ПМТФ, № 3, 1969

НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ПЛАЗМЕННЫЙ СЛОЙ

В. Р. Смилянский

(Новосибирск)

Рассмотрено наклонное падение гармонической электромагнитной волны с электрическим вектором, лежащим в плоскости падения, на параболический слой плоско-слоистой изотропной плазмы. Получены коэффициенты отражения и прохождения, а также коэффициент трансформации электромагнитной волны в плазменную.

1. Рассмотрим наклонное падение гармонической волны с электрическим вектором, лежащим в плоскости падения, на параболический слой плоско-слоистой изотропной плазмы. В этом случае электрическое и магнитное поля в плазме описываются следующими уравнениями [1]:

$$H_x = G(z)\, e^{i(\omega t - \Omega\alpha_0 y)}, \quad E_y = -\frac{i}{\Omega\varepsilon'}\frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = \frac{i}{\Omega\varepsilon'}\frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{1.1}$$

$$\frac{d^2G}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dz}\frac{dG}{dz} + \Omega^2(\varepsilon' - \alpha_0^2)\,G = 0 \qquad \left(\Omega = \frac{\omega}{c}, \quad \omega = 2\pi f\right) \tag{1.2}$$

$$\varepsilon' = 1 - \frac{f_*^2}{f^2}\left(1 - \frac{z^2}{z_m^2}\right) - is, \quad \alpha_0 = \sin\theta_0, \quad i = \sqrt{-1} \tag{1.3}$$

Здесь f — частота, c — скорость света, θ_0 — угол падения волны на слой, ε' — комплексная диэлектрическая проницаемость, f_* — критическая частота, z_m — полутолщина слоя. Поглощение s будем считать постоянным вдоль слоя. Случай линейного слоя детально рассмотрен в [2]. В [3] частично рассмотрен случай нуля второго порядка ($s = 0$, $f = f_*$, $\varepsilon' = \varepsilon = z^2 / z_m^2$). Однако в [3] поля рассматривались в основном вблизи $\varepsilon' = 0$. Коэффициенты же отражения и прохождения не вычислены явно и не проанализированы. Так как для $\varepsilon' = z^2 / z_m^2$ волновое уравнение может быть решено точно, то получение этих коэффициентов представляет особый интерес. Поэтому он рассматривается первоначально.

2. Рассмотрим частный случай

$$\varepsilon' = \varepsilon = z^2 / z_m^2, \qquad s = 0, \qquad f = f_*$$

При указанных предположениях уравнение (1.2) типа

$$\frac{d^2G}{dz^2} + \frac{Q}{z}\frac{dG}{dz} + (a + bz^2)\,G = 0 \tag{2.1}$$

В данном случае произвольные параметры Q, a, b принимают значения

$$Q = -2, \qquad a = -\Omega^2\alpha_0^2, \qquad b = \omega_*^2 / c^2 z_m^2, \qquad \omega_* = 2\pi f_*$$

Его решения $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ можно выразить через функции Уиттекера [4]

$$G^{(1)}(i\tau) = e^{-i\pi\eta}(i)^{\eta}\tau^{1/4}W_{-\eta,\,\mu}(i\tau e^{-i\pi}) \sim \tau^{1/2 r_1}e^{1/2 i\tau}(1 + O(\tau^{-1})) \qquad (|\tau| \to \infty)$$

$$G^{(2)}(i\tau) = (i)^{-\eta}\tau^{1/4}W_{\eta,\,\mu}(i\tau) \sim \tau^{1/2 r_2}e^{-1/2 i\tau}(1 + O(\tau^{-1})) \quad (|\tau| \to \infty) \tag{2.2}$$

$$\tau = z^2 b^{1/2} = 2\pi z^2/\lambda_* z_m, \quad \lambda_* = c / f_*$$

$$\eta = {}^1/_4(r_2 - r_1), \qquad \mu = {}^1/_4(\rho_1 - \rho_2), \qquad r_{1,2} = {}^1/_2(1 \pm iab^{-1/2})$$

