинаковую размерность (одинаковый вес):

$$[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{r}^{(L)}]^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2L+1}}\,(\boldsymbol{p}^{(L)}, \boldsymbol{r}^{(L)}) = \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \sum_{l=-L}^{l=L} p^{(L)}_l r^{(L)}_l. \tag{1.6}$$

Справедливо правило перестановки сомножителей

$$[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{r}^{(M)}]^{(K)} = (-1)^{K+L+M}[\boldsymbol{r}^{(M)} \times \boldsymbol{p}^{(L)}]^{(K)},$$

вытекающее из (1.1).

Естественным образом вводится являющееся инвариантным относительно вращений обобщенное смешанное произведение трех векторов размерностей $2K+1$, $2L+1$, $2M+1$:

$$(\boldsymbol{u}^{(K)}, \boldsymbol{v}^{(L)}, \boldsymbol{w}^{(M)}) = [\boldsymbol{u}^{(K)} \times [\boldsymbol{v}^{(L)} \times \boldsymbol{w}^{(M)}]^{(K)}]^{(0)}. \tag{1.7}$$

Это произведение имеет смысл, если веса K, L, M удовлетворяют неравенствам треугольника. Обобщенное смешанное произведение тех же сомножителей определено при любом их порядке и при перестановке двух векторов умножается на $(-1)^{K+L+M}$:

$$(\boldsymbol{v}^{(L)}, \boldsymbol{u}^{(K)}, \boldsymbol{w}^{(M)}) = (\boldsymbol{u}^{(K)}, \boldsymbol{w}^{(M)}, \boldsymbol{v}^{(L)}) = (-1)^{K+L+M}(\boldsymbol{u}^{(K)}, \boldsymbol{v}^{(L)}, \boldsymbol{w}^{(M)}) = (\boldsymbol{w}^{(M)}, \boldsymbol{v}^{(L)}, \boldsymbol{u}^{(K)})$$

или, что то же самое,

$$[\boldsymbol{v}^{(L)} \times [\boldsymbol{u}^{(K)} \times \boldsymbol{w}^{(M)}]^{(L)}]^{(0)} = [\boldsymbol{u}^{(K)} \times [\boldsymbol{w}^{(M)} \times \boldsymbol{v}^{(L)}]^{(K)}]^{(0)} =$$
$$= (-1)^{K+L+M}[\boldsymbol{u}^{(K)} \times [\boldsymbol{v}^{(L)} \times \boldsymbol{w}^{(M)}]^{(K)}]^{(0)} = [\boldsymbol{w}^{(M)} \times [\boldsymbol{v}^{(L)} \times \boldsymbol{u}^{(K)}]^{(M)}]^{(0)}. \tag{1.8}$$

Справедливость этих равенств вытекает из (1.1), (1.3). Использованные нами свойства коэффициентов Клебша — Гордана следуют из анализа их производящей функции.

К сожалению, в известной нам литературе по теории представлений группы вращений удалось найти теорию коэффициентов Клебша — Гордана лишь для унитарных представлений. Случай представлений ортогональных пришлось изучать, внося соответствующие изменения в унитарную теорию. В результате была получена производящая функция для используемых нами коэффициентов и обоснованы все нужные нам их свойства. Предполагается опубликовать это исследование в отдельной статье.

В нужных нам обобщенных формулах векторного анализа используются матрицы $G^k_{K[L,M]}$, у которых K, L, M являются той или иной перестановкой либо тройки чисел $1, N, N-1$, либо тройки $1, N, N$. Приведем все ненулевые элементы матриц $G^i_{1[N,N-1]}$ и формулы, связывающие эти матрицы с матрицами $G^j_{1[N,N]}$.

При перестановке целочисленных параметров K, L, M матрицы преобразуются по правилам (1.1), (1.3).

Ниже приведены ненулевые элементы $G^{i[n,m]}_{1[N,N-1]}$:

$$G^{1[\pm(k-1),\pm k]}_{1[N,N-1]} = G^{-1[\pm k,\mp(k-1)]}_{1[N,N-1]} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(N-1)(N-k+1)}{N(2N-1)(2N+1)}} \qquad (2 \leqslant k \leqslant N-1),$$

$$\pm G^{1[\pm k,\mp(k-1)]}_{1[N,N-1]} = G^{-1[\pm(k-1),\mp k]}_{1[N,N-1]} = \pm\sqrt{\frac{3(N+k)(N+k-1)}{N(2N-1)(2N+1)}} \qquad (2 \leqslant k \leqslant N-1),$$

$$G^{1[\pm N,\pm(N-1)]}_{1[N,N-1]} = \sqrt{\frac{3}{2(2N+1)}}, \qquad G^{-1[-1,0]}_{1[N,N-1]} = G^{1[1,0]}_{1[N,N-1]} = \sqrt{\frac{3(N+1)}{2(2N-1)(2N+1)}},$$

$$G^{-1[0,-1]}_{1[N,N-1]} = G^{1[0,1]}_{1[N,N-1]} = -\sqrt{\frac{3(N-1)}{2(2N-1)(2N+1)}}.$$

Матрицы $G^i_{1[N,N]}$ вычисляются по формуле

$$G^i_{1[N,N]} = \sqrt{N(2N+1)/(3(N+1))}\ [G^k_{1[N,N-1]}G^j_{1[N-1,N]} - G^j_{1[N,N-1]}G^k_{1[N-1,N]}],$$

где индексы i, j, k пробегают одну из следующих троек: $(-1, 0, 1)$, $(0, 1, -1)$, $(1, -1, 0)$.

Далее будем считать, что рассматриваемые векторы зависят от пространственных координат x_{-1}, x_0, x_1 некоторого параметрического трехмерного пространства, т. е. рассматриваются векторные поля $\boldsymbol{f}^{(N)}(x_{-1}, x_0, x_1)$. Введем векторный оператор — оператор градиента

$$\nabla \equiv \nabla^{(1)} = \Big(\frac{\partial}{\partial x_{-1}}, \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\mathrm{т}}$$

и поле производных от вектора $\boldsymbol{f}^{(N)}$ разложим на три поля, преобразующиеся при вращениях координатного пространства по неприводимым представлениям весов $N-1$, N, $N+1$. Такое разложение осуществляется с помощью операторных равенств

$$\boldsymbol{p}^{(N-1)} = [\nabla \times \boldsymbol{f}^{(N)}]^{(N-1)}, \qquad \boldsymbol{q}^{(N)} = [\nabla \times \boldsymbol{f}^{(N)}]^{(N)}, \qquad \boldsymbol{r}^{(N+1)} = [\nabla \times \boldsymbol{f}^{(N)}]^{(N+1)},$$

обобщающих известные правила классического векторного анализа действия операторов дивергенции, ротора и градиента.

Операторные равенства расшифровываются в покоординатной записи с помощью коэффициентов Клебша — Гордана. Эта запись формально распространяет определения (1.4) на операторный случай.

Используя векторный оператор градиента ∇ и формулы (1.8) при $M = 1$, можно получить следующие формулы инвариантного дифференцирования:

$$[\nabla \times [\boldsymbol{u}^{(K)} \times \boldsymbol{v}^{(L)}]^{(1)}]^{(0)} = [\boldsymbol{v}^{(L)} \times [\nabla \times \boldsymbol{u}^{(K)}]^{(L)}]^{(0)} + (-1)^{K+L+1}[\boldsymbol{u}^{(K)} \times [\nabla \times \boldsymbol{v}^{(L)}]^{(K)}]^{(0)}. \quad (1.9)$$

Веса K и L должны удовлетворять неравенствам $|K-L| \leqslant 1$, $K+L \geqslant 1$. Фактически формула (1.9) содержит формулы трех типов при $L = K-1$, $L = K$, $L = K+1$.

