ПМТФ, № 1, 1974

УДК 532.516

ДВИЖЕНИЕ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ТРУБАХ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

В. И. Найденов

Москва

Рассматривается задача о распределении скорости и температуры жидкости, текущей в цилиндрической трубе при экспоненциальной зависимости вязкости от температуры.

1. Гидродинамике и теплообмену при ламинарном течении вязких жидкостей в трубах посвящено много теоретических и экспериментальных работ [1]. Большой практический интерес представляет проблема движения вязкой жидкости в неизотермических условиях, решение которой связано со значительными трудностями аналитического характера.

Исследование течения с переменной вязкостью для задачи, аналогичной задаче Гретца — Нуссельта, проведено в [2]. В этой работе инерционные и конвективные члены в уравнениях движения и энергии учитывались лишь частично методом осреднения по толщине теплового пограничного слоя. Однако и в этом случае аналитическое интегрирование уравнений возможно лишь методами численного анализа, а полученные результаты справедливы лишь в области малых приведенных длин. Решение, пригодное для всей области теплообмена интегральным методом Кармана — Польгаузена, получено в [3]. В [4] для расчета теплообмена и сопротивления при движении газа с зависящими от температуры свойствами использован метод конечных разностей и предложены некоторые интерполяционные формулы, описывающие результаты расчета с точностью до 3%. При этом система дифференциальных уравнений движения, неразрывности и энергии исследовалась в приближении пограничного слоя.

Работа [5] посвящена изучению вопроса о теплообмене и гидравлическом сопротивлении вязкой несжимаемой жидкости в области стабилизированного теплообмена в случае граничных условий второго рода.

Отметим также интересные исследования некоторых термогидродинамических задач [6, 7], приведшие к открытию явления гидродинамического теплового взрыва. Аналогичных результатов о существовании критической комбинации параметров, при которой невозможен установившийся режим течения, следует, видимо, ожидать в теории конвективного теплообмена при переменных физических свойствах.

В данной работе исследуется вопрос о теплообмене и гидравлическом сопротивлении вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе в случае граничных условий второго рода. Будем считать гидродинамические и тепловые процессы установившимися, зависимость вязкости от температуры зададим интерполяционным уравнением

$$\mu = \mu_0 \exp\left[-\beta\left(T - T_0\right)\right] \tag{1.1}$$

Здесь μ_0 — вязкость жидкости на входе в теплообменный участок, β — параметр, зависящий от рода жидкости и интервала температур.

При небольших градиентах температур формула (1.1) дает удовлетворительное совпадение с данными опыта. Уравнения движения и теплообмена при постоянстве коэффициента температуропроводности и прямолинейности траекторий частиц имеют вид [8]

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\mu \frac{dv}{dr}\right) + \frac{\mu}{r}\frac{dv}{dr}, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{dv}{dr}, \quad a\Delta T = v\frac{\partial T}{\partial x} \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что температура стенок трубы поддерживается при температуре, зависящей линейно от x

$$T(x, r_0) = Ax \tag{1.3}$$

Здесь r_0 — радиус трубы, x — продольная координата.

Для стационарных тепловых процессов соотношение (1.3) тождественно предположению о постоянстве удельного теплового потока через стенки трубы, если ρ и c_p постоянны по сечению и длине трубы.

Введем безразмерные величины

$$X = x/r_0, \ R = r/r_0, \ \theta = T/Ar_0, \ V = v/u_0 \tag{1.4}$$

$$P = pr_0/\mu_0 u_0, \ \mathrm{Pe} = u_0 r_0/a, \ \alpha = \beta A r_0$$

Здесь u_0 — средняя по расходу скорость течения.

Предположим, что после температур автомодельно относительно координаты X, т. е.

$$\theta(R, X) = X + \theta(R) \tag{1.5}$$

С учетом предположения (1.5) относительно функций $\theta(R)$ и $V(R)$ получим безразмерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dR}\Delta V + \left[\alpha^2\left(\frac{d\theta^2}{dR} - 1\right) - \alpha \mathrm{Pe} V\right]\frac{dV}{dR} - 2\alpha\frac{d\theta}{dR}\frac{d^2V}{dR^2} = 0 \tag{1.6}$$

$$\Delta\theta = \mathrm{Pe} V$$

Краевые условия и условия постоянства расхода зададим в обычном виде

$$V(1) = 0, \quad \theta(1) = 0, \quad \int_0^1 RV(R)\,dR = {}^1/_2 \tag{1.7}$$

Соотношения (1.6), (1.7) формулируют математическую постановку задачи.

