ЛИТЕРАТУРА

1. Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потапов В. Д. Устойчивость стержней из неоднородно стареющего вязкоупругого материала // Изв. АН СССР. МТТ.— 1984.— № 2.
2. Дроздов А. Д., Колмановский В. Б. Об устойчивости конструкций из вязкоупругого материала // Механика деформируемых тел и конструкций.— Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1985.
3. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Колмановский В. Б. Устойчивость вязкоупругих тел и элементов конструкций // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела/ВИНИТИ.— 1987.— Т. 19.
4. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем.— М.: Наука, 1979.
5. Потапов В. Д. Устойчивость вязкоупругих конструкций при действии стационарных случайных сжимающих нагрузок // Изв. АН СССР. МТТ.— 1984.— № 3.
6. Потапов В. Д. Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций.— М.: Стройиздат, 1985.
7. Потапов В. Д. Об устойчивости стержней при стохастическом возбуждении // ПММ.— 1989.— Т. 53, вып. 6.
8. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел.— М.: Наука, 1983.
9. Dafermos C. M. An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity // J. Diff. Equations.— 1970.— V. 7, N 3.
10. Dafermos C. M. Asymptotic stability in viscoelasticity // Arch. Rat. Mech. Anal.— 1970.— V. 37, N 3.
11. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем.— М.: Физматгиз, 1963.
12. Гихман И. И. О первой начально-краевой задаче для стохастического гиперболического уравнения // Теория случайных процессов.— 1980.— № 8.
13. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики.— М.: Наука, 1973.
14. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1987.
15. Коллатц Л. Задачи на собственные значения.— М.: Наука, 1968.

г. Москва *Поступила 24/IV 1990 г.*

УДК 539.3

В. В. Кузнецов

К ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК, ОСНОВАННОЙ НА ИНВАРИАНТАХ

Рассмотрена точная теория конечных деформаций трехмерного тела, подчиненного гипотезе сохранения нормального элемента к базовой (срединной) поверхности. В качестве мер физических деформаций использованы первый и второй инварианты тензора деформаций Грина поверхности, параллельной базовой. Показано, что по инвариантам физических деформаций можно определить любую инвариантную характеристику упругого тела: энергию, инварианты тензора напряжений, интенсивность напряжений и т. д. Дано общее определение инвариантов деформаций произвольной поверхности как составляющих относительного изменения квадрата элемента площади. Проведено упрощение инвариантов при малых деформациях и любых искривлениях тонких оболочек. Получены выражения для изменения коэффициентов первой и второй квадратичных форм срединной поверхности для малых деформаций, произвольных и малых перемещений.

1. Геометрия трехмерного тела. Примем, что $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки трехмерного тела в недеформированном состоянии, который выражается через радиус-вектор базовой поверхности $\mathbf{r}$ и единичный орт нормали к поверхности $\mathbf{n}$ в виде $\mathbf{R} = \mathbf{r} + z\mathbf{n}$. В общем случае $\mathbf{r}$ будем считать зависящим от произвольных криволинейных координат α_i. Коэффициенты первой квадратичной формы базовой поверхности $a_{ij} = \mathbf{r}_{,i}\mathbf{r}_{,j}$, а поверхности $z = \mathrm{const}$ $A_{ij} = \mathbf{R}_{,i}\mathbf{R}_{,j}$. Здесь и далее $i,j = 1, 2$; индексы после запятой означают дифференцирование по α_i. Вектор нормали к поверхности $z = \mathrm{const}$ совпадает с вектором нормали к базовой: $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_{,1}\times\times\mathbf{r}_{,2})\, d_{aa}^{-1/2}$. Для дальнейшего удобно принять следующее определение величины $d_{\beta\gamma}$, зависящее от коэффициентов двух любых квадратичных форм β_{ij}, $\gamma_{ij}(d_{\beta\gamma} \neq d_{\gamma\beta})$:

$$d_{\beta\gamma} = \det\begin{Vmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{Vmatrix} - \beta_{11}\gamma_{22} - \beta_{12}\gamma_{21}.$$