Приведем еще одну формулу дифференцирования двойного произведения. Заменив в формуле (1.9) $\boldsymbol{u}^{(K)}$ на $[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{q}^{(M)}]^{(K)}$, а $\boldsymbol{v}^{(L)}$ на $\boldsymbol{v}^{(1)}$, получим

$$[\nabla \times [[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{q}^{(M)}]^{(K)} \times \boldsymbol{v}^{(1)}]^{(1)}]^{(0)} = [\boldsymbol{v}^{(1)} \times [\nabla \times [\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{q}^{(M)}]^{(K)}]^{(1)}]^{(0)} + \\ + (-1)^{K}[[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{q}^{(M)}]^{(K)} \times [\nabla \times \boldsymbol{v}^{(1)}]^{(K)}]^{(0)}.$$

Используя свойство (1.8), преобразуем второе слагаемое в правой части равенства:

$$[[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{q}^{(M)}]^{(K)} \times [\nabla \times \boldsymbol{v}^{(1)}]^{(K)}]^{(0)} = [\boldsymbol{p}^{(L)} \times [\boldsymbol{q}^{(M)} \times [\nabla \times \boldsymbol{v}^{(1)}]^{(K)}]^{(L)}]^{(0)}.$$

Окончательно получим

$$[\nabla \times [[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{q}^{(M)}]^{(K)} \times \boldsymbol{v}^{(1)}]^{(1)}]^{(0)} = [\boldsymbol{v}^{(1)} \times [\nabla \times [\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{q}^{(M)}]^{(K)}]^{(1)}]^{(0)} + \\ + (-1)^{K}[\boldsymbol{p}^{(L)} \times [\boldsymbol{q}^{(M)} \times [\nabla \times \boldsymbol{v}^{(1)}]^{(K)}]^{(L)}]^{(0)}. \quad (1.10)$$

В (1.10) вес K может принимать значения $K = 0, 1, 2$, и, кроме того, тройка чисел K, L, M должна удовлетворять неравенствам треугольника.

Для приложений, которые рассматриваются в п. **2**, удобно, основываясь на (1.6)–(1.8), тождества (1.9), (1.10) записать с использованием символа скалярного произведения:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[\boldsymbol{u}^{(K)} \times \boldsymbol{v}^{(L)}]^{(1)}_j \equiv \sqrt{3}[\nabla \times [\boldsymbol{u}^{(K)} \times \boldsymbol{v}^{(L)}]^{(1)}]^{(0)} = \\ = \sqrt{3/(2L+1)}\,(\boldsymbol{v}^{(L)}, [\nabla \times \boldsymbol{u}^{(K)}]^{(L)}) + (-1)^{K+L+1}\sqrt{3/(2K+1)}\,(\boldsymbol{u}^{(K)}, [\nabla \times \boldsymbol{v}^{(L)}]^{(K)}); \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,[[\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{q}^{(M)}]^{(K)} \times \boldsymbol{v}^{(1)}]^{(1)}_j = (\boldsymbol{v}^{(1)}, [\nabla \times [\boldsymbol{p}^{(L)} \times \boldsymbol{q}^{(M)}]^{(K)}]^{(1)}) + \\ + (-1)^{K}\sqrt{3/(2L+1)}\,(\boldsymbol{p}^{(L)}, [\boldsymbol{q}^{(M)} \times [\nabla \times \boldsymbol{v}^{(1)}]^{(K)}]^{(L)}). \quad (1.12)$$

Наряду с вектор-функциями $\boldsymbol{q}^{(N)}(x_{-1}, x_0, x_1)$, преобразующимися по неприводимым представлениям, иногда полезно рассматривать тензор-функции второго ранга $q^{(1,N)}$ с компонентами $q_{in}^{(1,N)}(x_{-1}, x_0, x_1)$ $(-1 \leqslant i \leqslant 1,\ -N \leqslant n \leqslant N)$. При этом, в отличие от установившейся практики, первый и второй индексы могут пробегать разные множества допустимых значений. Вращению $\hat{\boldsymbol{x}} = \mathcal{P}\boldsymbol{x}$ сопоставляется преобразование $\hat{q}_{in}^{(1,N)} = \sum\limits_{k,m} \Omega_{ik}^{(1)}(\mathcal{P})\Omega_{nm}^{(N)}(\mathcal{P})q_{km}^{(1,N)}$, т. е. рассматриваемые тензор-функции преобразуются по произведению представлений весов 1 и N. Такое представление приводимо, и его можно разложить в прямую сумму неприводимых представлений весов $N-1$, N, $N+1$, однако мы этого разложения делать не будем.

Приступая к выводу нужных нам тождеств, воспользуемся тремя элементарными равенствами, справедливость которых проверяется непосредственно:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,(u_i q_i p_k) = q_i p_k\,\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i\,\frac{\partial(q_i p_k)}{\partial x_k}; \qquad (1.13\text{а})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,(u_k q_i p_i) = u_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,(q_i p_i) + q_i p_i\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}; \qquad (1.13\text{б})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,(u_i q_k p_i) = q_k p_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i\,\frac{\partial(q_k p_i)}{\partial x_k}. \qquad (1.13\text{в})$$

Предположив, что по парам одинаковых индексов $i, k = -1, 0, 1$ проводится суммирование, оставим запись равенства (1.13а) без изменения, а в (1.13б), (1.13в) заменим некоторые немые индексы:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,(u_k p_i q_i) = u_i\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,(\delta_{ik} q_j p_j) + q_i\Big(p_i\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\Big); \qquad (1.13\text{б}')$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,(q_k u_i p_i) = u_i\,\frac{\partial(p_i q_k)}{\partial x_i} + q_i p_k\,\frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \qquad (1.13\text{в}')$$

Рассматривая вектор $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}^{(1)}$ и тензоры второго ранга $q^{(1,N)}$, $p^{(1,N)}$ с компонентами u_i, $q_{kn}^{(1,N)}$, $p_{jn}^{(1,N)}$ соответственно, из (1.13а), (1.13б$'$), (1.13в$'$), добавив недостающий индекс n у функций q_k, p_j и предполагая по n суммирование от $-N$ до N, можно получить необходимые равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,(u_i q_{in}^{(1,N)} p_{kn}^{(1,N)}) = q_{in}^{(1,N)} p_{kn}^{(1,N)}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i\,\frac{\partial(q_{in}^{(1,N)} p_{kn}^{(1,N)})}{\partial x_k}; \qquad (1.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,(u_k q_{in}^{(1,N)} p_{in}^{(1,N)}) = u_i\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,(\delta_{ik} q_{jn}^{(1,N)} p_{jn}^{(1,N)}) + q_{in}^{(1,N)} p_{in}^{(1,N)}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}; \qquad (1.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,(u_i p_{in}^{(1,N)} q_{kn}^{(1,N)}) = u_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,(p_{in}^{(1,N)} q_{kn}^{(1,N)}) + q_{in}^{(1,N)} p_{kn}^{(1,N)}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \qquad (1.16)$$

Представляется вероятным, что равенства (1.14)–(1.16) могут быть получены как комбинации тождеств вида (1.11), (1.12), если тензор-функции $q^{(1,N)}$, $p^{(1,N)}$ разложить на неприводимые представления. Эта задача нами не исследовалась.

Тождества (1.11), (1.12), (1.14)–(1.16), которые будем называть правилами обобщенного векторного анализа, будут служить основой всех наших дальнейших построений.

