$\leqslant v \leqslant 2{,}5$ практически не изменяется при 100 Гц $\leqslant f_в \leqslant 2$ кГц (что соответствует диапазону $5{,}91 \leqslant 2\pi f_в L/U \leqslant 118$). Это подтверждает достоверность представленных в [4] и в данной работе результатов и справедливость сделанных на их основе выводов.

Поступила 30 IX 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кузнецов В. Р., Сабельников В. А.** Перемежаемость и распределения вероятностей скорости в турбулентных потоках.— Усп. механики, 1981, т. 4, № 3.
2. **Кузнецов В. Р., Сабельников В. А.** Перемежаемость и распределения вероятностей концентрации в турбулентных потоках.— Усп. механики, 1981, т. 4, № 2.
3. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. Ч. II. М.: Наука, 1967.
4. **Кузнецов В. Р., Расщупкин В. И.** Распределение вероятностей и условное осреднение в турбулентных потоках.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 6.
5. **Бендат Д., Пирсол А.** Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974.
6. **Таунсенд А. А.** Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: ИЛ, 1959.
7. **Hedley T. B., Keffer J. F.** Turbulent/non-turbulent decisions in an intermittent flow.— J. Fluid Mech., 1974, vol. 64, pt 4.
8. **La Rue J. C.** Detection of the turbulent-nonturbulent interface in slightly heated turbulent shear flows.— Phys. Fluids, 1974, vol. 17, N 8.
9. **Тихонов В. И.** Выборы случайных процессов. М.: Наука, 1970.
10. **Freymuth P., Uberoi M. S.** Structure of temperature fluctuations in the turbulent wake behind a heated cylinder.— Phys. Fluids, 1971, vol. 14, N 12.
11. **Kistler A. L., Vrebalovich T.** Grid turbulence of large Reynolds numbers.— J. Fluid Mech., 1966, vol. 26, pt 1.
12. **Бэтчелор Д. К.** Теория однородной турбулентности. М.: ИЛ, 1955.
13. **Thomas R. M.** Conditional sampling and other measurements in a plane turbulent wake.— J. Fluid Mech., 1973, vol. 57, pt 3.
14. **Кузнецов В. Р.** О плотности вероятности скоростей в двух точках однородного изотропного турбулентного потока.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.

УДК 532.526.011.56

ГИПЕРЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА НА ПОВЕРХНОСТИ ЗАТУПЛЕННОГО КОНУСА ПРИ СИЛЬНОМ ВДУВЕ В ОКРЕСТНОСТИ ЗАТУПЛЕНИЯ

Ю. Н. Ермак

(*Москва*)

Введение. Одним из эффективных способов теплозащиты гиперзвукового летательного аппарата является использование сильного вдува. Исследованию проблем газовой динамики, возникающих при этом, посвящен целый ряд работ (например, [1—4]). В этих работах найдены асимптотические решения уравнений Навье — Стокса в окрестности затупления при условии, что $M_\infty \gg 1$, $(\rho_\infty/\rho_1) \ll 1$, $\mathrm{Re}_1 \gg 1$, $(v_w/u_\infty) \gg 1/\sqrt{\mathrm{Re}_1}$, где M_∞ — число Маха набегающего потока, u_∞ — скорость набегающего потока, ρ_∞ — плотность набегающего потока, ρ_1 — плотность газа за ударной волной, Re_1 — число Рейнольдса, рассчитанное по скорости и плотности набегающего потока, радиусу затупления и коэффициенту вязкости при температуре торможения, v_w — скорость вдува на поверхности тела. Кроме того, в [4] представлена классификация режимов течения, возможных при обтекании затупленных тел пространственным гиперзвуковым потоком вязкого газа. Течение газа предполагается ламинарным.

В данной работе исследуется задача о поглощении газа, вдуваемого в окрестности малого затупления, пограничным слоем на боковой поверхности конуса. Рассматривается ламинарное обтекание затупленного конуса гиперзвуковым потоком вязкого газа. В окрестности затупления конуса газ вдувается таким образом, что пограничный слой оттесняется от поверхности и становится слоем смешения, толщина которого много меньше толщины вдуваемого газа. В свою очередь, толщина слоя вдува много меньше толщины ударного слоя, и течение в нем описывается уравнениями невязкого пограничного слоя. Слой вдува остается невязким на некотором расстоянии вниз по потоку и на боковой поверхности конуса, где вдув прекращен. Однако затем этот слой газа поглощается пограничным слоем на поверхности тела и *слоем смешения* на контактной границе с горячим газом за ударной волной.