Тогда $d_{aa} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ — дискриминант квадратичной формы $a_{ij}d\alpha_i d\alpha_j$. Квадрат элемента площади dF^2 поверхности $z = \text{const}$ имеет вид $dF^2 = d_{AA}\,d\alpha_1^2\,d\alpha_2^2$. Положим, что деформирование трехмерного тела следует гипотезе сохранения нормального элемента к базовой поверхности [1]. В деформированном состоянии $\mathbf{R}^\vee = \mathbf{r}^\vee + z\mathbf{n}^\vee$, $a_{ij}^\vee = \mathbf{r}_{,i}^\vee \mathbf{r}_{,j}^\vee$, $A_{ij}^\vee = \mathbf{R}_{,i}^\vee \cdot \mathbf{R}_{,j}^\vee$, $\mathbf{n}^\vee = (\mathbf{r}_{,1}^\vee \times \mathbf{r}_{,2}^\vee)\, d_{aa}^{\vee -1/2}$, $dF^{\vee 2} = d_{AA}^\vee d\alpha_1^2\, d\alpha_2^2$. Здесь для $d_{\beta\beta}$, где $\beta_{ij} = \gamma_{ij}^\vee$, принято обозначение $d_{\gamma\gamma}^\vee$.

2. Определение инвариантов физических деформаций. Рассмотрим поверхность $z = \text{const}$ в деформированном состоянии. Полагая $A_{ij}^\vee = A_{ij} + 2E_{ij}$ и составляя отношение $dF^{\vee 2}/dF^2$, получаем

$$dF^{\vee 2}/dF^2 = 1 + 2I_E + 4I_{EE}; \tag{2.1}$$

$$I_E = (d_{AE} + d_{EA})/d_{AA}; \tag{2.2}$$

$$I_{EE} = d_{EE}/d_{AA}; \tag{2.3}$$

$$E_{ij} = (1/2)\left(\mathbf{R}_{,i}^\vee \mathbf{R}_{,j}^\vee - \mathbf{R}_{,i}\mathbf{R}_{,j}\right). \tag{2.4}$$

Выясним смысл I_E, I_{EE}. Если принять в качестве криволинейных координат α_i декартовы координаты x_i на касательной плоскости в точке O поверхности $z = \text{const}$, то в этой точке $A_{ij} = \delta_{ij}$, $A_{ij}^\vee = \delta_{ij} + 2E_{ij}^*$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Здесь под E_{ij}^* понимается выражение (2.4), вычисленное в точке O в системе координат x_i, E_{ij}^* — компоненты физических деформаций Грина. Эти меры деформаций являются физическими в том смысле, что через них можно выразить действительные удлинения и сдвиги без привлечения метрики поверхности. Так, удлинение элемента dx_1 [2, 3] равно $\left[(1 + 2E_{11}^*)^{1/2} - 1\right]$. Для малых деформаций E_{ij}^* — действительные удлинения и сдвиги. Выражения (2.2), (2.3) в системе координат x_i принимают вид

$$I_\text{E} = E_{11}^* + E_{22}^*, I_\text{EE} = E_{11}^* E_{22}^* - E_{12}^{*2}.$$

Согласно определению в теории упругости [2, 4], I_E, I_{EE} — первый и второй инварианты тензора деформаций (остальные три компоненты тензора деформаций трехмерного тела $E_{13}^*, E_{23}^*, E_{33}^*$ нулевые в связи с принятой гипотезой деформирования в п. 1). Как показывается в теории упругости, при аффинной деформации отношение площадей $dF^\vee/dF$ элементарных фигур, построенных на векторах $\mathbf{R}_{,1}d\alpha_1$, $\mathbf{R}_{,2}d\alpha_2$, не зависит от формы и размеров фигуры и является характеристикой физической деформации в точке. В силу (2.1)

$$dF^\vee/dF = (1 + 2I_E + 4I_{EE})^{1/2}. \tag{2.5}$$

Таким образом, I_E, I_{EE} связаны с относительным изменением площади элементарной фигуры. Известно приближенное равенство $dF^\vee/dF \simeq 1 + I_E$, которое получается из (2.5) при малых деформациях. В случае произвольной системы координат α_i выражения E_{ij} (2.4) не будут физическими деформациями. Формулы (2.2), (2.3) позволяют вычислить инварианты физических деформаций, не переходя к вычислению отдельных компонент E_{ij}^*. Способы записи E_{ij}^* через E_{ij} изучаются в тензорном анализе [1, 2] *. В дальнейшем будем рассматривать определения только для инвариантных величин.