2. Конструирование усложненных систем. Простейшие системы галилеево-инвариантных термодинамически согласованных уравнений, свойства которых подробно обсуждались в [1], записываются следующим образом:

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial(u_k L_{q_0})}{\partial x_k} = 0 \quad \text{(сохранение массы)},$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} = 0 \quad \text{(сохранение импульса)}, \\
\frac{\partial L_{\boldsymbol{q}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{\boldsymbol{q}})}{\partial x_k} = -\boldsymbol{\varphi}, \\
\frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_T)}{\partial x_k} = \frac{\boldsymbol{q}\boldsymbol{\varphi}}{T} \quad \text{(энтропийное уравнение)}, \\
\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial [u_k (E+L)]}{\partial x_k} = 0 \quad \text{(сохранение энергии)}.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

В этих уравнениях u_{-1}, u_0, u_1 — компоненты вектора скорости; T — температура; q_0 — скалярная переменная, тогда как $\boldsymbol{q}$ — переменная, как правило векторная, той же размерности, что и правая часть $\boldsymbol{\varphi}$; $\boldsymbol{q}\boldsymbol{\varphi}$ — скалярное произведение векторных множителей. Если компоненты векторов $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{\varphi}$ обозначить через q_γ, φ_γ, то производящий систему (2.1) потенциал L должен быть задан в виде "уравнения состояния"

$$L = L(q_0, u_{-1}, u_0, u_1, \boldsymbol{q}, T) \equiv L(q_0, u_{-1}, u_0, u_1, q_1, q_2, \ldots, T).$$

Преобразование Лежандра от L обозначается через E:

$$E = q_0 L_{q_0} + u_{-1} L_{u_{-1}} + u_0 L_{u_0} + u_1 L_{u_1} + \sum_{\gamma \neq 0} q_\gamma L_{q_\gamma} + T L_T - L \equiv$$
$$\equiv q_0 L_{q_0} + u_k L_{u_k} + q_\gamma L_{q_\gamma} + T L_T - L \equiv q_0 L_{q_0} + \boldsymbol{q} L_{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{u} L_{\boldsymbol{u}} + T L_T - L.$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{\varphi}$ в допустимых с точки зрения термодинамики уравнениях должны обеспечивать положительность правой части предпоследнего уравнения системы (2.1) (закона возрастания энтропии).

Закон сохранения энергии (последнее уравнение в (2.1)) является следствием всех остальных уравнений этой системы. В [1] показано, что если при поворотах координатных осей и вызванных ими преобразованиях входящих в (2.1) вектор-функций производящий потенциал L остается инвариантным, то и система (2.1) будет инвариантной относительно вращений. Она также инвариантна относительно перехода в систему координат, движущуюся с постоянной скоростью относительно исходной, если

$$L = \Lambda(q_0 + u_i u_i / 2, \boldsymbol{q}, T). \tag{2.2}$$

Иными словами, в предположении (2.2) система уравнений (2.1) галилеево-инвариантна.

Предположим, что вектор $\boldsymbol{q}$ составлен из скалярных компонент, а также из векторных $\boldsymbol{q}^{(A)}$ и тензорных $q^{(1,A)}$ компонент с различными весами A. Один и тот же вес может встречаться у нескольких компонент. Заметим также, что компоненты векторов $L_{\boldsymbol{u}}$, $L_{\boldsymbol{q}}$ при вращениях преобразуются по тем же представлениям, что и соответствующие компоненты векторов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{q}$.

Теперь можно перейти к описанию конструкций усложненных уравнений, введение и предварительное изучение которых является целью настоящей работы.

Конструирование уравнений осуществляется из деталей. Одной из таких деталей является простейшая система (2.1), а другими деталями — тождества (1.11), (1.12), (1.14)–(1.16). При конструировании включаем в уравнение исходной простейшей системы новые слагаемые, содержащие векторные производные от неизвестных вектор-функций. При этом следим за тем, чтобы эти слагаемые выбирались из агрегатов, входящих в то или иное тождество, и на основании этого тождества обеспечивали точное выполнение закона сохранения массы (в исходной формулировке), законов сохранения импульса и энергии. В потоки энергии всегда приходится вносить дополнительные слагаемые, тогда как в потоки импульса они иногда вносятся, а иногда не вносятся.

Пусть исходная система состоит из равенств, "интегрирующими множителями" которых соответственно являются q_0, u_i, $\boldsymbol{q}^{(A)}$, $\boldsymbol{r}^{(A)}$, T:

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{q_0})}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial L_{\boldsymbol{q}^{(A)}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{\boldsymbol{q}^{(A)}})}{\partial x_k} = -\boldsymbol{\varphi}^{(A)}, \qquad \frac{\partial L_{\boldsymbol{r}^{(A)}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{\boldsymbol{r}^{(A)}})}{\partial x_k} = -\boldsymbol{\psi}^{(A)}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_T)}{\partial x_k} = \frac{(\boldsymbol{q}^{(A)}, \boldsymbol{\varphi}^{(A)}) + (\boldsymbol{r}^{(A)}, \boldsymbol{\psi}^{(A)})}{T}.$$

Взяв линейную комбинацию этих равенств с "интегрирующими множителями" в качестве коэффициентов, получим дополнительный закон сохранения энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial [u_k(E + L)]}{\partial x_k} = 0,$$

в котором

$$E = q_0 L_{q_0} + (\boldsymbol{u}, L_{\boldsymbol{u}}) + (\boldsymbol{q}^{(A)}, L_{\boldsymbol{q}^{(A)}}) + (\boldsymbol{r}^{(A)}, L_{\boldsymbol{r}^{(A)}}) + T L_T - L.$$

Из этой исходной системы сконструируем усложненную, которая отличается от исходной введением дополнительных слагаемых в уравнения, содержащие производные по t от $L_{\boldsymbol{q}^{(A)}}$ и от $L_{\boldsymbol{r}^{(A)}}$. Тогда модифицированные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L_{\boldsymbol{q}^{(A)}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{\boldsymbol{q}^{(A)}})}{\partial x_k} + \frac{\delta\sqrt{3}}{\sqrt{2A+1}}\,[\nabla \times \boldsymbol{r}^{(A)}]^{(A)} = -\boldsymbol{\varphi}^{(A)}, \\ &\frac{\partial L_{\boldsymbol{r}^{(A)}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{\boldsymbol{r}^{(A)}})}{\partial x_k} - \frac{\delta\sqrt{3}}{\sqrt{2A+1}}\,[\nabla \times \boldsymbol{q}^{(A)}]^{(A)} = -\boldsymbol{\psi}^{(A)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь δ — произвольный постоянный множитель. Очевидно, что левые части модифицированных уравнений сохранят дивергентный вид.

Если для описанной видоизмененной системы повторить вывод энергетического уравнения, рассмотрев линейную комбинацию уравнений с теми же "интегрирующими множителями", то получим равенство

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial \{u_k(E + L) + \delta[\boldsymbol{q}^{(A)} \times \boldsymbol{r}^{(A)}]_k^{(1)}\}}{\partial x_k} = 0, \tag{2.5}$$

которое отличается от соответствующего исходного тем, что в векторе потока энергии компоненты $u_k(E + L)$ заменены на $u_k(E + L) + \delta[\boldsymbol{q}^{(A)} \times \boldsymbol{r}^{(A)}]_k^{(1)}$. При выводе (2.5) использовано тождество (1.11).

В силу инвариантности при вращениях дополнительно вводимых слагаемых видоизмененная система осталась вращательно-инвариантной. Специальная зависимость производящего потенциала (2.2) от компонент скорости u_i и неизменность при модификации первого уравнения системы (2.3) (закона сохранения массы) обеспечивают инвариантность модифицированных уравнений при переходе в подвижную систему координат, движущуюся относительно исходной с постоянной скоростью ($x_k \to x_k - tU_k$, $u_k \to u_k - U_k$). Мы здесь не останавливаемся на элементарной проверке сделанного утверждения, которая, по существу, не отличается от аналогичной проверки, выполненной в [1] для более простого случая. При этом нужно воспользоваться тем, что вводимые в (2.4) новые слагаемые от u_k не зависят.

Таким образом, описанная модификация простейших уравнений не приводит к нарушению их галилеевой инвариантности.