1. Течение в окрестности затупления. Приведем оценки для течения в окрестности затупления (область O, фиг. 1). Пусть r — радиус затупления; $\theta = O(1)$ — полуугол раскрытия конуса; γ, ρ_1 — показатель адиабаты и плотность за ударной волной; μ_1 — коэффициент вязкости при температуре торможения ; ρ_w, v_w, T_w, γ_w — плотность, скорость, температура и показатель адиабаты вдуваемого газа. Характерная величина давления в ударном слое $p_1 \sim \rho_\infty u_\infty^2$. Характерная величина числа Рейнольдса в ударном слое вблизи контактной границы

$$\mathrm{Re}_1 = \rho_1 u_1 r/\mu_1 = \mathrm{Re}_0/\sqrt{\varepsilon},$$

где $u_1 \sim u_\infty \sqrt{\varepsilon}$; $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$; $\mathrm{Re}_0 = \rho_\infty u_\infty r/\mu_1$. Таким образом, толщина слоя смешения

$$\delta_1 \sim r/\sqrt{\mathrm{Re}_1}.$$

Если использовать уравнение Бернулли и уравнение состояния, можно получить следующие оценки для плотности ρ_w и продольной составляющей скорости u_w в слое вдува:

$$\rho_w/\rho_1 \sim \varepsilon/t\varepsilon_1, \quad u_w \sim u_\infty \sqrt{t\varepsilon_1}, \tag{1.1}$$

где $\varepsilon_1 = (\gamma_w - 1)/(\gamma_w + 1)$; $t = 2Cp_w T_w/u_\infty^2$ — температурный фактор.

Расход газа в ударном слое в окрестности затупления

$$\psi_\infty \sim \pi r^2 \rho_\infty u_\infty.$$

Расход вдуваемого газа

$$\psi_w \sim \pi r^2 \rho_w v_w.$$

Отсюда получаем для безразмерного параметра вдува

$$g = \psi_w/\psi_\infty = (\rho_w v_w)/(\rho_\infty u_\infty).$$

Если использовать уравнение неразрывности и соотношения (1.1), можно получить следующую оценку для толщины слоя вдува:

$$\delta_в \sim rg\sqrt{t\varepsilon_1}.$$

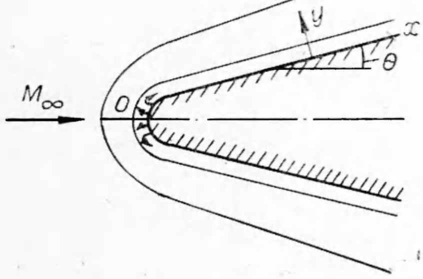
Потребуем, чтобы толщина слоя вдува $\delta_в$ была много меньше толщины ударного слоя $\delta \sim r\varepsilon$:

$$(\delta_в/\delta) \sim g\sqrt{t\varepsilon_1/\varepsilon^2} \ll 1.$$

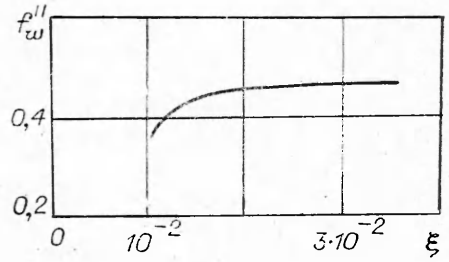
С другой стороны, потребуем, чтобы толщина слоя смешения δ_1 была много меньше толщины слоя вдува:

$$(\delta_1/\delta_в) = 1/(g\sqrt{t\varepsilon_1 \mathrm{Re}_1}) \ll 1. \tag{1.2}$$

Здесь и ниже будем предполагать, что $\varepsilon = O(1)$, $\varepsilon_1 = O(1)$, $t = O(1)$. При выполнении условия (1.2) течение в слое вдува в окрестности затуп-