Решение системы уравнений (1.6) формально ищем в виде ряда по степеням параметра α

$$V(R, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k V_k(R), \quad \theta(R, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \theta_k(R) \tag{1.8}$$

Для определения k-го приближения получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$(d/dR)\,\Delta V_k = F_k(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{k-1}, V_0, V_1, \ldots, V_{k-1}), \qquad \Delta\theta_k = \mathrm{Pe} V_k \tag{1.9}$$

$$F_k = -\sum_{m=0}^{k-2}\sum_{n-0}^{k-2}\left(\frac{d\theta_m}{dR}\frac{d\theta_n}{dR}\frac{dV_l}{dR} - \frac{dV_l}{dR}\right) + \sum_{m=0}^{-1}\left(\mathrm{Pe}V_m\frac{dV_l}{dR} + 2\frac{d\theta_m}{dR}\frac{d^2V_l}{dR^2}\right)$$

С учетом разложений (1.8) условия (1.7) запишутся в виде

(1.10) $$V_k(1) = 0,\ \theta_k(1) = 0,\quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\int_0^1 RV_0(R)\,dR = 1/2, \qquad \int_0^1 RV_k(R) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, для решения задачи применяется метод последовательных приближений. В качестве нулевого приближения выберем функции [1]

(1.11) $$V_0(R) = 2(1 - R^2),\ \theta_0(R) = -1/8\,\mathrm{Pe}\,(3 - 4R^2 + R^4)$$

Методом вариации постоянных нетрудно получить общее решение системы уравнений (1.9)

(1.12) $$V_k(R) = \int_0^R \frac{1}{\xi}\int_0^\xi \eta \int_0^\eta F_k(y)\,dy + A_kR^2 + B_k$$

$$\theta_k(R) = \mathrm{Pe}\left(\int_0^R \frac{1}{\xi}\int_0^\xi \eta V_k(\eta)\,d\eta + C_k\right)$$

Произвольные постоянные A_k, B_k, C_k определяются из соотношений (1.10)

(1.13) $$A_k = 4\int_0^1 RX_k(R)\,dR - 2X_k(1)$$

$$B_k = -4\int_0^1 RX_k(R)\,dR + X_k(1)$$

$$C_k = -\int_0^1 \frac{1}{\xi}\int_0^\xi \eta V_k(\eta)\,d\eta$$

где $X_k(R)$ — частное решение первого уравнения (1.9).

2. Допустим, что функции $(V_0, \theta_0), (V_1, \theta_1), (V_2, \theta_2), \ldots, (V_{k-1}, \theta_{k-1})$ не имеют особенностей в рассматриваемой области течения, тогда из соотношения (1.12) следует аналитичность k-го приближения. Так как нулевая пара функций (1.11) является аналитической в области $(0 \leqslant R \leqslant 1)$, то этим свойством будут обладать приближения любого порядка и их производные.

Обратимся к доказательству равномерной сходимости $V(R, \alpha)$, $\theta(R, \alpha)$ и их производных в интервале $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha^*$.

Введем такое положительное число M_k, что

(2.1) $$\max |F_k(R)| \leqslant M_k \quad (0 \leqslant R \leqslant 1)$$

Введение M_k всегда возможно, так как рассматриваются функции, непрерывные на замкнутом интервале. Из соотношений (1.12), (1.13) получим оценки для функций $\theta_k(R)$ и $V_k(R)$ и их производных до первого и второго порядка включительно

(2.2) $$|V_k(R)| \leqslant 8/9\,M_k, \quad |\theta_k(R)| \leqslant 4/9\,M_k\,\mathrm{Pe}$$

$$|dV_k/dR| \leqslant 11/9\,M_k, \; |d\theta_k/dR(R)| \leqslant 4/9\,M_k\mathrm{Pe}, \; |d^2V_k/dR^2(R)| \leqslant 20/9\,M_k$$

Обозначая через h наибольшее из чисел (20/9, 4/9 Pe), построим ряд

$$W(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k \alpha^k, \quad W_k = hM_k \tag{2.3}$$

Здесь под α понимается модуль этой величины.

