ПМТФ, № 6, 1984

УДК 532.592 + 551.466.81

К ВОПРОСУ О РАЗВИТИИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ИМПУЛЬСНЫМ ИСТОЧНИКОМ В БЕЗГРАНИЧНОЙ РАВНОМЕРНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Н. А. Завольский, А. А. Зайцев

(Горький)

1. В последние годы несколько раз поднимался вопрос о фундаментальной функции оператора внутренних волн (ФФОВВ) в безграничной несжимаемой равномерно стратифицированной жидкости (см., например, [1—4]). Это естественно: его решение представляется первоочередным при построении теории линейных вынужденных внутренних волн (ВВВ). Сейчас о ФФОВВ известно почти все, в частности, найдено представление в виде однократного интеграла по частотам, и получена ее асимптотика для больших значений времени. Имеющаяся информация о поле неустановившихся ВВВ, однако, недостаточно подробна: отсутствуют сведения о границах применимости асимптотических формул и нет полной ясности относительно начального этапа эволюции волнового поля. Пробел можно устранить при помощи численного счета, но это до сих пор не было сделано, и данная работа ставит целью восполнить его. Ее основное содержание — изложение результатов численного счета на ЭВМ интегрального представления для поля неустановившихся ВВВ и сравнение их с расчетом асимптотики этого поля с целью определения ее диапазона действия.

ФФОВВ не имеет непосредственного физического смысла, поэтому главное внимание будет обращено не на эту функцию. С физической точки зрения целесообразней (особенно, если иметь в виду применение к задачам об обтекании объемных тел потоком стратифицированной жидкости) рассмотрение волновой функции сосредоточенного импульсного источника (ФСИИ). Ранее ее, по-видимому, детально не изучали. Наши расчеты относятся именно к случаю действия сосредоточенного импульсного источника в безграничной несжимаемой равномерно стратифицированной жидкости. Поскольку обе функции, ФФОВВ и ФСИИ, тесно связаны друг с другом, из этих расчетов могут быть сделаны соответствующие выводы относительно свойств и поведения фундаментальной функции. Имеются, конечно, и отличия. Ниже они будут указываться наряду со сходством в поведении этих функций.

2. В качестве ФСИИ возьмем вертикальное смещение жидкой частицы, обусловленное ВВВ. Обозначим его $\zeta = \zeta(x, y, z, t)$. Здесь x, y, z — две горизонтальные и одна вертикальная координаты точки наблюдения (ось аппликат направлена вверх); t — время. Начало правой прямоугольной системы координат совмещено с положением импульсного источника, действие которого происходит мгновенно в момент $t = 0$ и вызывает появление ВВВ. Считаем, что несжимаемая жидкость заполняет все пространство и равномерно стратифицирована по вертикали. Частота Вяйсяля в ней постоянна и равна N. Рассмотрение ведется в рамках линейной теории и приближения Буссинеска.

Уравнение динамики ВВВ в данном случае имеет вид

$$(2.1)\qquad \left(\partial_t^2\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right) + N^2\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)\right)\zeta(x, y, z, t) = Q\partial_z\partial_t\delta(x, y, z, t),$$

где Q — полный дебит источника массы; $\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t$ — операторы дифференцирования по переменным x, y, z, t соответственно; $\delta(x, y, z, t)$ — функция Дирака. Величина ζ удовлетворяет условию причинности

$$(2.2)\qquad \zeta = 0 \text{ при } t < 0$$

(в смысле теории обобщенных функций [5]).

Решение задачи (2.1), (2.2) единственно (это легко доказать с помощью теорий преобразований Лапласа и Фурье обобщенных функций [5]; заметим, что это более естественный и легкий путь для доказательства теоремы единственности по сравнению с предложенным в [6, 7]), и ФСИИ выражается через ФФОВВ, которую обозначим $e = e(x, y, z, t)$, в виде $\zeta = Q\partial_z\partial_t e$.