Рассмотрим еще одну аналогичную конструкцию усложнения исходной системы уравнений, имеющей среди неизвестных вектор-функции $\boldsymbol{q}^{(A)}$, $\boldsymbol{r}^{(A+1)}$, преобразующиеся по представлениям целых весов A, $A+1$, различающихся на 1:

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial(u_k L_{q_0})}{\partial x_k}=0, \qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial(u_k L)_{u_i}}{\partial x_k}=0,$$

$$\frac{\partial L_{\boldsymbol{q}^{(A)}}}{\partial t}+\frac{\partial(u_k L_{\boldsymbol{q}^{(A)}})}{\partial x_k}=-\boldsymbol{\varphi}^{(A)}, \qquad \frac{\partial L_{\boldsymbol{r}^{(A+1)}}}{\partial t}+\frac{\partial(u_k L_{\boldsymbol{r}^{(A+1)}})}{\partial x_k}=-\boldsymbol{\psi}^{(A+1)},$$

$$\frac{\partial L_T}{\partial t}+\frac{\partial(u_k L_T)}{\partial x_k}=\frac{(\boldsymbol{q}^{(A)},\boldsymbol{\varphi}^{(A)})+(\boldsymbol{r}^{(A+1)},\boldsymbol{\psi}^{(A+1)})}{T}, \qquad \frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial[u_k(E+L)]}{\partial x_k}=0.$$

В систему включен дополнительный закон сохранения энергии, получающийся как линейная комбинация первых пяти уравнений с коэффициентами q_0, u_i, $\boldsymbol{q}^{(A)}$, $\boldsymbol{r}^{(A+1)}$, T. Усложнение этой исходной системы вновь будем проводить с использованием тождества (1.11). Введя дополнительные слагаемые в уравнения, содержащие производные по времени t от $L_{\boldsymbol{q}^{(A)}}$, $L_{\boldsymbol{r}^{(A+1)}}$, запишем их в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial L_{\boldsymbol{q}^{(A)}}}{\partial t}+\frac{\partial(u_k L_{\boldsymbol{q}^{(A)}})}{\partial x_k}+\frac{\delta\sqrt{3}}{\sqrt{2A+1}}\,[\nabla\times\boldsymbol{r}^{(A+1)}]^{(A)}=-\boldsymbol{\varphi}^{(A)},\\ \frac{\partial L_{\boldsymbol{r}^{(A+1)}}}{\partial t}+\frac{\partial(u_k L_{\boldsymbol{r}^{(A+1)}})}{\partial x_k}+\frac{\delta\sqrt{3}}{\sqrt{2A+3}}\,[\nabla\times\boldsymbol{q}^{(A)}]^{(A+1)}=-\boldsymbol{\psi}^{(A+1)}.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Сделанная модификация этих двух векторных уравнений приводит и к модификации энергетического уравнения:

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial\{u_k(E+L)+\delta[\boldsymbol{q}^{(A)}\times\boldsymbol{r}^{(A+1)}]_k^{(1)}\}}{\partial x_k}=0.$$

Галилеева инвариантность усложненной системы при рассмотренном сейчас варианте усложнения доказывается дословным повторением тех же рассуждений, что и в предыдущем примере. Отметим, что в описанных нами вариантах усложнения исходной системы не вносилось никаких корректив в уравнения, моделирующие законы сохранения массы и импульса.

Закон сохранения массы (первое из равенств, входящих в модифицируемую систему) подвергается коррекции, только если в качестве $\boldsymbol{q}^{(A)}$ во втором варианте модификации выбран скаляр q_0. Мы от таких модификаций отказываемся, так как дополнительные слагаемые в потоках массы, возникающие при коррекции, противоречат доказательству инвариантности уравнений при переходе в движущуюся систему координат (см. [1, п. 1]).

При усложнениях, основанных на вариантах тождества (1.12), появляются поправки в уравнениях для импульса. Приведем пример усложнения, основанный на варианте тождества (1.12), в котором $L=M=A$ и $K=1$ (в обозначении вектора скорости $\boldsymbol{u}$ значок, указывающий на вес (1) представления, опущен):

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,[[\boldsymbol{q}^{(A)}\times L_{\boldsymbol{q}^{(A)}}]^{(1)}\times\boldsymbol{u}]_k^{(1)}=(\boldsymbol{u},[\nabla\times[\boldsymbol{q}^{(A)}\times L_{\boldsymbol{q}^{(A)}}]^{(1)}]^{(1)})-\\ -\sqrt{3/(2A+1)}\,(\boldsymbol{q}^{(A)},[L_{\boldsymbol{q}^{(A)}}\times[\nabla\times\boldsymbol{u}]^{(1)}]^{(A)}).$$

Приведем запись усложненной системы, состоящей из уравнения закона сохранения массы

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_0})}{\partial x_k}=0,$$

уравнения видоизмененного закона сохранения импульса

$$\frac{\partial L_{\boldsymbol u}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\Big\{(u_kL)_{\boldsymbol u}+\frac{\delta}{\sqrt3}[\nabla\times[\boldsymbol q^{(A)}\times L_{\boldsymbol q^{(A)}}]^{(1)}]^{(1)}\Big\}=0,$$

векторного уравнения

$$\frac{\partial L_{\boldsymbol q^{(A)}}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{\boldsymbol q^{(A)}})}{\partial x_k}-\frac{\delta\sqrt3}{\sqrt{2A+1}}\,[L_{\boldsymbol q^{(A)}}\times[\nabla\times\boldsymbol u]^{(1)}]^{(A)}=-\boldsymbol\varphi^{(A)},$$

утратившего вид закона сохранения, так как в левую часть добавлено недивергентное слагаемое, каждая компонента которого является линейной комбинацией первых производных от компонент скорости, компенсационного уравнения для энтропии

$$\frac{\partial L_T}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_T)}{\partial x_k}=\frac{(\boldsymbol q^{(A)},\boldsymbol\varphi^{(A)})}{T}.$$

Список завершает равенство

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\{(E+L)u_k+\delta[[\boldsymbol q^{(A)}\times L_{\boldsymbol q^{(A)}}]^{(1)}\times\boldsymbol u]_k^{(1)}\}=0.$$

В приведенном списке уравнений последнее (закон сохранения энергии) является следствием предыдущих. Инвариантность уравнений относительно вращений координатной системы не вызывает сомнений. Инвариантность относительно перехода в движущуюся (с постоянной скоростью) координатную систему вытекает из того, что при усложнении мы не меняем первое уравнение (закон сохранения массы), добавляя во все остальные уравнения (кроме последнего — следствия предыдущих) новые слагаемые, либо не зависящие от компонент u_j, либо зависящие только от производных $\partial u_j/\partial x_i$. Эти производные не меняются при замене u_j на u_j+U_j ($U_j=\mathrm{const}$). Напомним (см. [1, п. 1]), что в доказательстве инвариантности к уравнениям закона сохранения импульса приходится добавлять умноженное на постоянные коэффициенты уравнение закона сохранения массы, которое при этом не модифицируется. Естественно, что инвариантность имеет место лишь благодаря тому, что производящий потенциал (2.2) задается функцией, являющейся инвариантом относительно вращений. Другие варианты тождеств, объединенных равенством (1.5), после аналогичных преобразований приводят к новым вариантам галилеево-инвариантных усложненных систем. Сейчас на этом останавливаться не будем.

Теперь мы обратимся к модификациям, опирающимся на тождества (1.14)–(1.16). При этом естественно использовать описанную в п. **1** обобщенную тензорную символику.

Взяв в качестве исходной систему

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_0})}{\partial x_k}=0,\qquad\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL)_{u_i}}{\partial x_k}=0,$$
$$\frac{\partial L_{q_{ja}^{(1,A)}}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_{ja}^{(1,A)}})}{\partial x_k}=-\varphi_{ja}^{(1,A)},\qquad\frac{\partial L_T}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_T)}{\partial x_k}=\frac{q_{ja}^{(1,A)}\varphi_{ja}^{(1,A)}}{T},\tag{2.7}$$
$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial[u_k(E+L)]}{\partial x_k}=0,$$

внесем дополнительные слагаемые в левые части некоторых уравнений.

Результат модификации будем полагать следующим:

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_0})}{\partial x_k}=0,\qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial[(u_kL)_{u_i}-q_{ia}^{(1,A)}L_{q_{ka}^{(1,A)}}]}{\partial x_k}=0,$$
$$\frac{\partial L_{q_{ja}^{(1,A)}}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_{ja}^{(1,A)}})}{\partial x_k}-L_{q_{ka}^{(1,A)}}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=-\varphi_{ja}^{(1,A)},\qquad \frac{\partial L_T}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_T)}{\partial x_k}=\frac{q_{ja}^{(1,A)}\varphi_{ja}^{(1,A)}}{T},\tag{2.8}$$
$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial[u_k(E+L)-u_iq_{ia}^{(1,A)}L_{q_{ka}^{(1,A)}}]}{\partial x_k}=0.$$

В модифицированной системе, так же как в исходной (2.7), последнее уравнение является линейной комбинацией предыдущих с соответствующими коэффициентами q_0, u_i, $q_{ja}^{(1,A)}$, T. Для обоснования этого утверждения нужно воспользоваться тождеством (1.14), сделав в нем замену обозначений

$$N\to A,\quad n\to a,\quad p_{kn}^{(1,N)}\to L_{q_{ka}^{(1,A)}},\quad q_{in}^{(1,N)}\to q_{ia}^{(1,A)}.$$

Отметим, что в результате модификации уравнения, стоящие в левой части второй строки системы (2.8), потеряли дивергентный вид, перестали быть законами сохранения. Законы же сохранения массы, импульса и энергии не нарушились, хотя последние два видоизменились.