3. Соотношения упругости и энергии. Упругие свойства изотропного тела можно представить соотношениями между инвариантами физических напряжений и деформаций, а также выражением для плотности энергии

---

* Заметим, что соотношение между E_{ij}^* и E_{ij} неоднозначно до тех пор, пока не будет указана ориентация физических векторов $\mathbf{e}_i$ ($\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$) относительно базисных $\mathbf{R}_{,i}$, что может порождать различное определение компонент E_{ij}^*.

Π_V в единице объема V упругого тела. Если предположить, как в классической теории оболочек, что на любой поверхности $z = \text{const}$ отсутствуют напряжения σ^*_{33}, нормальные к поверхности, то напряженное состояние в точке определяется двумя инвариантами физических напряжений:

$$I_\sigma = \sigma^*_{11} + \sigma^*_{22}, \; I_{\sigma\sigma} = \sigma^*_{11}\sigma^*_{22} - \sigma^{*2}_{12}$$

(σ^*_{ij} — компоненты физических напряжений в системе координат $\alpha_i = x_i$). В случае линейно-упругого тела имеют место следующие выражения (с учетом $\sigma^*_{33} = 0$):

$$I_\sigma = 2(\lambda + \mu) I_E, \quad I_{\sigma\sigma} = \lambda(\lambda + 2\mu) I_E^2 + 4\mu^2 I_{EE},$$

$$\Pi_V = (1/2)\left[(\lambda + 2\mu) I_E^2 - 4\mu I_{EE}\right].$$

Здесь λ, μ — постоянные Ламе для плоского напряженного состояния, связанные с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν равенствами $\lambda = \nu E/(1 - \nu^2)$, $2\mu = E/(1 + \nu)$. В качестве характеристик напряженного состояния могут быть взяты и другие инвариантные величины, например используемая в теориях прочности интенсивность напряжений σ (эквивалентное напряжение):

$$\sigma = \left(I_\sigma^2 - 3I_{\sigma\sigma}\right)^{1/2}.$$

Полная энергия упругого тела Π записывается как интеграл по объему от плотности энергии *

$$\Pi = \int\limits_V \Pi_V \, dV, \quad dV = d_{AA}^{1/2} \, dz \, d\alpha_1 \, d\alpha_2.$$

Уравнения равновесия получаются из энергетических принципов, использующих вариацию энергии $\delta\Pi$. Главные значения напряжений σ^*_1, σ^*_2 легко находятся по инвариантам как корни квадратного уравнения $\sigma^{*2} - I_\sigma \sigma^* + I_{\sigma\sigma} = 0$. Приведенные соотношения показывают, что основные задачи механики деформируемого тела можно сформулировать в инвариантах.

4. Точные соотношения. Согласно (2.2), (2.3), I_E, I_{EE} в произвольной точке определяются значениями A_{ij}, E_{ij}, которые выражаются через характеристики базовой поверхности. Соответствующие соотношения имеют вид

(4.1) $$A_{ij} = a_{ij} + 2zb_{ij} + z^2 c_{ij};$$

(4.2) $$E_{ij} = \varepsilon_{ij} + z\varkappa_{ij} + (1/2) z^2 \nu_{ij};$$

(4.3) $$b_{ij} = -\mathbf{n}\mathbf{r}_{,ij}, \; c_{ij} = \mathbf{n}_{,i}\mathbf{n}_{,j};$$

(4.4) $$\overset{\vee}{b}_{ij} = -\overset{\vee}{\mathbf{n}}\overset{\vee}{\mathbf{r}}_{,ij}, \; \overset{\vee}{c}_{ij} = \overset{\vee}{\mathbf{n}}_{,i}\overset{\vee}{\mathbf{n}}_{,j};$$

