О НЕСТАЦИОНАРНОМ ГОРЕНИИ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПОРОХА

Ю. А. Гостинцев, А. Д. Марголин

(Москва)

В статье, в пределах теории горения порохов Я. Б. Зельдовича [1], рассмотрен вопрос о нестационарном горении тонких пластин пороха. Для решения уравнений использован метод интегральных соотношений [2–4]. Получена формула для определения полного времени сгорания τ_+ пластины с начальной толщиной $2\delta_0$. Построены кривые изменения скорости горения w и температуры в центре пластины θ_0 в зависимости от толщины пластины.

Рассматривается горящая с двух сторон бесконечная плоскопараллельная пластина пороха. Начало координат выбрано в середине пластины. Горящие поверхности перпендикулярны оси x и движутся вдоль этой оси по направлению к началу координат. По мере приближения горящих поверхностей к середине пластины происходит разогрев ее центральной части, приводящий к уменьшению градиента температур на поверхности и к увеличению скорости горения. Температура T_s на поверхности пороха мало изменяется при изменении скорости горения, поэтому в первом приближении можно считать, что нестационарная скорость горения зависит только от давления и градиента температуры, а температура поверхности постоянна [1].

Для получения выражения скорости горения пороха в нестационарном случае используем температурную зависимость стационарной скорости от начальной температуры пороха T_0 в виде

$$u = u_1 \frac{P^\nu}{1 - \beta T_0} \tag{1}$$

Здесь u_1, β, ν — постоянные, зависящие от состава топлива. При стационарном горении градиент температуры у поверхности в зависимости от скорости горения имеет вид [1]

$$\varphi = \frac{u}{\varkappa}(T_s - T_0) = \left(\frac{dT(x)}{dx}\right)\Bigg|_{x=\Delta} \tag{2}$$

(Δ — половина толщины пластинки)

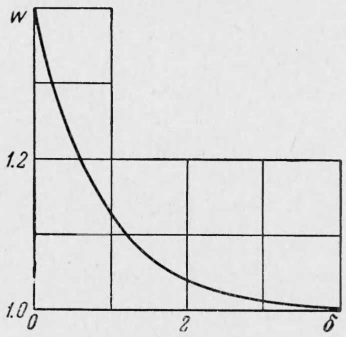
Из (1) и (2) получим выражение для нестационарной скорости горения

$$u = \frac{u_1}{1 - \beta T_s} P^\nu - \frac{\beta \varkappa}{1 - \beta T_s} \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right)_{x=\Delta} \tag{3}$$

Введем безразмерные величины

$$\tau = t\,\frac{u_0^2}{\varkappa} = \frac{t}{\tau_0}, \qquad \xi = x\,\frac{u_0}{\varkappa} = \frac{x}{\Delta_0}, \qquad \eta = \frac{1 - \beta T_0}{1 - \beta T_s}$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}, \qquad \omega = \frac{u}{u_0}, \qquad \delta = \frac{\Delta}{\Delta_0}$$



Фиг. 1

Здесь τ_0 и Δ_0 — характерные время прогрева и толщина прогретой зоны при стационарном горении, η — параметр, характеризующий степень прогретости пороха (чем больше η, тем меньше прогрето топливо).

В этих переменных исходная система уравнений для горения пластины при постоянном давлении имеет вид (по симметрии задачи рассматриваем только одну половину пластины)

$$\omega = \eta - (\eta - 1)\left(\frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi}\right)_{\xi=\delta} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \qquad (\tau \geqslant 0,\ 0 \leqslant \xi \leqslant \delta(\tau))$$

$$\theta(\xi, \tau) = 1 \ \text{ при } \xi = \delta(\tau), \qquad \frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi} = 0 \ \text{ при } \xi = 0, \qquad \theta = \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{ch} \delta} \ \text{ при } \delta \to \infty \tag{5}$$

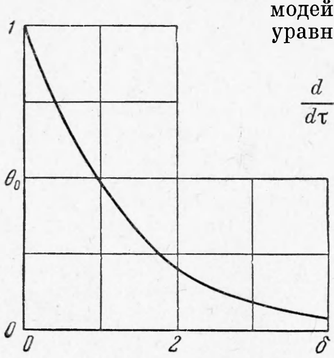
Граничное условие при $\xi = 0$ означает отсутствие теплообмена между правой и левой частью пластины; условие при $\delta \to \infty$ получено из двух симметричных кривых распределения температуры при $\omega = 1$ и $\delta \to \infty$.