Здесь ρ_1, ρ_2 характеризуют поведение решений в окрестности регулярной особой точки уравнения $z=0$ и могут быть найдены из определяющего уравнения

$$\rho(\rho-1)+\rho Q=0 \tag{2.3}$$

Если падающая волна распространяется со стороны $z<0$, то $G^{(2)}$ при $z>0$ описывает прошедшую волну. Соответственно при $z<0$ $G^{(2)}$ — отраженная волна, $G^{(1)}$ — падающая. Исходя из формул 9.120, 9.231 (2), 9.232 работы [4], можно получить [1]

$$W_{\eta,\mu}(ze^{\pm i2\pi})=\frac{2\pi i e^{-i\pi\eta}W_{-\eta,\mu}(ze^{-i\pi})}{\Gamma(^1/_2+\mu-\eta)\,\Gamma(^1/_2-\mu-\eta)}-(q_\pm 2\cos 2\pi\mu+e^{-i2\pi\eta})\,W_{\eta,\mu}(z) \tag{2.4}$$

$$q_+=1,\qquad q_-=0\quad(\Gamma \text{ — гамма-функция})$$

С помощью (2.2) и (2.4) получается следующая связь между решениями $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ на положительной и отрицательной полуосях z

$$G^{(2)}(i\tau e^{\pm i2\pi})=-\frac{2\pi(i)^{-2\eta}G^{(1)}(i\tau)}{\Gamma(^1/_2+\mu-\eta)\,\Gamma(^1/_2-\mu-\eta)}-i(q_\pm 2\cos 2\pi\mu+e^{-i2\pi\eta})\,G^{(2)}(i\tau) \tag{2.5}$$

Формула (2.5), в частности, дает связь между асимптотическими решениями уравнения (2.1) на положительной и отрицательной полуосях z, при $|\tau|\to\infty$. Как видно из (2.5), характер связи зависит от направления полуобхода точки z (по верхней (q_+) или нижней (q_-) полуплоскостям комплексной z-плоскости). Это объясняется тем, что решения в $z=0$ имеют, вообще говоря, точку разветвления. Поэтому в общем случае возникает задача о правильном выборе направления обхода (см. п. 4,5). Из (2.5) получаются следующие выражения для амплитудных коэффициентов отражения R (отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей) и прохождения D

$$D=(2\pi)^{-1}e^{i\pi(\eta-1)}\,\Gamma(^1/_2+\mu-\eta)\,\Gamma(^1/_2-\mu-\eta)$$

$$R=e^{i^3/_2\pi}(q_\pm 2\cos 2\pi\mu+e^{-i2\pi\eta})\,D \tag{2.6}$$

В рассматриваемом случае: $Q=-2$, $\mu=3/4$, $\cos 2\pi\mu=0$, т. е. направления обхода равноценны. Подставляя в (2.6) конкретные выражения Q, a, b, а также используя известные свойства Г-функций (см. [4], формулы 8.331, 8.335 (1), 8.332 (2)) можно получить следующие выражения для коэффициентов отражения $|R|^2$ (отношение интенсивностей отраженной и падающей волн) и пропускания $|D|^2$

$$|R|^2=\frac{e^h}{1+e^h},\qquad |D|^2=\frac{1}{1+e^h},\qquad h=2\pi^2\frac{z_m}{\lambda_*}\alpha_0^2 \tag{2.7}$$

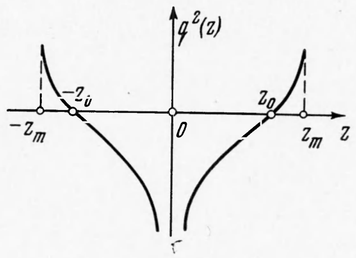
Отсюда видно, что при $s=0$ и $f=f_*$ поглощения в районе полюса не происходит ($|R|^2+|D|^2=1$) и наличие бесконечной амплитуды электрического вектора ($|E_z|\sim 1/z^2$ $|E_y|\sim 1/z$ при $z\to 0$) нужно рассматривать как результат переходного процесса [1]. Заменой $G=w\varepsilon^{1/2}$ уравнение (2.1) приводится к виду

$$\frac{d^2w}{dz^2}+q^2w=0,\qquad q^2=-\frac{2}{z^2}+\frac{\omega_*^2}{c^2}\left(\frac{z^2}{z_m^2}-\alpha_0^2\right)$$