Фиг. 1



Фиг. 2

ления будет невязким, так как характерное число Рейнольдса в слое вдува

$$\mathrm{Re}_w = \mathrm{Re}_1 \left(\frac{\mu_1}{\mu_u}\right) \Bigg/ \sqrt{t \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}} \sim \mathrm{Re}_1 \tag{1.3}$$

и отношение толщины пограничного слоя δ_w в слое вдува (там, где прекращен вдув) к толщине слоя смешения δ_1:

$$(\delta_w/\delta_1) \sim (t\varepsilon_1/\varepsilon)^{1/4}(\mu_w/\mu_1)^{1/2} = O(1). \tag{1.4}$$

Пусть координата $\bar{x}$ отсчитывается вдоль поверхности затупленного конуса, координата $\bar{y}$ отсчитывается по нормали к поверхности конуса. Введем следующие деформированные координаты и асимптотические разложения для течения в слое вдува в окрестности затупления:

$$\begin{gathered} \bar{x} = rx, \ \bar{y} = rg\sqrt{t\varepsilon_1}y, \\ \bar{u} = u_\infty \sqrt{t\varepsilon_1}\, u + \ldots, \ \bar{v} = u_\infty g t\varepsilon_1 v + \ldots, \\ \bar{p} = \rho_\infty u_\infty^2 p + \ldots, \quad \bar{\rho} = (\rho_\infty/t\varepsilon_1)\rho + \ldots \end{gathered} \tag{1.5}$$

Если соотношения (1.5) подставить в уравнения Навье — Стокса и выполнить предельный переход

$$g \to 0, \ \mathrm{Re}_1 \to \infty, \ \mathrm{M}_\infty \to \infty$$

при условиях (1.2)—(1.4), можно получить следующую систему уравнений невязкого пограничного слоя, описывающую течение в слое вдува:

$$\begin{gathered} \frac{\partial(\rho u b)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v b)}{\partial y} = 0, \\ \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma_w}}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma_w}}\right) = 0, \end{gathered} \tag{1.6}$$

где b — расстояние от оси симметрии конуса до его поверхности.

Граничные условия для этой системы уравнений имеют вид

$$v = v(x, 0), \ \rho = \rho(x, 0), \ u = 0 \tag{1.7}$$

при $0 \leqslant x \leqslant x_1$, $u = v = 0$ при $x > x_1$. Значение функции $p(x)$ следует определить с помощью сращивания с асимптотическими разложениями для зоны смешения и для ударного слоя. Эта операция ничем не отличается от сращивания асимптотических разложений в [4].

Действительно, если использовать вышеприведенные оценки для течения в окрестности затупления (область O), можно ввести следующие деформированные координаты и асимптотические разложения:

$$\begin{gathered} \bar{x} = rx_0, \quad \bar{y} = r\varepsilon y_0 - \delta_в, \\ \bar{u} = u_\infty u_0 + \ldots, \quad \bar{v} = \varepsilon u_\infty v_0 + \ldots, \\ \bar{p} = \rho_\infty u_\infty^2 p_0 + \ldots, \quad \bar{\rho} = \varepsilon^{-1}\rho_\infty \rho_0 + \ldots \end{gathered} \tag{1.8}$$

После подстановки этих выражений в уравнение Навье — Стокса и выполнения предельного перехода $\mathrm{M}_\infty \to \infty$, $\mathrm{Re}_1 \to \infty$, $\varepsilon = O(1)$ получим обычные уравнения Эйлера. Внешние краевые условия для этой системы уравнений — условия Гюгонио на ударной волне, а при $y_0 = 0$ $v_0 = 0$. Решение этой системы уравнений обеспечивает величину $u_0(x_0, y_0 \to 0) \sim \sim \sqrt{\varepsilon}$ и $p_0(x_0, y_0 \to 0) \sim 1$.