Для ФФОВВ имеет место интегральное представление [2—4]

$$e = -H(t)/2\pi^2R\cdot\int_n^N ((N^2-\omega^2)(\omega^2-n^2))^{-1/2}\sin\omega t d\omega, \tag{2.3}$$

$n = N|z|/R$, $R = (r^2+z^2)^{1/2}$, $r = (x^2+y^2)^{1/2}$, $H(t)$ — функция Хевисайда.

Формальное дифференцирование по z правой части формулы (2.3) приводит к интегралу, расходящемуся в точке $\omega = n$. Он регуляризуется следующим образом. Сначала вычисляется выражение $\left(\partial_t^2+n^2\right)\zeta$, имеющее представление в виде регулярного интеграла, а затем берется его свертка с фундаментальной функцией оператора $\partial_t^2 + n^2$. Это дает

$$\zeta = QH(t)z/2\pi^2R^3\cdot\left[0{,}5\pi\cos nt + \int_n^N \omega(N^2-\omega^2)^{1/2}\times\right.$$
$$\left.\times(\omega^2-n^2)^{-3/2}(\cos nt-\cos\omega t)d\omega\right]. \tag{2.4}$$

Для численного счета функции ζ полезна замена переменного интегрирования

$$\omega = (n^2\cos^2\gamma + N^2\sin^2\gamma)^{1/2},$$

которая приводит к следующему интегральному представлению:

$$\zeta = Qz/2\pi^2R^3\cdot\int_0^{\pi/2}(\cos nt-\cos^2\gamma\cdot\cos\omega t)d\gamma/\sin^2\gamma. \tag{2.5}$$

Нетрудно проверить, что особенность подынтегрального выражения при $\gamma = 0$ является устранимой.

Асимптотика ФФОВВ, определяемая по (2.3) на основе формул [8], имеет вид

$$e \simeq -(2\pi)^{-3/2}R^{-1}(nt)^{-1/2}(N^2-n^2)^{-1/2}(n^{-1}\sin(nt+\pi/4)+$$
$$+N^{-1}\sin(Nt-\pi/4)),\quad nt\to\infty,\quad N-n>\varepsilon>0. \tag{2.6}$$

Асимптотическую формулу для e можно дифференцировать [8]. В результате для вертикальных смещений жидких частиц, обусловленных ВВВ, получается асимптотика

$$\zeta \simeq Q(2\pi)^{-3/2}zR^{-3}n^{-1/2}(t(N^2-n^2))^{1/2}\cdot\sin(nt+\pi/4),\quad nt\to\infty,$$
$$N-n>\varepsilon>0. \tag{2.7}$$

Условие $N - n > \varepsilon > 0$, препятствующее сближению границ интервала интегрирования в формуле (2.3), делает неприменимыми формулы (2.6) и (2.7) в малом вертикальном двуполостном конусе с вершиной в точке действия источника. На вертикальной оси интеграл (2.5) вычисляется непосредственно, и результат имеет вид

$$\zeta = Q\,\mathrm{sign}\,z\cdot\cos Nt/4\pi|z|^2,\quad t>0. \tag{2.8}$$

3. Интегральные представления для ФСИИ и ФФОВВ — это разложения по гармоникам с конечным и одинаковым для обеих функций частотным диапазоном, нижней границей которого служит местная частота $n > 0$, а в верхней — частота Вяйсяля. Распределение по частотам этих функций имеет следующее качественное различие: спектральная плот-

ность ФСИИ обращается в нуль на верхней границе частотного диапазона, а спектральная плотность ФФОВВ там бесконечна. Обе плотности растут до бесконечности в окрестности нижней границы интервала интегрирования, но первая растет существенно быстрей. Это предопределяет разницу в поведении обеих функций в пространстве и во времени при сохранении сходства ряда основных черт картины волнового поля.

Поле ФФОВВ в начальный момент является нулевым, затем нарастает и далее асимптотически распадается в сумму двух волн, одна из которых распространяется, а вторая совершает стоячие колебания с частотой Вяйсяля. После того как эти волны сформировались, их амплитуды с ростом времени начинают убывать пропорционально $t^{-1/2}$.