Если доказать сходимость функции $W(\alpha)$, то из неравенств (2.2) будет вытекать равномерная сходимость разложений (1.8) и их производных в области $0 \leqslant R \leqslant 1$.

В качестве пока неопределенных значений M_k выберем числа

$$M_k = W_k/h = \sum_{m=0}^{k-2} \sum_{n=0, m+n+l=k-2}^{k-2} (W_m W_n W_l + W_l) + \sum_{m=0, m+l=k-1}^{k-1} (\mathrm{Pe} + 2) W_m W_l \tag{2.4}$$

Если каждый член ряда (2.3), кроме нулевого, заменить его выражением (2.4), получим мажорантное уравнение

$$\varphi(W, \alpha) = \alpha^2 W^3 + \alpha(\mathrm{Pe} + 2) W^2 + (\alpha^2 - 1/h) W + W_0/h = 0 \tag{2.5}$$

где W_0 — наибольшее число, превышающее максимумы функций $V_0(R)$ и $\theta_0(R)$ и их производных.

Так как коэффициенты при $W(\alpha)$ являются рациональными функциями α, то $W(\alpha)$ есть алгебраическая функция и в окрестности особой точки ($\alpha = 0$) имеет по крайней мере одну регулярную ветвь сходимости. Ближайшая особая точка (радиус сходимости) определяется после исключения W из системы уравнений

$$\varphi(W, \alpha^*) = 0, \quad \partial\varphi / \partial W (W, \alpha^*) = 0 \tag{2.6}$$

В окрестности нулевого значения параметра $0 \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon$ вместо уравнения (2.5) можно использовать более простое уравнение

$$\alpha(\mathrm{Pe} + 2) W^2 - h^{-1} W + h^{-1} W_0 = 0 \tag{2.7}$$

В этом случае радиус сходимости определяется корнем дискриминантного уравнения

$$\alpha^* = [4hW_0(\mathrm{Pe} + 2)]^{-1} \tag{2.8}$$

Если, например, $\mathrm{Pe} = 1$, то $h = 20/9$, $W_0 = 4$ и $\alpha^* = 0.01$.

Очевидно, что, используя более точные оценки в неравенствах (2.2), значение α^* можно увеличить.

3. Для определения первого приближения имеем систему уравнений

$$\frac{d}{dR} \Delta V_1 = \mathrm{Pe}\, V_0 \frac{dV_0}{dR} + 2 \frac{d\theta_0}{dR} \frac{d^2 V_0}{dR^2}, \quad \Delta\theta_1 = \mathrm{Pe}\, V_1 \tag{3.1}$$

Решение этой системы, не имеющее особенностей при $R = 0$

$$V_1(R) = {}^1/_{24}\, \mathrm{Pe}\, (2R^6 - 12R^4 + 13R^2 - 3)$$
$$\theta_1(R) = {}^1/_{2304} \mathrm{Pe}^2 (3R^8 - 32R^6 + 78R^4 - 72R^2 + 23) \tag{3.2}$$

Аксиальная скорость течения на основе двух приближений представится в виде

$$V(R, \alpha, \mathrm{Pe}) = 2(1 - R^2) + {}^1/_{24}\, \alpha\, \mathrm{Pe}\,(2R^6 - 12R^4 + 13R^2 - 3) \tag{3.3}$$

Анализируя (3.3), можно сделать следующие выводы. При $\alpha > 0$ (стенки нагревают жидкость) скорость на оси трубы падает, а в окрестности стенок возрастает по сравнению с параболическим режимом течения, так что получается более заполненный профиль скорости. При $\alpha < 0$ (стенки холоднее жидкости) картина течения будет обратной, и профиль скорости принимает характерный вытянутый вид. При возрастании произведения $\alpha\mathrm{Pe}$ отмеченные эффекты усиливаются. Эти выводы находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными, полученными для воды и масел типа МС-20 [1].