На границе между ударным слоем (область O) и слоем вдува располагается слой смешения, толщина которого в соответствии с вышеприведенными оценками δ_1. Для слоя смешения можно ввести следующие деформированные координаты и асимптотические разложения:

$$
(1.9) \qquad \begin{aligned}
&x = r x_S, && \bar{y} = \delta_1 y_S - \delta_{\text{в}},\\
&\bar{u} = u_\infty \sqrt{\varepsilon} u_S + \ldots, && \bar{v} = \delta_1 u_\infty \sqrt{\varepsilon} v_S + \ldots,\\
&\bar{p} = \rho_\infty u_\infty^2 p_S + \ldots, && \bar{\rho} = \varepsilon^{-1} \rho_\infty \rho_S + \ldots,\\
&\bar{H} = (u_\infty^2/2) H_S + \ldots, && \bar{\mu} = \mu_1 \mu_S + \ldots,
\end{aligned}
$$

где $\delta_{\text{в}}$ — толщина слоя вдува.

Если эти выражения подставить в уравнения Навье — Стокса и выполнить предельный переход $M_\infty \to \infty$, $\mathrm{Re}_1 \to \infty$, $g \to 0$, $\varepsilon = O(1)$, $\varepsilon_1 = O(1)$, $t = O(1)$, то можно получить уравнения пограничного слоя для течения в зоне смешения. Краевые условия для этих уравнений найдем путем сращивания асимптотических разложений (1.8), (1.9), получаем $u_S(x_S,\ y_S \to \infty) = u_0(x_0,\ y_0 \to 0)$, $H_S(x_S,\ y_S \to \infty) = H_0(x_0,\ y_0 \to 0)$, $p_S(x_S) = p_0(x_0,\ y_0 \to 0)$. Сращивая асимптотические разложения (1.5), (1.9), найдем внутренние краевые условия $u_S(x_S,\ y_S \to -\infty) = \sqrt{t\varepsilon_1}u(x,\ y \to 0)$, $H_S(x_S,\ y_S \to -\infty) = t$, а величина давления $p(x) = p_0(x_0) = p_S(x_S)$. Весь только что рассмотренный анализ лишь в незначительных деталях отличается от анализа [4] и поэтому носит конспективный характер.

Если считать, что давление $p(x)$ задано, можно записать следующее решение уравнений (1.6):

$$
(1.10) \qquad (p/\rho^{\gamma_w}) = C_1(\psi), \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma_w}{\gamma_w - 1} p^{\frac{\gamma_w - 1}{\gamma_w}} C_1^{\frac{1}{\gamma_w}}(\psi) = C_2(\psi),
$$

где ψ — функция тока. Функции $C_1(\psi)$ и $C_2(\psi)$ можно определить с помощью граничных условий (1.7). Частный вид решения (1.10) будет получен ниже при рассмотрении течения поглощения слоя вдува пограничным слоем на боковой поверхности конуса. Очевидно, что слой вдува останется невязким и на некотором расстоянии вниз по потоку от области вдува. Затем вследствие эффекта растекания и роста толщины пограничного слоя слой вдува будет поглощен вязким течением на боковой поверхности конуса.

2. Поглощение слоя вдува пограничным слоем на боковой поверхности конуса. Пусть длина вдоль образующей конуса, на котором происходит поглощение слоя вдува пограничным слоем, равна $L = Kr$, где $K \gg 1$. Условие того, что газ в слое вдува полностью поглощается пограничным слоем на боковой поверхности конуса, можно записать в виде равенства расходов:

$$
\pi r^2 \rho_w v_w \sim 2\pi K r \sin\theta \rho_w u_w \delta_2,
$$

где δ_2 — толщина пограничного слоя на боковой поверхности конуса. Все оценки для функций течения, полученные в окрестности затупления, остаются справедливыми и на боковой поверхности конуса, так как полуугол раскрытия конуса $\theta = O(1)$. Отсюда следует, что $\delta_2 \sim \delta_w \sqrt{K}$. Таким образом, получаем параметр подобия, характеризующий режим поглощения слоя вдува пограничным слоем:

$$
\Delta_g = \frac{2 \sin\theta K^{3/2}}{g \sqrt{\mathrm{Re}_1 (\mu_1/\mu_w) \sqrt{t\varepsilon/\varepsilon_1}}}.
$$

Этот параметр представляет собой отношение толщины пограничного слоя к толщине слоя вдува на боковой поверхности конуса, когда эти величины одного порядка: $\Delta_g = O(1)$. Отсюда можно получить оценку для характерной длины L, на которой происходит поглощение слоя вдува пограничным слоем и слоем смешения:

$$
(2.1) \qquad L \sim r \left[\frac{g}{2\sin\theta} \sqrt{\mathrm{Re}_1 \left(\frac{\mu_1}{\mu_w}\right) \sqrt{\frac{t\varepsilon}{\varepsilon_1}}} \right]^{2/3}.
$$