---

[1] В [3] приведена формула для $W_{\eta,\mu}(ze^{i2\pi})$, и в ней, видимо из-за опечатки, во втором члене записано $e^{i2\pi\eta}$

Кривая $q^2(z)$ показана на фиг. 1. В приведенном выше расчете не учитывалось отражение от скачка $d\varepsilon / dz$ в точках $z = \pm z_m$. Это законно, когда $(z_m - z_0) / \lambda_* \gg 1$ (фиг. 1) и переход к $\varepsilon = 1$ может быть соответствующим образом сглажен. Это условие формально ограничивает применимость (2.7) для больших θ_0. Однако практически полное отражение от слоя наступает при таких θ_0, при которых (2.7) еще справедливо. Если, например, для $z_m / \lambda_* = 10$ потребовать $(z_m - z_0) / z_m \geqslant 1/2$, то должно выполняться условие $\theta_0 \leqslant 30°$ ($h \leqslant 48{,}8$). Фактически полное отражение происходит при $\theta_0 < 30°$.



Фиг. 1

3. Рассмотрим связь между асимптотическими решениями в общем случае. Для параболического слоя уравнение (1.2) имеет вид

$$\frac{d^2G}{dz^2} - \left(\frac{1}{z+z_1} + \frac{1}{z-z_1}\right)\frac{dG}{dz} + \Omega^2 [u^2 (z^2 - z_1{}^2) - \alpha_0{}^2]\, G = 0$$

$$z_1{}^2 = z_m{}^2 \left[1 - \frac{f^2}{f_*{}^2}(1 - is)\right], \quad u^2 = \frac{f_*{}^2}{f^2 z_m{}^2} \qquad (3.1)$$

В более общей форме это уравнение типа

$$\frac{d^2G}{dz^2} + \frac{Qz}{z^2 - z_1{}^2}\frac{dG}{dz} + (a + bz^2)\, G = 0 \qquad (3.2)$$

где Q, a, b — произвольные параметры. При $z_1 = 0$ оно переходит в уравнение (2.1), которое является частным случаем (3.2). Сравним эти два уравнения.

Уравнение (2.1) не меняется при замене z на $ze^{i\pi}$. Оно имеет две особые точки: существенно особую в $z = \infty$ и регулярную особую точку в $z = 0$. Его асимптотические решения (см. (2.2)) при больших $|\tau|$ для $z > 0$ и $z < 0$ связаны между собой выражением (2.5). Как видно из (2.5) множители при асимптотических решениях зависят только от параметров $\rho_{1,2}$, $r_{1,2}$, характеризующих особые точки ($\mu = {}^1/_4\,(\rho_1 - \rho_2)$; $\eta = {}^1/_4(r_2 - r_1)$). Влияние полюса в $z = 0$ (а следовательно, особой точки решений) на эту связь проявляется только через изменение μ. Так, если положить в (2.1) $Q = 0$, т. е. рассматривать уравнение без полюса, то в (2.5) нужно подставить $\mu = {}^1/_4$, так как в этом случае $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$. При этом $r_{1,2}$ и η не изменяются.

Уравнение (3.2) также не меняется при замене z на $ze^{i\pi}$. Оно также имеет существенно особую точку в $z = \infty$, причем его асимптотические решения при больших $|\tau|$ ($|z| > |z_1|$) имеют такие же главные члены, как и для уравнения (2.1), т. е. $\tau^{{}^1/_2 r_{1,2}} e^{\pm {}^1/_2 i\tau}$, и характеризуются такими же $r_{1,2} = {}^1/_2(1 \pm iab^{-1/2})$ [5]. Единственное его отличие от (2.1) в том, что оно имеет два простых полюса в точках $z = \pm z_1$, сливающиеся в один, тоже простой, полюс при $z_1 \to 0$, или, другими словами, две регулярные особые точки $z = \pm z_1$, сливающиеся в одну, тоже регулярную, особую точку при $z_1 \to 0$. По существу, уравнения (2.1) и (3.2) одного типа.