Аналогично из исходной системы (2.7) при помощи тождества (1.14) конструируются модифицированные уравнения, отличающиеся от (2.8) лишь некоторыми знаками:

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_0})}{\partial x_k}=0,\qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial[(u_kL)_{u_i}+q_{ia}^{(1,A)}L_{q_{ka}^{(1,A)}}]}{\partial x_k}=0,$$
$$\frac{\partial L_{q_{ja}^{(1,A)}}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_{ja}^{(1,A)}})}{\partial x_k}+L_{q_{ka}^{(1,A)}}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=-\varphi_{ja}^{(1,A)},\qquad \frac{\partial L_T}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_T)}{\partial x_k}=\frac{q_{ja}^{(1,A)}\varphi_{ja}^{(1,A)}}{T},\tag{2.9}$$
$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial[u_k(E+L)+u_iq_{ia}^{(1,A)}L_{q_{ka}^{(1,A)}}]}{\partial x_k}=0,$$

а тождество (1.16) приводит к еще одной возможной модификации

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_0})}{\partial x_k}=0,\qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial[(u_kL)_{u_i}-\delta_{ik}q_{ja}^{(1,A)}L_{q_{ja}^{(1,A)}}]}{\partial x_k}=0,$$
$$\frac{\partial L_{q_{ja}^{(1,A)}}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_{ja}^{(1,A)}})}{\partial x_k}-L_{q_{ja}^{(1,A)}}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=-\varphi_{ja}^{(1,A)},\qquad \frac{\partial L_T}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_T)}{\partial x_k}=\frac{q_{ja}^{(1,A)}\varphi_{ja}^{(1,A)}}{T},\tag{2.10}$$
$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial[u_k(E+L-q_{ia}^{(1,A)}L_{q_{ia}^{(1,A)}})]}{\partial x_k}=0.$$

Заметим, что при построении модификаций, содержащих законы сохранения массы, импульса и энергии, можно одновременно опираться на несколько тождеств (1.14)–(1.16). Приведем один из возможных примеров так сконструированной модификации:

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_0})}{\partial x_k}=0,\qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial[(u_kL)_{u_i}-\delta_{ik}q_{ja}^{(1,A)}L_{q_{ja}^{(1,A)}}+q_{ia}^{(1,A)}L_{q_{ka}^{(1,A)}}]}{\partial x_k}=0,$$

$$\frac{\partial L_{q_{ja}^{(1,A)}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{q_{ja}^{(1,A)}})}{\partial x_k} - L_{q_{ja}^{(1,A)}} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + L_{q_{ka}^{(1,A)}} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = -\varphi_{ja}^{(1,A)}, \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_T)}{\partial x_k} = \frac{q_{ja}^{(1,A)} \varphi_{ja}^{(1,A)}}{T}, \qquad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial [u_k (E + L - q_{ja}^{(1,A)} L_{q_{ja}^{(1,A)}}) + u_i q_{ia}^{(1,A)} L_{q_{ka}^{(1,A)}}]}{\partial x_k} = 0.$$

В левых частях уравнений этой системы содержатся дополнительные по отношению к исходной слагаемые, использовавшиеся ранее при конструировании как уравнений (2.9), так и системы (2.10).

Дополнительные по отношению к системе (2.7) члены модифицированных систем (2.8)–(2.11) не нарушают галилеевой инвариантности, так как модификация не затрагивает первое уравнение (закон сохранения массы) и во всех уравнениях, кроме последнего, использует лишь производные $\partial u_i/\partial x_k$, так что дополнительные слагаемые не изменяются при добавлении к u_i постоянных. Кроме того, без труда проверяется, что дополнительные члены инвариантны относительно вращений. Последнее равенство в (2.11) является следствием всех предыдущих.

Напомним, что нами используется производящий потенциал L специального вида (2.2).

3. Модификации, эквивалентные симметрическим гиперболическим системам. Простейшие термодинамически согласованные системы законов сохранения, если производящий потенциал является выпуклой функцией своих аргументов, всегда могут быть записаны в виде симметрической гиперболической системы. Хотя в настоящее время этот факт общеизвестен, следует на нем кратко остановиться, поскольку он используется при исследовании модифицированных уравнений.

Простейшая система, если не включать в нее последнее (энергетическое) уравнение, являющееся следствием всех остальных, может быть записана в следующем виде ($L = L(r_1, r_2, \ldots, r_N)$, $M^{(k)} = u_k L = M^{(k)}(r_1, r_2, \ldots, r_N)$):

$$\frac{\partial L_{r_i}}{\partial t} + \frac{\partial M_{r_i}^{(k)}}{\partial x_k} = f_i \qquad (3.1)$$

(здесь все неизвестные переобозначены через r_i). Уравнения (3.1) можно переписать в квазилинейном виде

$$L_{r_i r_j} \frac{\partial r_j}{\partial t} + M_{r_i r_j}^{(k)} \frac{\partial r_j}{\partial x_k} = f_i, \qquad (3.2)$$

так что матрицы из коэффициентов при производных очевидно оказываются симметричными. Положительная определенность матрицы $L_{r_i r_j}$ вытекает из предположения о выпуклости производящего потенциала L.

Описывая в п. **2** технику конструирования модифицированных уравнений, мы выделили конструкции, в которых дополнительные слагаемые в равенства, описывающие закон сохранения импульса, не вносятся. Оказывается, что при этом сконструированная система также может быть записана в виде (3.1), но с измененными потенциалами $M^{(k)}$, а следовательно, обоснование гиперболичности, основанное на рассмотрении ее квазилинейного варианта (3.2), остается в силе.

Покажем справедливость данного утверждения на примере рассмотренных выше уравнений (2.4) и (2.6).

Уравнения (2.4) более подробно с использованием матриц Клебша — Гордана записываются в виде

$$\frac{\partial L_{q_\alpha^{(A)}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{q_\alpha^{(A)}})}{\partial x_k} + \delta \sqrt{\frac{3}{2A+1}}\, G_{A[1,A]}^{\alpha[k,b]} \frac{\partial r_b^{(A)}}{\partial x_k} = -\varphi_\alpha^{(A)},$$

$$\frac{\partial L_{r_\beta^{(A)}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{r_\beta^{(A)}})}{\partial x_k} - \delta \sqrt{\frac{3}{2A+1}}\, G^{\beta[k,a]}_{A[1,A]} \frac{\partial q_a^{(A)}}{\partial x_k} = -\psi_\beta^{(A)}.$$

Используя свойства коэффициентов Клебша — Гордана

$$G^{\alpha[k,b]}_{A[1,A]} = -G^{b[k,\alpha]}_{A[1,A]} = \sqrt{(2A+1)/3}\, G^{k[b,\alpha]}_{1[A,A]} = -\sqrt{(2A+1)/3}\, G^{k[\alpha,b]}_{1[A,A]}$$

и полагая

$$F^{(k)} = \delta(G^k_{1[A,A]}\boldsymbol{r}^{(A)}, \boldsymbol{q}^{(A)}) \equiv \delta G^{k[b,\alpha]}_{1[A,A]} r_b^{(A)} q_\alpha^{(A)},$$