На длинах, по порядку величины меньших, чем L в формуле (2.1), но больших по порядку величины, чем r, схема течения остается прежней, как в окрестности затупления. Заметим, что давление на поверхности конуса на этих длинах и на длинах, определяемых формулой (2.1), такое же, как на остром конусе, так как влияние затупления сказывается на невязком обтекании тел вращения лишь на нескольких калибрах затупления [5].

Выберем l такое, что $r \ll l \ll L$, где L определяется формулой (2.1), это означает, что $\Delta_g \to 0$. На этих длинах внешнее невязкое течение за ударной волной соответствует обтеканию острого конуса гиперзвуковым потоком. Оценки для функций течения остаются прежними, а характерная длина l. Таким образом, вид асимптотических разложений здесь такой же, как в области O (соотношения (1.8)), только величина r заменяется на l, число Рейнольдса рассчитывается по длине l. В результате получается система уравнений Эйлера, описывающая течение за ударной волной, где хорошим гиперзвуковым приближением для давления является формула для касательного клина ($p = \sin^2\theta$).

Газ, прошедший через ударную волну в окрестности затупления, составляет на боковой поверхности конуса энтропийный слой, толщина которого $(\delta_3/l) \sim \varepsilon K^{-2}$, $K = l/r$. Толщина слоя газа, вдуваемого в окрестности затупления, на боковой поверхности конуса $(\delta_{\text{в}1}/l) \sim g\sqrt{t\varepsilon_1}K^{-2}$. Таким образом, толщина энтропийного слоя много больше, чем толщина слоя вдува, и поэтому энтропийный слой не будет поглощен слоем смешения. Характерная скорость в энтропийном слое $\sim u_\infty$, плотность $\sim \rho_\infty/\varepsilon$.

Деформированные координаты и асимптотические разложения в энтропийном слое:

$$\bar{x} = lx_3, \qquad \bar{y} = \delta_3 y_3 - \delta_{\text{в}1},$$
$$\bar{u} = u_\infty u_3 + \ldots, \quad \bar{v} = (u_\infty \delta_3) v_3 + \ldots, \tag{2.2}$$
$$\bar{p} = \rho_\infty u_\infty^2 p_3 + \ldots, \quad \bar{\rho} = (\rho_\infty/\varepsilon)\,\rho_3 + \ldots$$

Если эти выражения подставить в уравнения Навье — Стокса, при $M_\infty \to \infty$, $\text{Re}_1 \to \infty$, $\Delta_g \to 0$ можно получить уравнения невязкого пограничного слоя, решение которых имеет функциональный вид (1.10). Начальные условия получим, сращивая асимптотические разложения (2.2) и (1.8), а сращивая давления в ударном слое на остром конусе, получим, что $p_3 = \sin^2\theta$. Величина $\delta_{\text{в}1}$ находится при сращивании с разложениями для слоя вдува.

Толщина слоя смешения и пограничного слоя на стенке, на длинах l имеет порядок $\delta_l \sim \delta_1\sqrt{K}$, $K = l/r$. Асимптотические разложения для слоя вдува имеют вид (1.9) с заменой r на l и δ_1 на δ_l. Давление в слое вдува равно давлению в энтропийном слое, а внутренние краевые условия необходимо найти, сращивая асимптотические разложения для слоя вдува и слоя смешения.

Деформированные координаты и асимптотические разложения для слоя вдува на длинах l имеют вид

$$\bar{x} = lx_{\text{в}1}, \qquad \bar{y} = \delta_{\text{в}1} y_{\text{в}1},$$
$$\bar{u} = u_\infty\sqrt{t\varepsilon_1}\,u_{\text{в}1} + \ldots, \quad \bar{v} = u_\infty\sqrt{t\varepsilon_1}\,\delta_{\text{в}1} v_{\text{в}1} + \ldots, \tag{2.3}$$
$$\bar{p} = \rho_\infty u_\infty^2 p_{\text{в}1} + \ldots, \quad \bar{\rho} = (\rho_\infty/t\varepsilon_1)\,\rho_{\text{в}1} + \ldots$$