(4.5) $$\varepsilon_{ij} = (1/2)\left(\overset{\vee}{a}_{ij} - a_{ij}\right), \; \varkappa_{ij} = \overset{\vee}{b}_{ij} - b_{ij}, \; \nu_{ij} = \overset{\vee}{c}_{ij} - c_{ij}.$$

Здесь $-b_{ij}\,(-\overset{\vee}{b}_{ij})$, $c_{ij}\,(\overset{\vee}{c}_{ij})$ — коэффициенты второй и третьей квадратичных форм ** недеформированной (деформированной) базовой поверхности; $\varkappa_{ij}$, ν_{ij} — изменения коэффициентов второй и третьей квадратичных форм базовой поверхности при деформировании. Формулы (4.1)—(4.5) позволяют найти I_E, I_{EE} через радиус-вектор базовой поверхности $\overset{\vee}{\mathbf{r}}$ в деформированном состоянии. Эти выражения совместно с (2.1)—(2.4) справедливы при произвольных деформациях и перемещениях и являются точными для трехмерного тела, подчиненного гипотезе сохранения нормального элемента к базовой поверхности.

* Представление энергии трехмерного упругого тела через канонический тензор и его инварианты дано в [5].

** Коэффициенты третьей квадратичной формы выражаются через коэффициенты первых двух форм [6].

5. Приближенные соотношения для I_E, I_{EE}, Π_F, Π. Из формул (2.2), (2.3), (4.1), (4.2) можно получить приближенные соотношения для тонких оболочек, в которых за базовую поверхность принимается срединная. Приведем один простейший вариант, основанный на допущениях технической теории тонких оболочек при малых деформациях срединной поверхности $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$. Пренебрегая изменением A_{ij} на параллельной поверхности и членами порядка z^2 в (4.2), имеем $A_{ij} \simeq a_{ij}$, $E_{ij} \simeq \varepsilon_{ij} + z\varkappa_{ij}$. Определяя I_E, I_{EE} по (2.2), (2.3) без дополнительных допущений, получаем

$$I_E = I_\varepsilon + zI_\varkappa,\ I_{EE} = I_{\varepsilon\varepsilon} + zI_{\varepsilon\varkappa} + z^2 I_{\varkappa\varkappa}, \tag{5.1}$$
$$I_\varepsilon = (d_{a\varepsilon} + d_{\varepsilon a})/d_{aa},\ I_{\varepsilon\varepsilon} = d_{\varepsilon\varepsilon}/d_{aa},$$
$$I_\varkappa = (d_{a\varkappa} + d_{\varkappa a})/d_{aa},\ I_{\varkappa\varkappa} = d_{\varkappa\varkappa}/d_{aa},$$
$$I_{\varepsilon\varkappa} = I_{\varkappa\varepsilon} = (d_{\varepsilon\varkappa} + d_{\varkappa\varepsilon})/d_{aa},$$

где I_ε, $I_{\varepsilon\varepsilon}$ ($I_\varkappa$, $I_{\varkappa\varkappa}$) — первый и второй инварианты тензора деформаций (искривлений) срединной поверхности. Явные выражения через ε_{ij}, $\varkappa_{ij}$ имеют вид

$$I_\varepsilon = d_{aa}^{-1}(a_{22}\varepsilon_{11} + a_{11}\varepsilon_{22} - 2a_{12}\varepsilon_{12}),$$
$$I_{\varepsilon\varepsilon} = d_{aa}^{-1}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2),$$
$$I_\varkappa = d_{aa}^{-1}(a_{22}\varkappa_{11} + a_{11}\varkappa_{22} - 2a_{12}\varkappa_{12}),$$
$$I_{\varkappa\varkappa} = d_{aa}^{-1}(\varkappa_{11}\varkappa_{22} - \varkappa_{12}^2),$$
$$I_{\varepsilon\varkappa} = d_{aa}^{-1}(\varkappa_{22}\varepsilon_{11} + \varkappa_{11}\varepsilon_{22} - 2\varkappa_{12}\varepsilon_{12}).$$