можно установить, что, модифицируя простейшую систему так, как это указано в (2.4), в записи (3.1) вместо потенциалов $M^{(k)}$ нужно использовать модифицированные потенциалы $\hat{M}^{(k)} = M^{(k)} + F^{(k)}$. Поэтому в квазилинейной формулировке (3.2) элементы $M^{(k)}_{r_i r_j}$ заменятся на $\hat{M}^{(k)}_{r_i r_j}$, а при этом очевидно, что матрицы коэффициентов остаются симметричными. Матрица коэффициентов при производных по t вообще не меняется, оставаясь симметричной и положительно определенной. Следовательно, разбираемая модификация сохраняет симметрическую гиперболичность уравнений. Более подробная запись уравнений (2.6) имеет вид

$$\frac{\partial L_{q_\alpha^{(A)}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{q_\alpha^{(A)}})}{\partial x_k} + \delta \sqrt{\frac{3}{2A+1}}\, G^{\alpha[k,a]}_{A[1,A+1]} \frac{\partial r_a^{(A+1)}}{\partial x_k} = -\varphi_\alpha^{(A)},$$

$$\frac{\partial L_{r_\beta^{(A+1)}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{r_\beta^{(A+1)}})}{\partial x_k} + \delta \sqrt{\frac{3}{2A+3}}\, G^{\beta[k,b]}_{A+1[1,A]} \frac{\partial q_b^{(A)}}{\partial x_k} = -\psi_\beta^{(A+1)}.$$

Воспользовавшись вновь свойствами коэффициентов Клебша — Гордана

$$\sqrt{3/(2A+1)}\, G^{\alpha[k,a]}_{A[1,A+1]} = \sqrt{3/(2A+1)} G^{a[k,\alpha]}_{A+1[1,A]} = G^{k[a,\alpha]}_{1[A+1,A]} = G^{k[\alpha,a]}_{1[A,A+1]}$$

и полагая

$$F^{(k)} = \delta G^{k[a,\alpha]}_{1[A+1,A]} q_a^{(A)} r_\alpha^{(A+1)} = \delta(G^k_{1[A+1,A]}\boldsymbol{q}^{(A)}, \boldsymbol{r}^{(A+1)}),$$

можно увидеть, что описываемая модификация вновь сводится к замене потенциалов $M^{(k)}$ на соответствующие потенциалы $\hat{M}^{(k)} = M^{(k)} + F^{(k)}$, что, как уже отмечалось, не нарушает симметрической гиперболичности уравнений.

Совсем неясно, однако, что приведенные в конце п. **2** конструкции, в которых появляются новые слагаемые в потоке импульса, приводят к гиперболическим модифицированным уравнениям. Вернее всего, что, вообще говоря, это не так. В то же время гиперболические модификации и среди систем с измененным импульсом существуют. Покажем, что модификации систем (2.8) и (2.11) могут быть переписаны в виде симметрических гиперболических систем. Это приведение основано на использовании того факта, что уравнения (2.8) и (2.11) имеют характеристики $dx_i/dt = u_i$ — линии тока. Соотношения вдоль этих характеристик могут быть найдены и использованы в процессе симметризации матриц коэффициентов квазилинейной формы указанных уравнений.

Получим сначала соотношения вдоль линий тока для уравнений системы (2.8). Для этого достаточно использовать равенства из этой системы

$$\frac{\partial L_{q_{ja}^{(1,A)}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{q_{ja}^{(1,A)}})}{\partial x_k} - L_{q_{ka}^{(1,A)}} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\varphi_{ja}^{(1,A)}.$$

Дифференцируя каждое из этих равенств по x_j и суммируя по j, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L_{q_{ja}^{(1,A)}}}{\partial x_j}\Big)+\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(u_k\,\frac{\partial L_{q_{ja}^{(1,A)}}}{\partial x_j}\Big)=-\frac{\partial \varphi_{ja}^{(1,A)}}{\partial x_j}. \tag{3.3}$$

Сравнивая это уравнение с законом сохранения массы

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_0})}{\partial x_k}=0$$

и вводя обозначение

$$D_a^{(A)}=\frac{1}{L_{q_0}}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,L_{q_{ja}^{(1,A)}}, \tag{3.4}$$

нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial D_a^{(A)}}{\partial t}+u_k\frac{\partial D_a^{(A)}}{\partial x_k}=-\frac{1}{L_{q_0}}\,\frac{\partial \varphi_{ja}^{(1,A)}}{\partial x_j}. \tag{3.5}$$

Используя обозначение (3.4), закон сохранения импульса

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial[(u_kL)_{u_i}-q_{ia}^{(1,A)}L_{q_{ka}^{(1,A)}}]}{\partial x_k}=0,$$

выполнив дифференцирования, можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL)_{u_i}}{\partial x_k}-L_{q_{ka}^{(1,A)}}\,\frac{\partial q_{ia}^{(1,A)}}{\partial x_k}=q_{ia}^{(1,A)}\,\frac{\partial L_{q_{ka}^{(1,A)}}}{\partial x_k}\equiv q_{ia}^{(1,A)}L_{q_0}D_a^{(A)}.$$

После этого система (2.8), дополненная равенством (3.5), принимает следующую форму:

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_0})}{\partial x_k}=0,\qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL)_{u_i}}{\partial x_k}-L_{q_{ka}^{(1,A)}}\,\frac{\partial q_{ia}^{(1,A)}}{\partial x_k}=L_{q_0}q_{ia}^{(1,A)}D_a^{(A)},$$
$$\frac{\partial L_{q_{ia}^{(1,A)}}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_{ia}^{(1,A)}})}{\partial x_k}-L_{q_{ka}^{(1,A)}}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=-\varphi_{ia}^{(1,A)}, \tag{3.6}$$
$$\frac{\partial L_T}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_T)}{\partial x_k}=\frac{q_{ja}^{(1,A)}\varphi_{ja}^{(1,A)}}{T},\qquad \frac{\partial D_a^{(A)}}{\partial t}+u_k\,\frac{\partial D_a^{(A)}}{\partial x_k}=-\frac{1}{L_{q_0}}\,\frac{\partial\varphi_{ja}^{(1,A)}}{\partial x_j}.$$

Эта система отличается от простейших исходных галилеево-инвариантных и термодинамически согласованных уравнений лишь наличием последнего уравнения и дополнительными слагаемыми (последними членами) в некоторых уравнениях. Осуществив приведение простейших уравнений к квазилинейному виду с симметричными матрицами коэффициентов, нетрудно убедиться, что эта симметрия сохранится и после включения в уравнения указанных дополнительных слагаемых. Матрицы же при производных по t не изменятся. Отсюда и следует симметрическая гиперболичность уравнений (3.6), если только L — выпуклая функция своих аргументов. Без труда проверяется, что включение последнего равенства в систему (3.6) также не нарушает ее симметрической гиперболичности.

Задача Коши для системы (3.6) однозначно разрешима при любых достаточно гладких начальных данных, но при этом на ее решениях равенство (3.4) может не выполняться. Если же начальные данные подчиняются равенству (3.4), то из единственности решения и из сравнения уравнений (3.3) и (3.5) вытекает, что (3.4) выполнено тождественно всюду. Таким образом, обоснована симметрическая гиперболичность одного из эквивалентных вариантов (3.6) записи уравнений (2.8).

Предполагая, что в начальный момент времени $D_a^{(A)} = 0$ и $\varphi^{(1,A)} = 0$, приходим к совместной переопределенной системе законов сохранения

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{q_0})}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{u_i} + \delta_{ik} L - q_{ia}^{(1,A)} L_{q_{ka}^{(1,A)}})}{\partial x_k} = 0,$$
$$\frac{\partial L_{q_{ja}^{(1,A)}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{q_{ja}^{(1,A)}} - u_j L_{q_{ka}^{(1,A)}})}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_k} L_{q_{ka}^{(1,A)}} = 0, \tag{3.7}$$
$$\frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_T)}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial [u_k (E + L) - u_i q_{ia}^{(1,A)} L_{q_{ka}^{(1,A)}}]}{\partial x_k} = 0.$$

Напомним, что $E = q_0 L_{q_0} + u_i L_{u_i} + q_{ja}^{(1,A)} L_{q_{ja}^{(1,A)}} + T L_T - L$, $L = \Lambda(q_0 + u_i u_i/2, q^{(1,A)}, T)$ и L предполагается выпуклой функцией своих аргументов.