Поэтому естественно предположить, что для уравнения (3.2) связь между асимптотическими решениями дается тем же выражением (2.5), что и для уравнения (2.1), но с заменой μ на μ', где параметр μ' должен характеризовать две регулярные особые точки ($z = \pm z_1$) в таком же отношении, в каком μ характеризует одну регулярную особую точку ($z = 0$).

Очевидно, что μ' зависит от z_1 и $\mu' = \mu$ при $z_1 = 0$. Соответственно в общем случае амплитудные коэффициенты отражения R и прохождения D описываются выражениями (2.6) с заменой в них μ на μ'. Таким образом, задача сводится к определению μ'. Заметим, что условие $|z| > |z_1|$ приводит к условию $|z_1| < z_m$, что накладывает ограничения на область рассматриваемых частот.

Уравнение (3.1) заменой $G = w\,(z^2 - z_1^2)^{1/2}$ приводится к виду

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left\{-\frac{3}{4}\frac{1}{(z-z_1)^2} - \frac{1}{4z_1(z-z_1)} - \frac{3}{4}\frac{1}{(z+z_1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4z_1(z+z_1)} + \Omega^2\left[u^2(z^2-z_1^2) - \alpha_0^2\right]\right\} w = 0 \qquad (3.3)$$

Его решения в окрестности точек $z = \pm z_1$

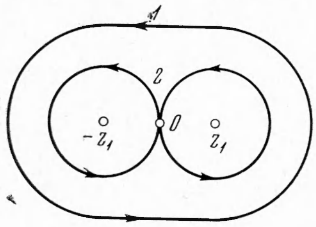
$$y_1 = (z-z_1)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty} C_k(z_1)(z-z_1)^k, \qquad x_1 = (z+z_1)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k(z_1)(z+z_1)^k$$

$$y_2 = ry_1\ln(z-z_1) + (z-z_1)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty} d_k(z_1)(z-z_1)^k \qquad (3.4)$$

$$x_2 = rx_1\ln(z+z_1) + (z+z_1)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k d_k(z_1)(z+z_1)^k$$

$$\rho_1 = {}^3/_2, \quad \rho_2 = -{}^1/_2, \quad C_0 = 1, \quad d_0 = -{}^1/_2, \quad r = -\Omega^2\ \alpha_0^2/4$$

где r — определено методом Фробениуса. Как легко показать из рекуррентных соотношений, коэффициент $C_k(z_1)$ является четной функцией z_1, если k четно, и нечетной, если k нечетно. Для вывода μ' удобно воспользоваться матричной символикой. Обозначим



Фиг. 2

$$Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix}, \qquad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} \qquad (3.5)$$

Линейно независимые решения Y после обхода обеих особых точек по контуру *1* (см. фиг. 2) перейдут в решении Y'', причем

$$Y'' = CY, \qquad C = \| c_{jk} \|$$

где C — неособая постоянная матрица. В принципе можно выбрать такую пару решений

$$V = \begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Vmatrix}, \qquad V = BY$$

(B — постоянная неособая матрица), что после обхода по контуру 1 либо

$$v_1'' = \xi_1' v_1, \quad v_2'' = \xi_2' v_2$$

(если C подобна диагональной матрице), либо

$$v_1'' = \xi_1' v_1, \quad v_2'' = c_{21}v_1 + \xi'_1 v_2$$

(если C не подобна диагональной матрице). Причем ξ_1', ξ_2' есть характеристические числа матрицы C, т. е. могут быть найдены из уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \xi' & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - \xi' \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.6)$$

Матрица C зависит от выбора конкретной пары решений, а ξ_1', ξ_2' — нет. Числа ξ_1', ξ_2' определяются только характером особых точек. Если аналогичное построение провести для одной особой точки и найти соответствующие характеристические числа ξ_1, ξ_2 то, как известно [6]

$$\rho_1 = \frac{\ln \xi_1}{2\pi i} + n_1, \quad \rho_2 = \frac{\ln \xi_2}{2\pi i} + n_2, \quad \mu = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\xi_1}{\xi_2} + (n_1 - n_2)\right)$$

