УДК 539.374
DOI: 10.15372/PMTF202315262

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СЖАТИИ ДВУХСЛОЙНОГО НЕЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия
E-mails: sen@sibsau.ru, ruppa@inbox.ru

Найдено решение системы уравнений нелинейной упругости, описывающее напряженно-деформированное состояние двухслойного несжимаемого материала. Полученное решение может быть использовано для описания сжатия двухслойного материала жесткими плитами, которые сближаются с постоянным ускорением.

Ключевые слова: точное решение, нелинейная упругость, двухслойный материал

Появление новых материалов и использование их в современном машиностроении и технике обусловили интерес к изучению их свойств. Особый интерес вызывает исследование нелинейного деформирования упругих материалов. Существуют различные подходы к изучению нелинейной теории упругости и используемых в ней уравнений (см. работы [1, 2] и библиографию к ним). В отличие от линейной теории упругости в нелинейной теории отсутствуют общепринятые уравнения и не разработаны методы их решения, кроме класса так называемых универсальных решений. Например, в [3] рассмотрен один из классов нелинейных уравнений упругости и использованы методы группового анализа для их решения. Исследованию других уравнений нелинейной теории упругости и способов их решения посвящены работы [4–8]. В данной работе, по-видимому, впервые построено точное решение задачи о сжатии двухслойного нелинейного упругого материала.

Рассмотрим двухслойную нелинейную упругую среду, находящуюся между двумя жесткими плитами $y = \pm 1$. Один слой расположен в полосе $0 \leqslant y \leqslant 1$, другой — в полосе $-1 \leqslant y < 0$, $y = 0$ — линия контакта. В первом слое компоненты тензора напряжений σ_x^1, σ_y^1, τ^1 связаны с компонентами вектора перемещений u^1, v^1 уравнениями

$$\begin{gathered}
\sigma_y^1 = \frac{k_2 v_y^1}{\sqrt{(u_x^1)^2 + (v_y^1)^2 + (u_y^1 + v_x^1)^2}} + p^1(x, y),\\
\sigma_x^1 = \frac{k_1 u_x^1}{\sqrt{(u_x^1)^2 + (v_y^1)^2 + (u_y^1 + v_x^1)^2}} + p^1(x, y),\\
\tau^1 = \frac{k_3 (u_y^1 + v_x^1)}{\sqrt{(u_x^1)^2 + (v_y^1)^2 + (u_y^1 + v_x^1)^2}},
\end{gathered} \tag{1}$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ на выполнение коллективом научной лаборатории “Интеллектуальные материалы и структуры” проекта “Разработка многофункциональных интеллектуальных материалов и структур на основе модифицированных полимерных композиционных материалов, способных функционировать в экстремальных условиях” (№ FEFE-2020-0015).

где p^1 — гидростатическое давление; k_1, k_2, k_3 — постоянные. Деформации полагаются малыми, а среда — физически нелинейной. Уравнения движения имеют вид

$$u^1_{tt} = \partial_x \sigma^1_x + \partial_y \tau^1, \quad v^1_{tt} = \partial_x \tau^1 + \partial_y \sigma^1_y. \tag{2}$$

Упругая среда полагается несжимаемой, поэтому

$$u^1_x + v^1_y = 0. \tag{3}$$

Во втором слое связь компонент тензора напряжений с компонентами вектора перемещений описывается аналогичными (1)–(3) уравнениями

$$\begin{gathered}
\sigma^2_x = \frac{k_4 u^2_x}{\sqrt{(u^2_x)^2 + (v^2_y)^2 + (u^2_y + v^2_x)^2}} + p^2(x,y),\\
\sigma^2_y = \frac{k_5 v^2_y}{\sqrt{(u^2_x)^2 + (v^2_y)^2 + (u^2_y + v^2_x)^2}} + p^2(x,y),\\
\tau^2 = \frac{k_6 (u^2_y + v^2_x)}{\sqrt{(u^2_x)^2 + (v^2_y)^2 + (u^2_y + v^2_x)^2}},\\
u^2_{tt} = \partial_x \sigma^2_x + \partial_y \tau^2, \qquad v^2_{tt} = \partial_x \tau^2 + \partial_y \sigma^2_y,\\
u^2_x + v^2_y = 0,
\end{gathered} \tag{4}$$

где k_4, k_5, k_6 — постоянные.

На линии контакта $y = 0$ выполняются условия

$$\begin{gathered}
\sigma^1_x(x,0) = \sigma^2_x(x,0), \qquad \sigma^1_y(x,0) = \sigma^2_y(x,0), \qquad \tau^1(x,0) = \tau^2(x,0),\\
u^1(x,0) = u^2(x,0), \qquad v^1(x,0) = v^2(x,0).
\end{gathered} \tag{5}$$

Решение уравнений (1)–(4) будем искать в виде

$$u^1 = t^2(x + f(y)), \quad v^1 = -t^2 y, \quad u^2 = t^2(x + F(y)), \quad v^2 = -t^2 y, \tag{6}$$

где f, F — искомые функции, удовлетворяющие в силу (5) условию $f(0) = F(0)$, поскольку эти функции являются решением дифференциальных уравнений второго порядка и, следовательно, каждая из них определена с точностью до двух произвольных постоянных.