Аналогичный вывод соотношений вдоль линий тока для уравнений (2.11) с нулевыми правыми частями будет описан кратко. Используются уравнения системы (2.11)

$$\frac{\partial L_{q_{ja}^{(1,A)}}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{q_{ja}^{(1,A)}})}{\partial x_k} - L_{q_{ja}^{(1,A)}} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + L_{q_{ka}^{(1,A)}} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0. \tag{3.8}$$

Дифференцируя равенства (3.8) и вводя обозначение

$$\frac{\partial L_{q_{ka}^{(1,A)}}}{\partial x_m} - \frac{\partial L_{q_{ma}^{(1,A)}}}{\partial x_k} = -e_{kmj} \omega_{ja}^{(1,A)},$$

можно обосновать равенство

$$\frac{\partial \omega_{ja}^{(1,A)}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \omega_{ja}^{(1,A)} - u_j \omega_{ka}^{(1,A)})}{\partial x_k} = 0, \tag{3.9}$$

являющееся аналогом равенства (3.3), участвовавшего в проведенном выше анализе уравнений (2.8). Из (3.9), в частности, следует, что если правые части нулевые и все $\omega_{ja}^{(1,A)}$ в начальный момент равны нулю, то это равенство сохранится и в дальнейшем. Приведение уравнений (2.11) с нулевыми правыми частями (!!!) к виду симметрической гиперболической системы проводится в предположении, что $\omega_{ja}^{(1,A)} = 0$. Это равенство позволяет преобразовать уравнения закона сохранения импульса

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{u_i} + \delta_{ik} L - \delta_{ik} q_{ja}^{(1,A)} L_{q_{ja}^{(1,A)}} + q_{ia}^{(1,A)} L_{q_{ka}^{(1,A)}})}{\partial x_k} = 0$$

к недивергентному, но более удобному для нас виду

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} + L_{q_{ia}^{(1,A)}} \frac{\partial q_{ka}^{(1,A)}}{\partial x_k} - L_{q_{ka}^{(1,A)}} \frac{\partial q_{ia}^{(1,A)}}{\partial x_k} = 0.$$

В результате приходим к следующей записи уравнений, эквивалентных (при сделанных предположениях) системе (2.11):

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_0})}{\partial x_k}=0,\qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL)_{u_i}}{\partial x_k}+L_{q_{ia}^{(1,A)}}\frac{\partial q_{ia}^{(1,A)}}{\partial x_k}-L_{q_{ka}^{(1,A)}}\frac{\partial q_{ka}^{(1,A)}}{\partial x_i}=0,$$
$$\frac{\partial L_{q_{ja}^{(1,A)}}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_{ja}^{(1,A)}})}{\partial x_k}+L_{q_{ka}^{(1,A)}}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}-L_{q_{ja}^{(1,A)}}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}=0,\qquad \frac{\partial L_T}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_T)}{\partial x_k}=0. \tag{3.10}$$

Равенства (3.10) уже без труда приводятся к квазилинейному виду с симметричными матрицами коэффициентов при производных по t и x_k, откуда при выпуклой производящей функции L и следует симметрическая гиперболичность.

В заключение приведем еще аналогичную (3.7) переопределенную систему законов сохранения, эквивалентную исследуемым уравнениям (2.11), дополненным еще одним уравнением для неизвестного n:

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_0})}{\partial x_k}=0,\qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial[u_kL_{u_i}+\delta_{ik}(L-q_{ja}^{(1,A)}L_{q_{ja}^{(1,A)}})+q_{ia}^{(1,A)}L_{q_{ka}^{(1,A)}}]}{\partial x_k}=0,$$
$$\frac{\partial L_{q_{ja}^{(1,A)}}}{\partial t}+\frac{\partial(u_lL_{q_{la}^{(1,A)}})}{\partial x_j}=-e_{jlm}u_l\omega_{ma}^{(1,A)},\qquad \frac{\partial L_{q_{ka}^{(1,A)}}}{\partial x_m}-\frac{\partial L_{q_{ma}^{(1,A)}}}{\partial x_k}=-e_{kmj}\omega_{ja}^{(1,A)},$$
$$\frac{\partial \omega_{ja}^{(1,A)}}{\partial t}+\frac{\partial(u_k\omega_{ja}^{(1,A)}-u_j\omega_{ka}^{(1,A)})}{\partial x_k}=0,\qquad \frac{\partial L_n}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_n)}{\partial x_k}=-\nu,$$
$$\frac{\partial L_T}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_T)}{\partial x_k}=\frac{n\nu}{T},\qquad \frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial[u_k(E+L-q_{ja}^{(1,A)}L_{q_{ja}^{(1,A)}})+u_iq_{ia}^{(1,A)}L_{q_{ka}^{(1,A)}}]}{\partial x_k}=0.$$

В п. **4** будут приведены конкретные примеры из математической физики, содержащие уравнения, сконструированные из элементов, описанных в этом и предыдущем пунктах.

4. Два конкретных примера. В этом пункте покажем, как при помощи модификаций, описанных в пп. **2, 3**, из простейших галилеево-инвариантных термодинамически согласованных законов сохранения могут быть получены весьма сложные уравнения математической физики. Настоящее исследование проводилось с целью систематизации как можно более широкого класса таких уравнений и является продолжением цикла работ по стандартизации формул, содержащихся в различных монографиях по физике, таких как [6–8], и в ряде научных статей. Результаты этого цикла работ описаны в работах [2–4], в которых приведена запись уравнений, основанная на производящих потенциалах. В данной работе мы ограничились производящими потенциалами специального вида и детально описали "конструкции" уравнений с их использованием.

В п. **2** описана модифицированная система (2.11). Остановимся на ее варианте, который от (2.11) отличается конкретизацией тензорных переменных $q_{ja}^{(1,A)}$, а именно положим $q_{i0}^{(1,0)}=j_i$ $(i=0,\pm1)$. Тогда система запишется в виде

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{q_0})}{\partial x_k}=0,\qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial[(u_kL)_{u_i}-\delta_{ik}j_mL_{j_m}+j_iL_{j_k}]}{\partial x_k}=0,$$
$$\frac{\partial L_{j_i}}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_{j_i})}{\partial x_k}-L_{j_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+L_{j_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}=0,\qquad \frac{\partial L_T}{\partial t}+\frac{\partial(u_kL_T)}{\partial x_k}=\frac{\nu n}{T}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_n)}{\partial x_k} = -\nu, \qquad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial [u_k(E + L - j_m L_{j_m}) + u_m j_m L_{j_k}]}{\partial x_k} = 0.$$

Предполагается также, что

$$L = \Lambda(q_0 + u_i u_i/2, j_{-1}, j_0, j_1, n, T), \quad E = q_0 L_{q_0} + u_k L_{u_k} + j_m L_{j_m} + n L_n + T L_T - L. \tag{4.2}$$

В п. **3** показано, что уравнения (2.11) (с нулевыми правыми частями) можно свести к симметрической гиперболической системе, основываясь на вытекающих из уравнений дополнительных соотношениях, которые в рассматриваемом сейчас варианте (4.2) имеют вид

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \omega_r - u_r \omega_k)}{\partial x_k} = 0; \tag{4.3}$$

$$\omega_{-1} = \frac{\partial L_{j_1}}{\partial x_0} - \frac{\partial L_{j_0}}{\partial x_1} = 0, \qquad \omega_0 = \frac{\partial L_{j_{-1}}}{\partial x_1} - \frac{\partial L_{j_1}}{\partial x_{-1}} = 0, \qquad \omega_1 = \frac{\partial L_{j_0}}{\partial x_{-1}} - \frac{\partial L_{j_{-1}}}{\partial x_0} = 0. \tag{4.4}$$

Используя новые переменные ω_m, уравнения третьей группы из системы (4.1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial L_{j_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_m L_{j_m})}{\partial x_i} - e_{ilr} u_l \omega_r = 0. \tag{4.5}$$

Напомним, что именно с использованием этих уравнений выводились соотношения (4.3).