Поле неустановившихся ВВВ, генерируемых источником, эволюционирует следующим образом. В момент действия источника возмущение от него сразу же передается во все точки жидкой среды вследствие ее несжимаемости. Частицы жидкости покидают исходные положения и мгновенно смещаются в новые места. Величина вертикального смещения жидкой частицы в начальный момент времени определяется равенством

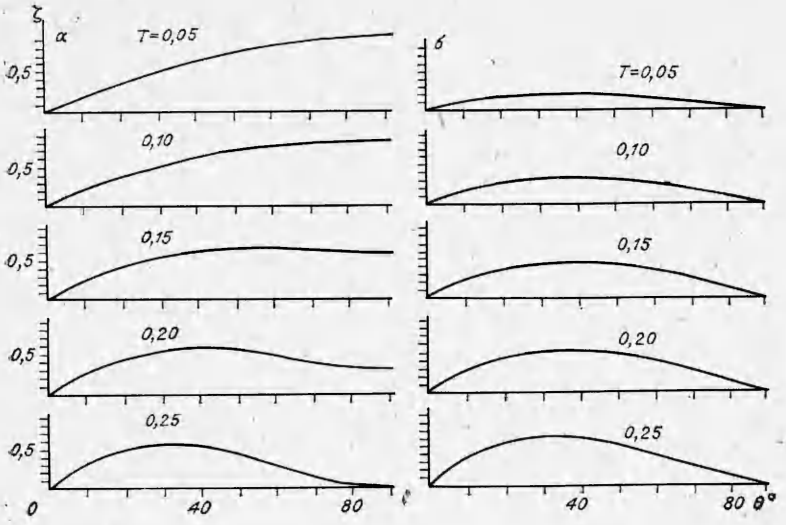
$$\zeta|_{t=0} = Qz/4\pi R^3.$$

В результате водная среда приобретает потенциальную энергию, которая тут же начинает трансформироваться в кинетическую энергию ВВВ. В отличие от ФФОВВ расщепления поля неустановившихся волн, генерируемых сосредоточенным источником, с течением времени не происходит. Стоячих волн, колеблющихся во всех точках жидкости с частотой Вяйсяля, в данном случае нет. Исключение составляют точки вертикальной оси, проходящей через источник. В них значение вертикального смещения определяется формулой (2.8). В остальных точках жидкости формируется лишь поле распространяющихся волн, амплитуда которых со временем не убывает, но растет пропорционально $t^{1/2}$.

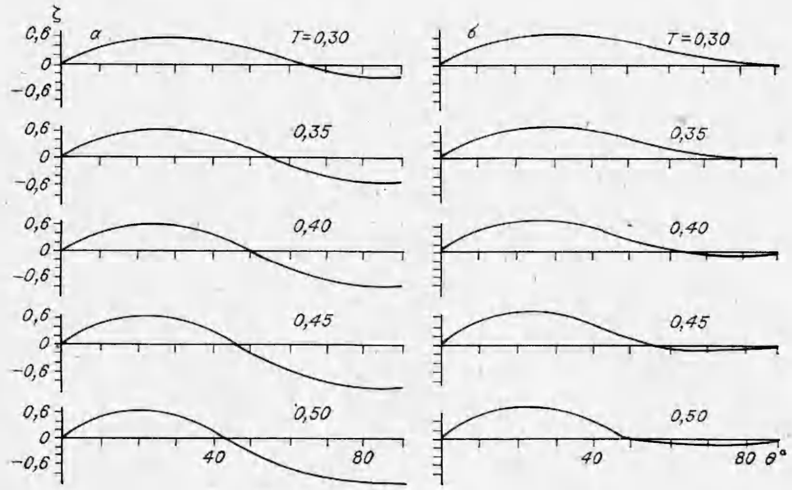
Факт нарастания со временем ВВВ, генерируемых импульсным источником, в литературе, по-видимому, ранее не обсуждался. Его, однако, следует иметь в виду, особенно при рассмотрении проблемы определения поля стационарных ВВВ, которые возникают в потоке стратифицированной жидкости, обтекающем объемное тело. Часто это поле стремятся определить путем стационирования решения неустановившейся задачи об обтекании системы источников и стоков, но оно, как видим, не стационируется. Возможно, выход будет найден в замене сингулярных источников и стоков распределенными, но такие задачи существенно труднее для решения и не рассматриваются.