После подстановки этих выражений в уравнения Навье — Стокса при $M_\infty \to \infty$, $g \to 0$, $\text{Re}_1 \to \infty$, $(l/r) \to \infty$ получим уравнения невязкого пограничного слоя, вид решения которых описывается соотношением (1.10). Сращивая асимптотические разложения (2.2) и (2.3), получим величину давления в слое вдува. Начальные условия для полученных уравнений можно получить, сращивая асимптотические разложения (1.5) для слоя вдува в окрестности затупления с асимптотическими разложениями (2.3).

Весь этот анализ позволяет прояснить вопрос о начальных данных для уравнений, описывающих течение поглощения слоя вдува на боковой поверхности конуса. Наконец, отметим, что асимптотические разложения (2.2) для энтропийного слоя на боковой поверхности затупленного конуса на длинах l справедливы и на длинах L, определяемых выражением (2.1), так как на этих длинах толщина энтропийного слоя много больше толщины слоя смешения.

Для описания процесса поглощения слоя вдува на боковой поверхности конуса пограничным слоем и слоем смешения введем следующие деформированные координаты и асимптотические разложения:

$$\begin{aligned} &\bar{x} = Lx_2, && \bar{y} = \delta_2 y_2, \\ &\bar{u} = u_\infty \sqrt{t\varepsilon_1}\, u_2 + \ldots, && \bar{v} = u_\infty \sqrt{t\varepsilon_1}\, \delta_2 v_2 + \ldots, \\ &\bar{p} = \rho_\infty u_\infty^2 p_2 + \ldots, && \bar{\rho} = (\rho_\infty / t\varepsilon_1)\, \rho_2 + \ldots, \\ &\bar{H} = (u_\infty^2/2) H_2 + \ldots, && \bar{\mu} = \mu_1 \mu_2 + \ldots \end{aligned} \tag{2.4}$$

Если соотношения (2.4) подставить в уравнения Навье — Стокса и выполнить предельный переход $K \to \infty$, $M_\infty \to \infty$, $\mathrm{Re}_1 \to \infty$, $g \to 0$, $t = O(1)$, $\varepsilon = O(1)$, $\varepsilon_1 = O(1)$, $\Delta_g = O(1)$, можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{\partial (b_2 \rho_2 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (b_2 \rho_2 v_2)}{\partial y_2} = 0, \\ \rho_2 \left(u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right) = -\frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right), \quad \frac{\partial p_2}{\partial y_2} = 0, \\ \rho_2 \left(u_2 \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial H_2}{\partial y_2} \right) = \frac{\partial}{\partial y_2} \left[\frac{\mu_2}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial H_2}{\partial y_2} + t\varepsilon_1 \mu_2 \left(1 - \frac{1}{\mathrm{Pr}} \right) \frac{\partial u_2^2}{\partial y_2} \right], \\ p_2 = p_2(h_2, \rho_2), \quad \mu_2 = \mu_2(h_2), \end{gathered} \tag{2.5}$$

b_2 — расстояние от оси конуса до его поверхности.

Асимптотические разложения (2.4) и уравнения пограничного слоя (2.5) справедливы не только для слоя вдува, но и для зоны смешения, так как ее толщина имеет тот же порядок, что и толщина слоя вдува. Действительно, толщина слоя смешения на боковой поверхности конуса на длине L $\delta_f \sim L/\sqrt{\mathrm{Re}_f}$, где $\mathrm{Re}_f = \mathrm{Re}_1 K$, т. е. $\mathrm{Re}_f \sim \mathrm{Re}_w K$, с другой стороны, так как $t = O(1)$, $\varepsilon = O(1)$, $\varepsilon_1 = O(1)$, то скорости, плотности и энтальпии одного порядка.