где n_1, n_2 — некоторые целые числа. Поэтому для двух особых точек

$$\mu' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\xi_1'}{\xi_2'} + l\right) \tag{3.7}$$

Значение целого числа l должно быть выбрано из условия $\mu'(z_1) = \mu$ при $z_1 = 0$ (см. ниже). Для нахождения C заметим, что

$$Y' \equiv Y((z - z_1)e^{i2\pi}) = TY(z - z_1) \tag{3.8}$$

$$X' \equiv X((z + z_1)e^{i2\pi}) = TX(z + z_1)$$

$$Y = AX, \quad T = \|t_{jk}\|, \quad t_{11} = t_{22} = e^{i2\pi\rho_1}, \quad t_{21} = i2\pi r e^{i2\pi\rho_1}, \ t_{12} = 0$$

а элементы α_{jk} матрицы A (связывающей решения X с решениями Y) могут быть определены из следующих уравнений:

$$Y_{z=0} = AX_{z=0}, \quad \frac{dY}{dz}_{z=0} = A\frac{dX}{dz}_{z=0} \tag{3.9}$$

Обход обеих особых точек по контуру *2* (фиг. 2) эквивалентен обходу по контуру *1*. Начиная с точки $z = 0$, обойдем $z = z_1$ решениями Y по правой петле контура *2*. Это дает $Y' = TY = TAX$. Обходя далее $z = -z_1$ решениями Y' по левой петле и пользуясь (3.8), имеем

$$C = TATA^{-1} \tag{3.10}$$

Подстановка (3.10) в (3.6) дает

$$\xi'^2 - \left(2 + \frac{\alpha_{12}^2 4\pi^2 r^2}{\det A}\right)\xi' + 1 = 0 \tag{3.11}$$

В итоге, пользуясь симметрией коэффициентов в Y и X (см. (3.4)), имеем (3.12)

$$\mu' = \frac{1}{8\pi i} \ln \varkappa + \frac{l}{4}, \quad \varkappa = \frac{2 - g + \sqrt{g(g-4)}}{2 - g - \sqrt{g(g-4)}}, \quad g = (4\pi r)^2 \left(x_1 \frac{dx_1}{dz}\right)^2_{z=0}$$

Как видно из (3.4), $g(z_1) = 0$ при $z_1 = 0$. Поэтому для выполнения условия $\mu_{z_1=0}' = \mu$ нужно положить $l = 3$. Как видно из предыдущего, μ' является сложной функцией f^2, f_*^2, z_m^2, α_0^2, c^2. Так как $g_{z_1=0} = 0$ и так как z_1 определяет расстояние между полюсами, то имеет смысл представить g в виде ряда по степеням z_1. Учитывая, что сами C_k (см. (3.4) зависят от z_1, и перегруппировывая члены, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_k(z_1) z_1^k = \nu_0 + \nu_1 z_1^2 + \nu_2 z_1^4 + \ldots$$

$$\nu_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_{0k}, \quad \nu_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \nu_{1k}, \quad \nu_2 = \sum_{k=3}^{\infty} \nu_{2k} \tag{3.13}$$

$$\nu_{0n} = -\frac{1}{n(n+2)}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \nu_{0k} p_{(n-k)}\right], \quad \nu_{1n} = -\frac{1}{n(n+2)}\left[\sum_{k-2}^{n-1} \nu_{1k} p_{(n-k)} + \beta_2 \nu_{0,(n-2)}\right]$$

$$\nu_{2n} = -\frac{1}{n(n+2)}\left[\sum_{k=3}^{n-1}\nu_{2k}p_{(n-k)} + \beta_2\nu_{1,(n-2)} + \beta_3\nu_{0,(n-3)} + \beta_4\nu_{0,(n-4)}\right]$$

$$\nu_{00} = 1, \qquad \nu_{12} = \Omega^2\alpha^2{}_0 / 8, \qquad \nu_{23} = 2/15\ \Omega^2 u^2$$

$$p_k = -(3k-5)2^{-(k+2)}, \quad \beta_2 = -\Omega^2\alpha_0^2, \quad \beta_3 = -2\Omega^2 u^2, \quad \beta_4 = \Omega^2 u^2$$