Для плотности энергии Π_F на единицу площади F срединной поверхности и полной энергии Π находим

$$\Pi_F = \Pi_{F\varepsilon} + \Pi_{F\varkappa},\ c_h = h^3/12,\ \Pi_{F\varepsilon} = (1/2)\,h\left[(\lambda + 2\mu)\,I_\varepsilon^2 - 4\mu I_{\varepsilon\varepsilon}\right],$$
$$\Pi_{F\varkappa} = (1/2)\,c_h\left[(\lambda + 2\mu)\,I_\varkappa^2 - 4\mu I_{\varkappa\varkappa}\right],$$
$$\Pi = \int\limits_F \Pi_F\,dF,\quad dF = d_{aa}^{1/2}\,d\alpha_1\,d\alpha_2$$

(h — толщина оболочки).

Аналогично определяются инварианты тензоров физических усилий I_T, I_{TT} и моментов I_M, I_{MM}, а также интенсивность усилий T и моментов M:

$$I_T = 2h(\lambda + \mu)\,I_\varepsilon,\ I_{TT} = h^2\left[\lambda(\lambda + 2\mu)\,I_\varepsilon^2 + 4\mu^2 I_{\varepsilon\varepsilon}\right],$$
$$I_M = 2c_h(\lambda + \mu)\,I_\varkappa,$$
$$I_{MM} = c_h^2\left[\lambda(\lambda + 2\mu)\,I_\varkappa^2 + 4\mu^2 I_{\varkappa\varkappa}\right],$$
$$T = (I_T - 3I_{TT})^{1/2},\ M = (I_M^2 - 3I_{MM})^{1/2}.$$

Главные значения усилий и моментов находятся как корни квадратных уравнений

$$T^{*2} - I_T T^* + I_{TT} = 0,\ M^{*2} - I_M M^* + I_{MM} = 0.$$

В случае обращения в нуль одного из главных значений усилий $T_2^* = 0$ и моментов $M_2^* = 0$ (например, при цилиндрическом изгибе) $T = |T_1^*|$, $M = |M_1^*|$. При изгибании без деформаций срединной поверхности $\overset{\vee}{d}_{aa} = d_{aa}$ гауссова кривизна срединной поверхности, являющаяся вторым инвариантом I_{bb} тензора кривизны, остается неизменной:

$$I_{bb} = \overset{\vee}{d}_{bb}/\overset{\vee}{d}_{aa} = d_{bb}/d_{aa}.$$

Тогда $I_{\varkappa\varkappa}$ (5.1) принимает вид $I_{\varkappa\varkappa} = -I_{b\varkappa} = -(d_{\varkappa b} + d_{b\varkappa})/d_{aa}$, т. е. $I_{\varkappa\varkappa}$, так же как и $I_\varkappa$,— линейный относительно $\varkappa_{ij}$ инвариант. Полученные в п. 5 соотношения для инвариантов тонких оболочек справедливы при малых деформациях срединной поверхности и любых искривлениях.

6. Приближенные соотношения для $\mathbf{n}^V$, $\mathbf{v}$, ε_{ij}, $\varkappa_{ij}$. При малых деформациях и произвольных перемещениях ε_{ij}, $\varkappa_{ij}$ должны вычисляться по точным формулам (4.5). Упрощение можно провести только для вектора нормали $\mathbf{n}^V$ с учетом $d^V_{aa} \simeq d_{aa}$ (это равенство точно для нерастяжимой срединной поверхности, в общем случае $d^V_{aa} = d_{aa}(1 + 2I_\varepsilon + 4I_{\varepsilon\varepsilon})$):

$$(6.1)\quad \mathbf{n}^V \simeq (\mathbf{r}^V_{,1}\times\mathbf{r}^V_{,2})\, d_{aa}^{-1/2},\ \varepsilon_{ij} = (1/2)\,(\mathbf{r}^V_{,i}\mathbf{r}^V_{,j} - \mathbf{r}_{,i}\mathbf{r}_{,j}),\ \varkappa_{ij} = -\,(\mathbf{n}^V\mathbf{r}^V_{,ij} - \mathbf{n}\mathbf{r}_{,ij}).$$