Градиент температуры у стенки трубы для всех значений X определяется зависимостью

$$d\theta / dR = \mathrm{Pe} / 2 \tag{3.4}$$

так как

$$\left.\frac{d\theta_k}{dR}\right|_{R=1} = \mathrm{Pe}\int_0^1 RV_k(R)\,dR = 0, \qquad k \geqslant 1$$

Для среднего значения температуры по сечению получаем

$$\theta_s = 2\int_0^1 \theta(R)\,V(R)\,R\,dR = -\frac{11}{48}\mathrm{Pe} + \frac{\alpha\,\mathrm{Pe}^2}{128} \tag{3.5}$$

Таким образом, для числа Нуссельта, отнесенного к диаметру трубы, имеем уравнение

$$\mathrm{Nu}^{-1} = \theta_s\,[-2d\theta / dR]^{-1} = 11/48 - \alpha\mathrm{Pe} / 128 \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что при $\alpha > 0$ число Нуссельта, а следовательно, и коэффициент теплоотдачи возрастают по сравнению с предельным значением $\mathrm{Nu} = 4.364$. При $\alpha < 0$ число Нуссельта и коэффициент теплоотдачи будут уменьшаться.

Для коэффициента гидравлического сопротивления имеем

$$\lambda = |\tau_{\max}| / {}^1/_2\,\rho U_0^2 = |8 / \mathrm{Re} + {}^5/_6\,\alpha\mathrm{Pr}|\, e^{-\alpha X}$$

Здесь $\tau_{\max}$ — напряжение трения на стенках трубы, ρ — плотность жидкости, $\mathrm{Re} = U_0 r_0 \rho / \mu_0$ — число Рейнольдса, $\mathrm{Pr} = \mu_0 / \rho a$ — число Прандтля.

При $\alpha < 0$ коэффициент сопротивления быстро растет с увеличением длины X.

Отметим интересное обстоятельство. Если параметр $\alpha \ll 1$, то в системе (1.6) членом $\alpha^2 dV / dR$ можно пренебречь по сравнению с остальными. Тогда искомые V, θ / Pe, Nu будут функциями единственного критерия $\alpha\mathrm{Pe}$

$$V = f_1(R, \alpha\mathrm{Pe}), \quad \theta = \mathrm{Pe}\, f_2(R, \alpha\mathrm{Pe}), \quad \mathrm{Nu} = f_3(\alpha\mathrm{Pe}) \tag{3.7}$$

Представляет интерес экспериментальная проверка последнего уравнения (3.7).

Расчет дальнейших приближений не представляет труда, так как правые части уравнений (1.9) при любом k являются полиномами и, следовательно, для каждого приближения можно получить точное решение.

Вопрос о существовании и единственности решения системы уравнений (1.6) при $\alpha > \alpha^*$ остается открытым.

Поступила 5 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петухов Б. С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., «Энергия», 1967.
2. *Петухов Б. С.* Расчет теплообмена и гидравлического сопротивления при ламинарном течении жидкости переменной вязкости в круглой трубе. Теплоэнергетика, 1954, № 9.
3. *Янг Ван-цзу.* Конвективный теплообмен при вынужденном ламинарном течении жидкости в трубах в случае переменной вязкости. Теплопередача, 1962, № 4, стр. 95—105.
4. *Worose-Schmidt P. M., Leppert G.* Heat transfer and friction for laminar flow of gas in a circular tube at high heating rate. Internat. J. Heat and Mass Transter, 1966, vol. 8, No. 10, pp. 1281—1301.
5. *Петухов Б. С., Попов В. Н.* Теоретический расчет теплообмена и сопротивления трения при ламинарном течении в трубах несжимаемой жидкости с переменными физическими свойствами. Теплофизика высоких температур, 1963, т. 1, № 2.
6. *Регирер С. А.* Влияние теплового эффекта на вязкое сопротивление в установившемся одномерном течении капельной жидкости. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
7. *Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И.* О гидродинамическом тепловом взрыве. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 1.
8. *Тарг С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений. М., Гостехиздат, 1951.