где ν_0, ν_1, ν_2... уже не зависят от z_1. Анализ выражений для ν_{0n}, ν_{1n}, ν_{2n} и численные подсчеты показывают, что, начиная с некоторого n, ν_{0n}, и числовые коэффициенты в ν_{1n}, ν_{2n} уменьшаются с ростом n не медленнее, чем члены геометрической прогрессии со знаменателем 1/2. Это позволяет при вычислении ν_0, ν_1, ν_2 ограничиться несколькими членами ряда и оценить остаток. В результате получается ряд

$$g = (4\pi r)^2 z_1^4 [1.7776 + 1.6011\alpha_0^2\Omega^2 z_1^2 + \\ + (0.5942\alpha_0^4\Omega^4 + 1.2168\Omega^2 u^2)\times z_1^4 + \ldots] \tag{3.14}$$

Изложенная выше схема определения связи между асимптотическими решениями может быть применена к более общему уравнению

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left[\frac{Q_1 z}{z^2 - z_1^2} + a_1 z\right]\frac{dy}{dz} + \left[\frac{Q_2 z^2}{(z^2 - z_1^2)^2} + \frac{Q_3}{z^2 - z_1^2} + a + bz^2\right]y = 0 \tag{3.15}$$

где Q_1, Q_2, Q_3, a_1, a, b — произвольные параметры.

4. Для уравнения (3.1)

$$\eta = \gamma + i\delta, \quad \gamma = -\frac{\pi}{2}\frac{z_m}{\lambda_*}\frac{f^2}{f_*^2}s, \quad \delta = \frac{\pi}{2}\frac{z_m}{\lambda_*}\left(1 - \frac{f^2}{f_*^2} + \alpha_0^2\frac{f^2}{f_*^2}\right) \tag{4.1}$$

Исследуем μ'. Из указанных выше свойств симметрии $C_k(z_1)$ относительно z_1, а также из (3.4), (3.12) следует, что $g \geqslant 0$ при $s = 0$. Пусть $s = 0$ и $0 \leqslant g \leqslant 4$. Тогда (см. (3.12)) $|\varkappa| = 1$, $0 \leqslant \arg\varkappa \leqslant 2\pi$ и соответственно $^3/_4 \leqslant \mu' \leqslant 1$, т. е. при указанном изменении g переменная под знаком логарифма совершает обход точки разветвления логарифма и данная ветвь переходит в другую. Поэтому при $g > 4$ нужно брать $\ln\varkappa + i2\pi$. Пусть $s = 0$, $g \geqslant 4$. В этом случае $|\varkappa| > 1$, $\arg\varkappa = 0$ и с учетом сказанного выше $\mu' = 1 + i\psi$, где $\psi \geqslant 0$.

Для выбора направления обхода полагаем

$$s = 0, \qquad 0 \leqslant g \leqslant 4 \qquad (^3/_4 \leqslant \mu' \leqslant 1)$$

Для этого случая из (2.6) с помощью формулы 8.334.2 работы [4] имеем

$$|D|^2 = \frac{1}{4}\frac{e^{-2\pi\delta}}{\cos^2\pi\mu' + \operatorname{sh}^2\pi\delta}, \quad |R|^2 = |D|^2(q_\pm 2\cos 2\pi\mu' + e^{2\pi\delta})^2 \tag{4.2}$$

Простая проверка полученных формул показывает, что для $^3/_4 \leqslant \mu' \leqslant 1$ имеем $|R|^2 + |D|^2 \geqslant 1$ при обходе по верхней полуплоскости и $|R|^2 + |D|^2 \leqslant 1$ при обходе по нижней полуплоскости, причем в обоих случаях $|R|^2 + |D|^2 = 1$ только для $\mu' = {}^3/_4$. Отсюда следует, что физически правильный результат дает обход по нижней полуплоскости. Поэтому правильные выражения для R и D в общем случае

$$D = (2\pi)^{-1}e^{i\pi(\eta-1)}\Gamma(^1/_2 + \mu' - \eta)\Gamma(^1/_2 - \mu' - \eta), \qquad R = De^{-i2\pi(\eta-{}^3/_4)} \tag{4.3}$$