Как следует из (6.1), при любых перемещениях твердого тела $\varepsilon_{ij} = \varkappa_{ij} = 0$. Полагая $\mathbf{r}^V = \mathbf{r} + \mathbf{u}$, $\mathbf{n}^V = \mathbf{n} + \mathbf{v}$($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — векторы перемещения срединной поверхности и перемещения нормали), получаем из (6.1) без дополнительных допущений геометрически нелинейные соотношения

$$(6.2)\qquad \mathbf{v} = d_{aa}^{-1/2}(\mathbf{u}_{,1}\times\mathbf{r}_{,2} + \mathbf{r}_{,1}\times\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{u}_{,1}\times\mathbf{u}_{,2}),$$

$$\varepsilon_{ij} = (1/2)(\mathbf{r}_{,i}\mathbf{u}_{,j} + \mathbf{r}_{,j}\mathbf{u}_{,i} + \mathbf{u}_{,i}\mathbf{u}_{,j}),\ \varkappa_{ij} = -(\mathbf{v}\mathbf{r}_{,ij} + \mathbf{n}\mathbf{u}_{,ij} + \mathbf{v}\mathbf{u}_{,ij}).$$

Выражения (6.2) или им эквивалентные (6.1) определяют все величины, необходимые для вычисления инвариантов п. 5. Если вектор перемещения $\mathbf{u}$ разложен по локальному базису на поверхности, то производные $\mathbf{u}_{,i}$ находятся с использованием деривационных формул для векторов базиса. При разложении вектора $\mathbf{u}$ по ортам общей для всей поверхности декартовой системы координат деривационных формул не потребуется, так как вычисление производных от вектора сводится к определению обычных производных от его компонент.

В случае малых перемещений соотношения п. 5 остаются в силе, а (6.2) могут быть линеаризованы:

$$\mathbf{v} = d_{aa}^{-1/2}(\mathbf{u}_{,1}\times\mathbf{r}_{,2} + \mathbf{r}_{,1}\times\mathbf{u}_{,2}),$$

$$\varepsilon_{ij} = (1/2)(\mathbf{r}_{,i}\mathbf{u}_{,j} + \mathbf{r}_{,j}\mathbf{u}_{,i}),\ \varkappa_{ij} = -(\mathbf{v}\mathbf{r}_{,ij} + \mathbf{n}\mathbf{u}_{,ij}).$$

Отметим, что можно получить и другие приближенные выражения для инвариантов тонких оболочек в рассмотренной теории путем разложения (2.2), (2.3) в ряды по степеням z.

7. Формулировка и решение краевых задач в нелинейной теории оболочек связаны с известными трудностями. Наиболее эффективны для оболочек произвольных форм и границ в настоящее время прямые вариационные методы, основанные на использовании финитных функций [7]. При этом континуальная система приводится к системе с дискретными параметрами. Обсуждаемый вариант теории дает сравнительно несложный математический аппарат для работы с криволинейными элементами оболочек. Отличительная особенность теории состоит в определении величин, являющихся объективными характеристиками деформации и сохраняющих свои численные значения в данной точке тела независимо от принятых криволинейных координат [8]. Уравнения равновесия дискретной системы можно получить из условия стационарности энергии. В этом случае вариация энергии сводится к конечному числу варьируемых параметров. Если дискретные параметры имеют физический смысл (например, радиусы-векторы и орты нормали в некоторых точках поверхности [9]), то силовые краевые условия находятся естественным путем из вариации энергии. При этом могут быть наложены как статические, так и кинематические краевые условия. Структура вариаций энергии дискретных нелинейных моделей оболочек, а также вопросы алгоритмизации вычислений обсуждались в [10, 11].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек.— М.: Наука, 1976.
2. **Лурье А. И.** Терия упругости.— М.: Наука, 1970.
3. **Новожилов В. В.** Основы нелинейной теории упругости.— Л.; М.: Гостехиздат, 1948.