Поверхности постоянной фазы ВВВ имеют вид вертикальных конусов с вершиной в точке действия источника. Амплитуда волны в вертикальных смещениях частиц уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния до источника. Поле ВВВ удобно изучать, рассматривая его проекцию на сферу единичного радиуса с центром в точке действия источника. Конусные поверхности постоянной фазы неустановившихся волн пересекаются с этой сферой по кругам широты. Вдоль каждой широты изменений в волне нет, т. е. волновое поле есть функция лишь одной координаты. Этот способ рассмотрения волнового поля был предложен в [9] при изучении родственной задачи о вынужденных инерционных колебаниях в безграничной однородной жидкости, которая равномерно вращается относительно вертикальной оси.

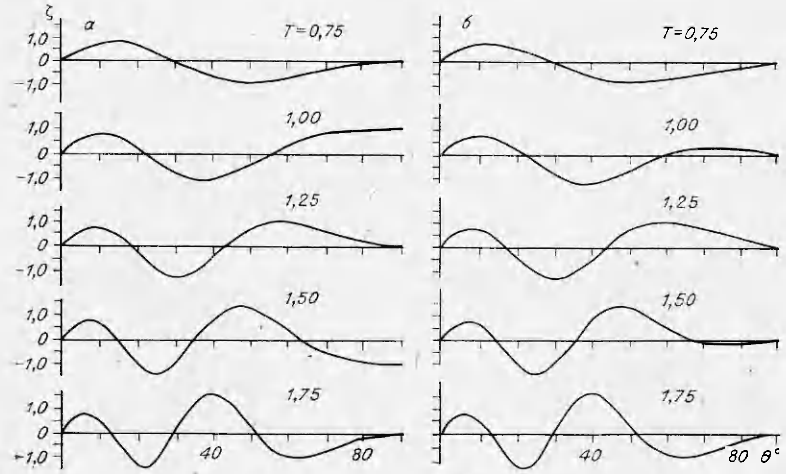
4. Для численного счета на ЭВМ интегрального представления (2.5) и его асимптотики было принято $R = 1$, $Q = 4\pi$ (такая нормировка дает значение 1 для амплитуды стоячих колебаний на полюсах единичной сферы) и сделана замена $z = \cos\theta$, $r = \sin\theta$, θ — широта точки наблюдения на единичной сфере. Результаты численного счета выводились на цифропечать и графопостроитель. Они отображены на фиг. 1—6 в виде разверток вдоль четверки меридиана. Естественной единицей времени служит период Вяйсяля $T = 2\pi/N$.