Подставляя первые два соотношения (6) в (1)–(3), получаем

$$\sigma^1_x = \frac{k_1}{\sqrt{2 + (f')^2}} + p^1(x,y), \qquad \sigma^1_y = -\frac{k_2}{\sqrt{2 + (f')^2}} + p^1(x,y), \qquad \tau^1 = \frac{k_3 f'}{\sqrt{4 + (f')^2}}; \tag{7}$$

$$2f + 2x = p^1_x + \frac{\partial}{\partial y} \frac{k_3 f'}{\sqrt{2 + (f')^2}}, \qquad -2y = p^1_y - \frac{\partial}{\partial y} \frac{k_2}{\sqrt{2 + (f')^2}}. \tag{8}$$

Из (7), (8) следует

$$p^1 = x^2 - y^2 + k_2 \Big/ \sqrt{2 + (f')^2} + c^1_p; \tag{9}$$

$$2f = \frac{\partial}{\partial y} \frac{k_3 f'}{\sqrt{2 + (f')^2}}, \tag{10}$$

где c^1_p — постоянная.

Решим и исследуем уравнение (10). В результате дифференцирования уравнение (10) записывается в виде

$$f = k_3 f''/(2 + (f')^2)^{3/2}. \tag{11}$$

Выполнив в (11) стандартную замену вида $f' = p(f)$, $f'' = p'p$, получаем

$$f = k_3 pp'/(2 + p^2)^{3/2}.$$

Интегрируя это выражение, находим

$$f^2 + C_1 = -2k_3/(2 + p^2)^{1/2}, \tag{12}$$

где C_1 — постоянная.

Формулу (12) запишем в виде

$$f' = 2\sqrt{[4k_3^2 - 2(f^2 + C_1)^2]/(f^2 + C_1)^2}\,, \tag{13}$$

или

$$(2 + (f')^2)^{1/2} = -2k_3/(f^2 + C_1). \tag{14}$$

Подставляя (13), (14) в соотношения (7), (9), имеем

$$p^1 = x^2 - y^2 - k_2(f^2 + C_1)/(2k_3) + c_p^1, \qquad \sigma_x^1 = p^1 - k_1(f^2 + C_1)/(2k_3),$$

$$\sigma_y^1 = x^2 - y^2 + c_p^1, \qquad \tau^1 = -\sqrt{4k_3^2 - 2(f^2 + C_1)^2}\,/2.$$

Заметим, что решение уравнения (13) можно получить через эллиптические интегралы первого и второго рода.

Аналогично получаем формулы для второго слоя:

$$p^1 = x^2 - y^2 - k_5(F^2 + C_2)/(2k_6) + c_p^2, \qquad \sigma_x^2 = p^1 - k_4(F^2 + C_2)/(2k_6),$$

$$\sigma_y^2 = x^2 - y^2 + c_p^2, \qquad \tau^1 = -\sqrt{4k_6^2 - (F^2 + 2C_2)^2}\,/2.$$

Потребуем выполнения условий (5) на линии контакта $y = 0$. Так как $\sigma_y^1(x,0) = \sigma_y^2(x,0)$, то $c_p^1 = c_p^2$. Из условия $\tau^1(x,0) = \tau^2(x,0)$ получаем

$$2(k_3^2 - k_6^2) - 2f^2(0)(C_1 - C_2) + C_1^2 - C_2^2 = 0. \tag{15}$$

Из условия $\sigma_x^1(x,0) = \sigma_x^2(x,0)$ находим

$$k_6(f^2(0) + C_1)(k_1 + k_2) = k_3(f^2(0) + C_2)(k_4 + k_5). \tag{16}$$

Формулы (15), (16) связывают параметры упругой среды $k_1, \ldots, k_6$ с постоянными интегрирования C_1, C_2 и числом $f(0)$. Выполнение условий (15), (16) гарантирует отсутствие разрывов в рассматриваемом слое.

Таким образом, построено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии нелинейно-упругой двухслойной среды, находящейся между двумя жесткими плитами, сближающимися с постоянным ускорением вдоль оси Oy. Заметим, что аналогичное решение может быть построено для среды, законы упругости которой имеют вид

$$\sigma_x = \lambda_1(I_2)u_x, \qquad \sigma_y = \lambda_2(I_2)v_y, \qquad \tau = \lambda_3(I_2)(v_x + u_y)$$

(λ_i — некоторые гладкие функции, зависящие от второго инварианта тензора деформаций I_2).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В. В.** Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1948.
2. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
3. **Аннин Б. Д., Бондарь В. Д., Сенашов С. И.** Групповой анализ и точные решения уравнений плоской деформации несжимаемого нелинейного упругого тела // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 1. С. 11–16.
4. **Аннин Б. Д., Бондарь В. Д.** Антиплоская деформация нелинейно-упругого несжимаемого тела // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 93–101.
5. **Бондарь В. Д.** Упругопластическое антиплоское деформирование несжимаемого тела // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 1. С. 27–39.
6. **Бондарь В. Д.** Динамика антиплоского деформирования нелинейно-упругого тела // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 4. С. 147–159.
7. **Гавриляченко Т. В., Карякин М. И.** Об особенностях нелинейно-упругого поведения сжимаемых тел цилиндрической формы при кручении // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 188–193.
8. **Леган М. А., Мирошниченко А. В.** Моделирование деформирования разномодульных материалов со структурой в виде застывшей пены // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 6. С. 191–196.

Поступила в редакцию 14/II 2023 г.,
после доработки — 28/II 2023 г.
Принята к публикации 24/IV 2023 г.