Подвергнем теперь уравнения (4.5) и предпоследнее уравнение системы (4.1) еще одной модификации, по существу, совпадающей с простейшим вариантом модификации системы (2.7) из п. **2**. Приведем ее результат:

$$\frac{\partial L_n}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_n + j_k)}{\partial x_k} = -\nu, \qquad \frac{\partial L_{j_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_m L_{j_m} + n)}{\partial x_k} = 0. \tag{4.6}$$

Заметим, что дополнительные слагаемые n, j_k, внесенные в процессе модификации под знак производных $\partial/\partial x_k$, не нарушают справедливости уравнений (4.3), вытекающих как из (4.5), так и из (4.6).

В то же время произведенная модификация, как отмечалось в п. **2**, приводит к появлению дополнительных слагаемых в потоках энергии. Энергетическое уравнение становится следующим:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial [u_k(E + L - j_m L_{j_m}) + u_m j_m L_{j_k} + n j_k]}{\partial x_k} = 0.$$

Итак, в результате описанных модификаций приходим к следующей переопределенной, но совместной системе:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{q_0})}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial [(u_k L)_{u_i} - \delta_{ik} j_m L_{j_m} + j_i L_{j_k}]}{\partial x_k} = 0, \\
\frac{\partial L_{j_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_m L_{j_m} + n)}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{j_k}}{\partial x_m} - \frac{\partial L_{j_m}}{\partial x_k} = 0, \\
\frac{\partial L_n}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_n + j_k)}{\partial x_k} = -\nu, \qquad \frac{\partial L_T}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_T)}{\partial x_k} = \frac{n\nu}{T}, \\
\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial [u_k(E + L - j_m L_{j_m}) + u_m j_m L_{j_k} + n j_k]}{\partial x_k} = 0.
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Первые два уравнения в системе (4.7) моделируют законы сохранения массы и импульса, тогда как предпоследним стоит компенсационное уравнение для энтропии, а перед ним — уравнение для "химического потенциала" n, градиент которого вызывает сверхтекучий поток j. Завершает систему закон сохранения энергии.

Система (4.7) близка к формализации уравнений для сверхтекучего гелия, описанных в [8] и схематизированных в работе [4]. В уравнения (4.7) включено дополнительное уравнение для "химического потенциала" n, тогда как в [8] его роль по совместительству выполняет q_0. К сожалению, при этом сверхтекучий поток j входит в первое уравнение (закон сохранения массы), и при этом нарушается один из постулатов, лежащих в основе наших исследований. На этом постулате основано у нас обоснование галилеевой инвариантности.

Обратимся теперь к совместной переопределенной системе (3.7), построенной в п. **3** при помощи одной из рассмотренных там же модификаций. Вновь ограничимся простейшим вариантом, полагая $A = 0$ и используя для переменных $q_{k0}^{(1,0)}$ сокращенные обозначения b_k. В то же время вместо системы (3.7) рассмотрим ее несложное обобщение на случай, когда среда характеризуется двумя температурами, а в поток импульса и в уравнение для энергии включаются слагаемые, описывающие вязкую диссипацию и процесс теплопроводности:

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{q_0})}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(u_k L_{u_i} + \delta_{ik} L - b_i L_{b_k} + \mu\,\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial L_{b_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{b_i} - u_i L_{b_k})}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\, L_{b_k} = 0,$$

$$\frac{\partial L_{T_1}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{T_1})}{\partial x_k} = \frac{K_1}{T_1^2}\,\frac{\partial T_1}{\partial x_k}\,\frac{\partial T_1}{\partial x_k} + K_{12}\,\frac{T_2 - T_1}{T_1} + \frac{\mu}{T_1}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{K_1}{T_1}\,\frac{\partial T_1}{\partial x_k}\Big), \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial L_{T_2}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L_{T_2})}{\partial x_k} = \frac{K_2}{T_2^2}\,\frac{\partial T_2}{\partial x_k}\,\frac{\partial T_2}{\partial x_k} + K_{12}\,\frac{T_1 - T_2}{T_2} + \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{K_2}{T_2}\,\frac{\partial T_2}{\partial x_k}\Big),$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\Big[u_k(E + L) + u_m b_m L_{b_k} - K_1\,\frac{\partial T_1}{\partial x_k} - K_2\,\frac{\partial T_2}{\partial x_k} + u_i\,\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\mu\,\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\Big)\Big] = 0.$$

Коэффициенты вязкости μ, теплопроводности K_1, K_2 и тепловой релаксации K_{12} предполагаются положительными. Мы здесь не останавливаемся на обсуждении общеизвестных фактов, касающихся согласованности включенных в уравнения диссипативных слагаемых, которые обсуждались в [1] при рассмотрении аналогичного примера. Детальное описание всех возможных вариантов учета диссипативных процессов в произвольных системах галилеево-инвариантных уравнений должно быть предметом дальнейших исследований.

Для того чтобы конкретизировать систему совместных законов сохранения (4.8), зададимся уравнением состояния

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, S_1, S_2) = \mathcal{E}^{(1)}(\rho, S_1) + \mathcal{E}^{(2)}(\rho, S_2)$$

и положим

$$q_0 = \mathcal{E}(\rho, S_1, S_2) + \rho\mathcal{E}_\rho(\rho, S_1, S_2) + S_1\mathcal{E}^{(1)}_{S_1}(\rho, S_1) + S_2\mathcal{E}^{(2)}_{S_2}(\rho, S_2) - u_k u_k/2,$$

$$T_1 = \mathcal{E}^{(1)}_{S_1}, \qquad T_2 = \mathcal{E}^{(2)}_{S_2}, \qquad L = \rho^2\mathcal{E}_\rho(\rho, S_1, S_2) + b_k b_k/2.$$

При этом оказывается, что

$$L_{q_0} = \rho, \qquad L_{u_i} = \rho u_i, \qquad L_{T_j} = \rho S_j,$$

$$E = q_0 L_{q_0} + u_k L_{u_k} + T_j L_{T_j} + b_k L_{b_k} - L = \rho(\mathcal{E}(\rho, S_1, S_2) + u_k u_k/2) + b_k b_k/2$$

и равенства (4.8) конкретизируются в виде, известном как уравнения двухтемпературной магнитной гидродинамики (один из вариантов, описывающий бесстолкновительную плазму в определенном диапазоне параметров (см. [9])). Складывая в (4.8) два предпоследних равенства, получим

$$\frac{\partial[\rho(S_1+S_2)]}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\Big[\rho u_k(S_1+S_2)-\frac{K_1}{T_1}\frac{\partial T_1}{\partial x_k}-\frac{K_2}{T_2}\frac{\partial T_2}{\partial x_k}\Big]=$$
$$=\frac{K_1}{T_1^2}\frac{\partial T_1}{\partial x_k}\frac{\partial T_1}{\partial x_k}+\frac{K_2}{T_2^2}\frac{\partial T_2}{\partial x_k}\frac{\partial T_2}{\partial x_k}+K_{12}\frac{(T_2-T_1)^2}{T_2T_1}+\frac{\mu}{T_1}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\geqslant 0.$$

Таким образом, приходим к утверждению, которое можно сформулировать как закон возрастания суммарной энтропии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К., Гордиенко В. М.** Простейшие галилеево-инвариантные и термодинамически согласованные законы сохранения // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 3–16.
2. **Godunov S. K., Romensky E. I.** Thermodynamics, conservation laws and symmetric forms of differential equations in mechanics of continuous media // Computational fluid dynamics review. Chichester; N.Y., etc.: John Wiley and Sons, 1995. P. 19–30.
3. **Годунов С. К., Роменский Е. И.** Элементы механики сплошной среды и законы сохранения. Новосибирск: Науч. кн., 1998. (Унив. сер.).
4. **Romensky E. I.** Hyperbolic systems of thermodynamically compatible conservation laws in continuum mechanics // Math. Comput. Modelling. 1998. V. 28, N 10. P. 115–130.
5. **Гордиенко В. М.** Матричные элементы вещественных представлений групп $O(3)$ и $SO(3)$ // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 1. С. 51–63.
6. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
7. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
8. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
9. **Имшенник В. С., Боброва Н. А.** Динамика столкновительной плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1997.

Поступила в редакцию 28/VI 2001 г.