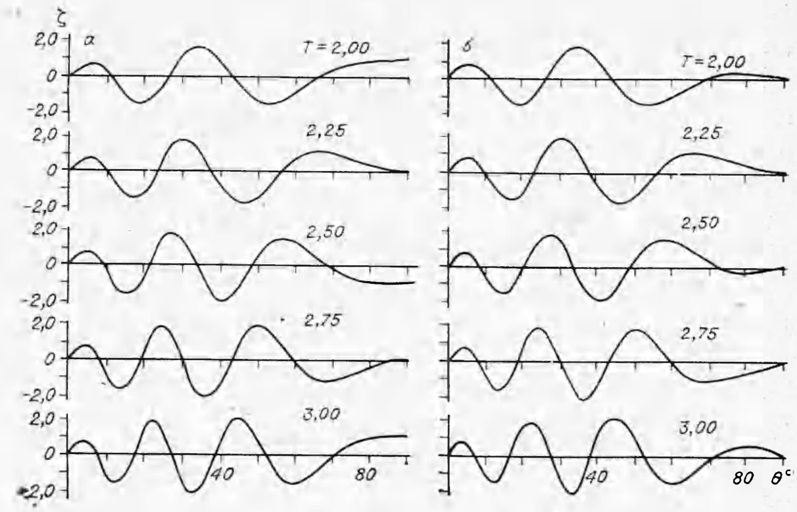
Фиг. 1



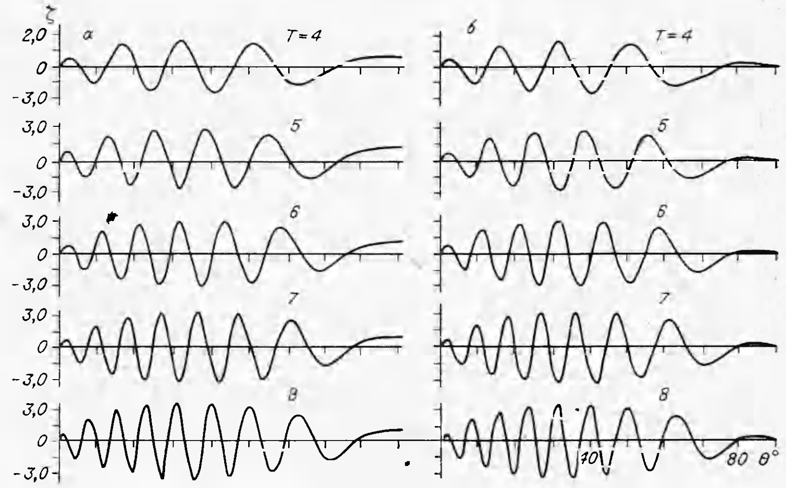
Фиг. 2



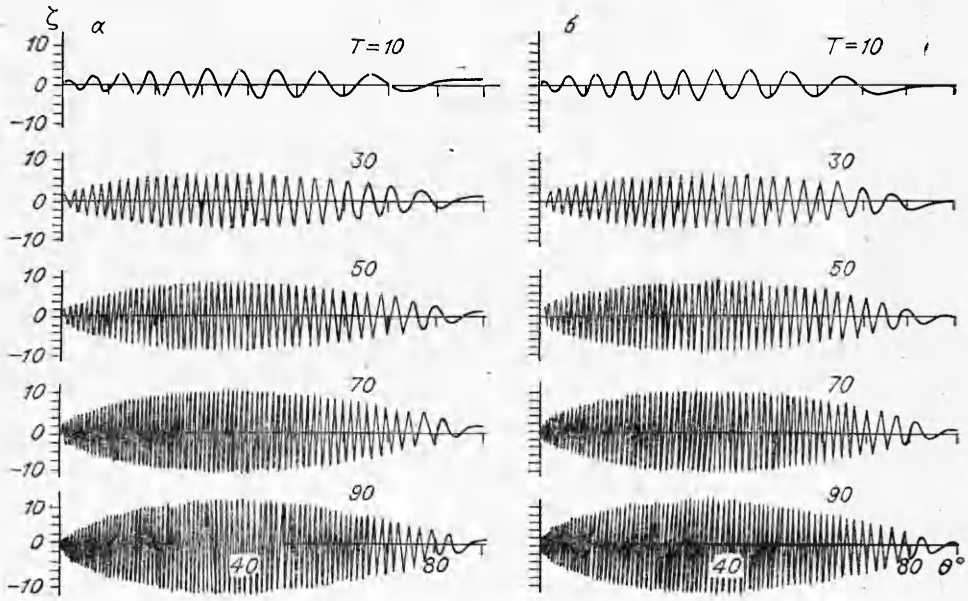
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Результаты численного счета показывают, что поле ВВВ на единичной сфере эволюционирует следующим образом. На полюсах сферы (и только на них) совершаются стоячие колебания с частотой Вяйсяля. В тот момент, когда там уровень волны становится максимальным, от полюса происходит отделение очередного гребня волны. Через $T/2$ колебание на полюсе достигает нижнего положения, и в этот момент от него отделяется новая подошва волны. Отделившаяся волна сначала быстро, а затем с замедлением движется к экватору. Фиг. 1, *а* показывает эволюцию ВВВ на начальном этапе длительностью $0{,}25T$. Видно, что уже за первые $0{,}15T$ моментов времени первый гребень волны прошел половину пути от полюса к экватору единичной сферы. За промежуток $0{,}25T$, отсчитываемый от начала возникновения волнового режима, этим гребнем пройдено почти 2/3 пути до экватора. Затем движение волны резко замедляется. Волна укорачивается, а ее амплитуда нарастает. Фиг. 2, *а* показывает, что за последующие 1/4 периода Вяйсяля волна прошла лишь чуть больше 0,1 общего пути. В дальнейшем (см. фиг. 3—6, *а*) движение волны затормаживается еще быстрей. На фиг. 3, *а* изображено изменение волнового поля за последующие 1/4 периода Вяйсяля. Видны процессы формирования второго гребня волны при $t = T$ и ее второй подошвы при $t = 1{,}5T$. Далее (см. фиг. 4—6, *а*) новые гребни и впадины ВВВ появляются через один и тот же промежуток времени, равный периоду Вяйсяля. Таким образом, с течением времени число появившихся волн на полусфере равно числу периодов Вяйсяля, прошедших от начала колебательного движения.