Граничные условия на поверхности конуса имеют вид

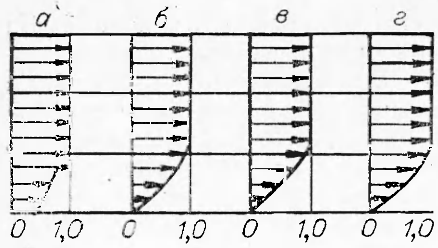
$$y_2 = 0, \; u_2 = v_2 = 0, \; H_2 = t. \tag{2.6}$$

Внешние краевые условия для системы уравнений (2.5) можно получить, если срастить асимптотические разложения (2.4) с решением для невязкого обтекания острого конуса (2.1) (на длинах L):

$$y_2 \to \infty, \; u_2 \to \sqrt{\varepsilon/(t\varepsilon_1)} \cos\theta, \; p_2 = \sin^2\theta, \; H_2 \to 1. \tag{2.7}$$

Наконец, необходимо записать начальные условия для системы уравнений (2.5). Эти начальные условия можно получить, если срастить асимптотические разложения (2.4) с невязким решением для обтекания боковой поверхности конуса невязким слоем вдува (2.3) и невязким внешним потоком за ударной волной (2.2), т. е. с решением на длинах l таких, что $r \ll l \ll L$. В результате получаем

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &u_2(0, y_2) = u(y_2), \\ &H_2(0, y_2) = t, \end{aligned}\right\} \; 0 \leqslant y_2 \leqslant y_{20}, \\ &\left.\begin{aligned} &u_2(0, y_2) = \sqrt{\varepsilon/(t\varepsilon_1)} \cos\theta, \\ &H_2(0, y_2) = 1, \end{aligned}\right\} \; y_2 > y_{20}. \end{aligned} \tag{2.8}$$



Фиг 3.

Таким образом, краевая задача (2.5)—(2.8) отличается от обычной задачи пограничного слоя только неоднородными начальными данными (2.8).

Для примера расчета поглощения слоя вдува пограничным слоем был выбран случай: полуугол раскрытия конуса $\theta = 45°$, $\gamma = 1{,}2$, $\gamma_w = 1{,}4$, температурный фактор $t = 1$, число Прандтля $\Pr = 1$, закон изменения вязкости по энтальпии таков, что $\rho\mu = \mathrm{const}$, константа общая для обоих газов. Для определенности выберем следующий закон вдува в окрестности сферического затупления:

$$\rho(x,\ 0) = 1,\ v(x,\ 0) = 1,\ 0 \leqslant x \leqslant x_{10}, \tag{2.9}$$

где $\varphi_0 = \pi x_{10} = 45°$.

Хорошим приближением для распределения давления на поверхности затупления является формула Ньютона $p(x) = \cos^2 x$. Если воспользоваться этой формулой, граничными условиями (2.9), то решение (1.10) примет вид

$$u(x, \psi) = \sqrt{\frac{2\gamma_w}{\gamma_w - 1}\left[(1+\psi)^2 + (1+\psi)^{2/\gamma_w} p^{\frac{\gamma_w - 1}{\gamma_w}}(x)\right]},$$

где $\psi = \cos x' - 1$ — функция тока.

Пусть на боковой поверхности конуса для давления p_1 справедлива формула касательного клина $p_1 = \sin^2\theta$, тогда профиль скорости в слое вдува на боковой поверхности конуса имеет вид

$$u_1(x_1, \psi_1) = \sqrt{\frac{2\gamma_w}{\gamma_w - 1}\left[(1+\psi_1)^2 + (1+\psi_1)^{2/\gamma_w}(\sin\theta)^{\frac{2(\gamma_w - 1)}{\gamma_w}}\right]}.$$

Если провести преобразование Дородницына — Лиза, краевая задача (2.5)—(2.8) сведется к виду

$$f''' + ff'' = 2\xi(f'f'^{\cdot} - f^{\cdot}f''), \tag{2.10}$$

$$f(0) = f'(0) = 0,\ f'(\infty) = 1,$$

$$f' = u_2/u_l,\ u_l = \sqrt{\frac{\varepsilon}{t\varepsilon_1}}\cos\theta,$$

$$\xi = \int_0^{x_2} \rho_{2w}\mu_{2w}u_l b_2^2 dx_2,\ \eta = \frac{u_l b_2}{\sqrt{2\xi}}\int_0^{y_2}\rho dy_2,\ (\ )' = \frac{\partial}{\partial\eta},\ (\ )^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial\xi}.$$