Уравнение теплопроводности с граничными условиями такого типа не удается решить точными методами. Используем метод интегральных соотношений, впервые примененный для решения дифференциальных уравнений пограничного слоя [2] и впоследствии использованный для решения задач фильтрации [3] и теплопроводности [4]. Будем искать распределение температуры по толщине пластины в виде некоторой функции $\theta(\xi,\tau)$, удовлетворяющей граничным условиям задачи (4) при $\xi=\delta$ и $\xi=0$. Была выбрана функция

$$\theta = \psi(\tau)\,\frac{\operatorname{ch}\xi}{\operatorname{ch}\delta(\tau)} + 1 - \psi(\tau) \tag{6}$$

где $\psi(\tau)$ — пока не определенная функция времени.

Функция (6) при $\psi=1$ совпадает с точным решением задачи о горении с постоянной скоростью пластины достаточно большой толщины ($\delta\to\infty$), когда взаимодействие тепловых слоев несущественно. Проинтегрируем уравнение теплопроводности по координате ξ от 0 до $\delta(\tau)$



Фиг. 2

$$\frac{d}{d\tau}\int_0^{\delta(\tau)} \theta(\xi,\tau)\,d\xi = [\theta(\xi,\tau)]_{\xi=\delta(\tau)}\,\frac{d\delta(\tau)}{d\tau} + \frac{d\theta(\xi,\tau)}{d\xi}\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=\delta(\tau)} \tag{7}$$

После подстановки (6) в (7) получим с учетом граничных условий обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d}{d\tau}(\psi\operatorname{th}\delta - \psi\delta) = \psi\operatorname{th}\delta \tag{8}$$

Уравнение для скорости горения приобретает вид

$$\frac{d\delta}{d\tau} = -\eta + (\eta-1)\,\psi\operatorname{th}\delta \tag{9}$$

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений решается в общем виде

$$\psi(\operatorname{th}\delta-\delta) - \psi_0(\operatorname{th}\delta_0-\delta_0) - \frac{\delta-\delta_0}{\eta-1} = \frac{\eta}{\eta-1}\,\tau \tag{10}$$

Отсюда для времени сгорания τ_+ пластины с начальной толщиной $2\delta_0$ находим

$$\tau_+ = \frac{\eta-1}{\eta}\left[\frac{\delta_0}{\eta-1} - \psi_0(\operatorname{th}\delta_0-\delta_0)\right] \tag{11}$$

Начальное условие (5) при $\delta\to\infty$ означает, что пластина горит с постоянной скоростью $\omega=1$, когда толщина пластины бесконечна и не происходит взаимодействия тепловых слоев, распространяющихся навстречу друг другу. Для получения численных результатов нужно задать начальное условие не на бесконечности, а на конечной толщине пластины.

В связи с тем что прогрев пластины невелик при значительных толщинах и начинает сказываться лишь при толщинах пластины порядка прогретого слоя, можно без значительной ошибки принять, что на некотором конечном, но достаточно большом, по сравнению с шириной прогретого слоя, значении δ_0 скорость горения и градиент не успели еще измениться от своих начальных значений.

Поэтому будем пользоваться начальными условиями $d\psi/d\tau=0$ и $\delta=\delta_0$ ($\delta_0\gg1$) при $\tau=0$.

Для случая $\delta_0=4$ и $\eta=1.40$ результаты численного расчета изменения скорости горения w и температуры θ_0 в центре пластины в зависимости от текущего значения половины толщины пластины δ представлены на фиг. 1 и 2.

Видно, что скорость горения стремится к своему максимально возможному значению $\max w=\eta$, равному скорости горения пороха, прогретого до температуры горящей поверхности T_s.

Поступила 7.II.1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории горения порохов и ВВ. Ж. эксперим. и теор. физ., 1942, т. 12, № 11—12.
2. Pohlhausen K. Zur naherungsweisen Integration der Differentialgleichunger der laminaren Grenzschicht. Z. angew. Math. und Mech., 1921, H. 1.
3. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости в пористой среде. ПММ, 1952, т. 26, вып. 1.
4. Goodmen T. R. The heat-balance integral and its application to Problems involving a Change of Phase. Transaction of the ASME, 1958, No. 2.