Результаты расчетов поля ВВВ, выполненные по асимптотической формуле (2.7), представлены на фиг. 1—6, *б*. Непосредственно видно, что в области $20° \lessdot \theta \lessdot 45°$ хорошее качественное и удовлетворительное количественное соответствие точного представления поля ВВВ и его асимптотики имеет место уже для времен порядка четверти периода Вяйсяля. В дальнейшем диапазон действия асимптотической формулы расширяется преимущественно в направлении к экватору единичной сферы (вслед за первым гребнем волны). Уже для $t = T$ эта формула с высокой точностью (порядка 5% или меньше) действует в зоне $0 \lessdot \theta \lessdot 50°$. Формула (2.7) практически правильно указывает положения максимумов, минимумов и нулей волны, за исключением нуля, лежащего правее широты $\theta = 50°$. При $t = 2T$ область действия асимптотики расширяется вправо до широты $\theta = 60°$. При $t = 5T$ верхняя граница этой области доходит до $\theta = 70°$. Дальнейшее смещение величины $\theta_м$ (верхняя граница диапазона действия асимптотической формулы) идет с замедлением: при $t = 10T$ $\theta_м = 77°$, при $t = 30T$ $\theta_м = 82°$, при $t = 50T$ $\theta_м = 84°$, при $t = 70T$ $\theta_м = 85°$ и т. д.

Таким образом, асимптотические формулы для ФФОВВ и ФСИИ удовлетворительно описывают поведение волнового поля даже на начальном этапе его эволюции, за исключением области вблизи полюса единичной сферы. На самих полюсах сферы волновое поле устроено еще проще, как показывает формула (2.8). Сделанные выводы без затруднений переносятся также на случай вращающейся равномерно стратифицированной жидкости. ФФОВВ для этого случая получена в [3, 4].

Авторы выражают благодарность В. А. Боровикову и Э. В. Теодоровичу за интересные беседы, связанные с тематикой данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Миропольский Ю. З.** Автомодельные решения задачи Коши для внутренних волн в неограниченной жидкости.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1978, т. 14, № 9.
2. **Секерж-Зенькович С. Я.** Фундаментальное решение оператора внутренних волн.— ДАН СССР, 1979, т. 246, № 2.

3. **Теодорович Э. В., Городцов В. А.** О некоторых сингулярных решениях уравнения внутренних волн.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1980, т. 16, № 7.
4. **Городцов В. А., Теодорович Э. В.** Черенковское излучение внутренних волн равно мерно движущимися источниками. Препринт № 183. М.: Ин-т пробл. мех. АН СССР, 1981.
5. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
6. **Секерж-Зенькович С. Я.** Теорема единственности и явное представление решения задачи Коши для уравнения внутренних волн.— ДАН СССР, 1971, т. 256, № 2.
7. **Секерж-Зенькович С. Я.** Задача Коши для уравнения внутренних волн.— ПММ, 1982, т. 46, № 6.
8. **Коисон Э. Т.** Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966.
9. **Соболев С. Л.** Об одной новой задаче математической физики.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1954, т. 18, № 1.

Поступила 24/VII 1983 г.