Для решения краевой задачи (2.10) при начальных условиях (2.8) использовалась методика [6]. Результаты расчетов представлены на фиг. 2,3. На фиг. 2 приведено распределение трения на стенке, а на фиг. 3 — развитие профиля скорости вдоль образующей конуса (*а* — *г* соответствуют $\xi = 0$; 10^{-2}; $1{,}2\cdot 10^{-2}$; $3\cdot 10^{-2}$). В масштабах L поглощение слоя вдува происходит очень быстро. В заключение следует отметить, что в общем случае процесс смешения будет сопровождаться химическими реакциями и, строго говоря, весь проведенный выше анализ справедлив лишь при числе Льюиса $\mathrm{Le} = 1$.

Поступила 13 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Комашенко А. П., Нейланд В. Я.** Гиперзвуковое обтекание сферы при наличии сильного вдува через ее поверхность.— ДАН УССР, 1969, № 12.
2. **Гершбейн Э. А., Тирский Г. А.** Течение вязкого теплопроводного многокомпонентного газа в ударном слое в окрестности притупления при интенсивных вдувах.— В кн.: Научные труды Ин-та механики. № 1. М.: Изд-во МГУ, 1970.
3. **Гершбейн Э. А.** Теория гиперзвукового вязкого ударного слоя при больших числах Рейнольдса и при сильном вдуве инородных газов.— ПММ, 1974, № 6.
4. **Гершбейн Э. А.** Асимптотическое исследование задачи пространственного гиперзвукового обтекания вязким газом затупленных тел с проницаемой поверхностью.— В кн.: Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М.: Изд-во МГУ, 1981.
5. **Черный Г. Г.** Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.
6. **Нейланд В. Я.** О решении уравнений ламинарного пограничного слоя при произвольных начальных условиях.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.

УДК 532.593

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Букреев, А. В. Гусев, И. В. Стурова

(*Новосибирск*)

Выполнено теоретическое и экспериментальное исследование плоских внутренних волн, возникающих на поверхности раздела в двухслойной жидкости при нестационарном поступательном движении погруженного круглого цилиндра. В настоящее время теоретический анализ волнообразования при таком движении плоского тела выполнен лишь для частного случая однородной жидкости [1], а экспериментальные исследования посвящены в основном изучению стационарного движения [2, 3].

В линейной постановке рассмотрим плоскую задачу о волновых течениях, возникающих при движении в верхнем слое двухслойной жидкости диполя, момент которого меняется во времени. Предполагается, что аналогично однородной безграничной жидкости это эквивалентно движению круглого цилиндра радиуса R со скоростью $U(t)$ (момент диполя равен $m(t) = 2\pi R^2 U(t)$ и совпадает с направлением движения цилиндра). Жидкость предполагается невязкой и несжимаемой, состоящей из двух слоев разной плотности: $\rho_1 (0 < y < H_1)$ и $\rho_2 = \rho_1(1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0 (-H_2 < y < 0)$. Ось y направлена вертикально вверх, горизонтальная ось x совпадает с невозмущенной поверхностью раздела. Предполагается, что в момент времени $t = 0$ в верхнем слое жидкости в точке $x = 0$, $y = h$ начинает действовать диполь с переменным моментом $m(t)$ ($m(t) \equiv 0$ при $t \leqslant 0$) и осью, совпадающей с положительным направлением оси x, так что траектория его движения имеет вид $x = c(t)$, $y = h$.

В каждом слое течение предполагается потенциальным и уравнения движения имеют вид

$$\Delta v_n = -\gamma_n m(t) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - c(t)) \frac{\partial}{\partial y} \delta(y - h)$$

с граничными условиями

$$v_1 = 0 \text{ при } y = H_1,$$

$$v_1 = v_2, \left[\rho_n \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^2 \partial y} - g \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \right) \right]_2^1 = 0 \text{ при } y = 0,$$

$$v_2 = 0 \quad \text{при } y = -H_2, \quad v_n \to 0 \quad \text{при } |x| \to \infty$$

и начальными условиями

$$v_n = \partial v_n / \partial t = 0 \quad \text{при } t = 0.$$

Здесь v_n — вертикальная компонента скорости; g — ускорение силы тяжести; $n = 1, 2$ (индекс 1 относится к верхнему слою, индекс 2 — к ниж-