4. **Веблен О.** Инварианты дифференциальных квадратичных форм.— М.: ИЛ, 1948.
5. **Кузнецов В. В.** Канонический тензор в теории упругости // ПМТФ.— 1987.— № 5.
6. **Рашевский П. К.** Курс дифференциальной геометрии.— М.: Гостехиздат, 1956.
7. **Оден Дж.** Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.— М.: Мир, 1976.
8. **Кузнецов В. В.** Геометрические инварианты нелинейной теории оболочек // Изв. АН СССР. МТТ.— 1990.— № 2.
9. **Кузнецов В. В., Сойников Ю. В.** Анализ деформаций оболочек при произвольных перемещениях методом конечных элементов // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 1.
10. **Кузнецов В. В.** О структуре вариаций энергии нелинейных моделей оболочек // Прикл. механика.— 1988.— Т. 24, № 10.
11. **Кузнецов В. В.** Рекуррентные соотношения для коэффициентов вариаций энергии нелинейных упругих систем // Изв. АН СССР. МТТ.— 1989.— № 4.

г. Новосибирск

Поступила 23/I 1990 г.,
в окончательном варианте — 26/II 1990 г.

УДК 539.3

А. Г. Колпаков

ТОНКИЕ УПРУГИЕ ПЛАСТИНКИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ С ВНУТРЕННИМИ ОДНОСТОРОННИМИ КОНТАКТАМИ

Излагается процедура получения формального асимптотического разложения, реализующего переход от трехмерной задачи теории упругости в тонком слое к задаче теории пластинок для тел периодического строения с системой периодически распределенных контактов.

Тела периодического строения с системами односторонних контактов (в [1] рассмотрено тело с системой трещин, занимающее фиксированную область) практически широко реализуются именно в виде тонких пластинок и оболочек: сетчатых оболочек, тканей различного плетения, подкрепленных оболочек и т. п. Периодичность строения таких тел — прямое следствие технологии их изготовления. Размер ячейки периодичности сопоставим с толщиной области. Роль односторонних контактов, являющихся также результатом технологии изготовления, в механических свойствах таких материалов очевидна (пример — различие жесткостей на растяжение и сжатие для плетеных сеток или появление нелинейной зависимости деформация — напряжения для той же сетки, изготовленной на основе применения линейно-упругих материалов). По вопросу перехода от трехмерной задачи теории упругости к двумерной имеется достаточно обширная литература (см., например, [2]). В настоящей работе в части выполнения предельного перехода будем следовать [3], а в части анализа возникающих при этом задач с односторонними ограничениями — [1] (в той мере, в какой это возможно). В связи с чем основное внимание уделено изложению деталей, отличающихся от приводимых в [1, 3].

Постановка задачи. Рассмотрим линейно-упругое тело ($a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)$— тензор упругих постоянных) периодического строения, занимающее тонкую (характерной толщины $\varepsilon \ll 1$) область Ω_ε. Ячейку периодичности структуры тела обозначим P_ε (см. рисунок). На упругие постоянные наложим стандартные условия [4, 5]: $a_{ijkl}(\mathbf{y}) \in L_\infty(R^3), \|a_{ijkl}\|_{L_\infty(R^3)} < \infty$; $a_{ijkl}(\mathbf{y})\, e_{ij}e_{kl} \geqslant m, \|\{e_{ij}\}\|^2 > 0$ для всех $\{e_{ij}\} \neq 0$ таких, что $e_{ij} = e_{ji}$, и для всех $\mathbf{y} \in R^3$.

Формализация условия одностороннего контакта имеет следующий вид [1, 4]. Пусть тело закреплено по поверхности Γ_ε^0 (см. рисунок). Введем пространство функций $V = \{\mathbf{u} \in \{H^1(\Omega_\varepsilon)\}^3\colon\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0$ на $\Gamma_\varepsilon^0\}$. Тогда условие одностороннего идеального контакта в терминах перемещений $\mathbf{u}^\varepsilon$ примет вид [1, 4]

$$(1)\quad \mathbf{u}^\varepsilon \in M = \{\mathbf{u} \in V\colon\ [\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}] \geqslant 0 \text{ на контактных поверхностях}\}$$

($\mathbf{n}$ — нормаль к контактирующим поверхностям). Помимо (1) далее потребуется его аналог, описывающий условие того же одностороннего