Для случая $s = 0$, $g \geqslant 4$, ($\mu' = 1 + i\psi$) из (4.3) с помощью формул 8.331 и 8.332.2 работы [4] имеем

$$|D|^2 = \frac{1}{2}\frac{0.25-(\psi-\delta)^2}{0.25+(\psi+\delta)^2}\frac{e^{-2\pi\delta}}{\operatorname{ch}2\pi\psi + \operatorname{ch}2\pi\delta}, \quad |R|^2 = |D|^2 e^{4\pi\delta}$$

Если предположить $s = 0$ и $\eta = 0$ $(f = f_* \,/\, \cos\theta_0)$, то возможно дальнейшее упрощение выражений для R и D

$$D = -\frac{1}{2\cos\pi\mu'}, \quad R = -iD \tag{4.5}$$

Величина $|F|^2 = 1 - |R|^2 - |D|^2$ при $s = 0$ характеризует относительную долю энергии, которая поглощается в районе полюса. (Как видно из (4.2), (4.4), (4.5), $|F|^2 = 0$ только при $\mu' = {}^3/_4$). Поскольку именно в районе полюса $(\varepsilon' = 0,\ s = 0)$ происходит трансформация электромагнитной волны в плазменную (см. [1]), то для волн малой амплитуды утечку энергии в районе полюса при $s = 0$ можно объяснить трансформацией. С другой стороны, сам полюс возникает, если пренебречь пространственной дисперсией и следовательно отражает в предельном случае влияние отброшенных членов. Поэтому $|F|^2$ при $s = 0$ можно рассматривать как коэффициент трансформации электромагнитной волны в плазменную. Как видно из (1.1), (1.2), (1.3), (3.3), (3.4), H_x конечно в $z = \pm z_1$, в то время как величины E_y, E_z обращаются в этих точках в бесконечность как $(z + z_1)^{-1}$.

Из вида асимптотических решений, а также из (4.3) следует, что сдвиг фаз φ между отраженной и падающей волнами в начале слоя $(z = -z_m)$

$$\varphi = 2\pi\frac{z_m}{\lambda_*} - 2\delta\ln 2\pi\frac{z_m}{\lambda_*} + \pi\gamma - \frac{\pi}{2} - \arg\Gamma({}^1/_2 + \mu' - \eta)\,\Gamma({}^1/_2 - \mu' - \eta)$$

Отсюда при помощи формулы 8.362.1 работы [4] можно найти «время группового запаздывания» Δt_{**}

$$\Delta t_{**} = \frac{d\varphi}{d\omega} - -2\frac{d\delta}{d\omega}\ln 2\pi\frac{z_m}{\lambda_*} + \pi\frac{d\gamma}{d\omega} -$$

$$-\mathrm{Im}\,2\left\{\mu'\frac{d\mu'}{d\omega}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\chi_k} + \left[0{,}577215 + \frac{\sigma}{\chi_0} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\chi_0 + k\sigma}{k\chi_k}\right]\frac{d\eta}{d\omega}\right\} \tag{4.6}$$

$$\sigma = 1/2 - \eta, \qquad \chi_k = (\sigma + k)^2 - \mu'^2$$

5. Как видно из изложенного выше, характерной особенностью задач с волновым уравнением, имеющим полюса первого или второго порядка, или, точнее, конечное число регулярных особых точек в конечной части z-плоскости, является неоднозначность результатов. Устранить эту неоднозначность в общем случае можно следующим приемом. Выбирается решение на положительной (отрицательной) полуоси z вне области, где расположены все полюса уравнения. Далее совершается обход всей этой области по нижней и верхней полуплоскостям на отрицательную (положительную) полуось z. Эти пути, вообще говоря, неэквивалентны. Один из путей отбрасывается по физическим соображениям (например, он дает $|R| > 1$ или $(|R|^2 + |D|^2) > 1$ и т. д.). С учетом сказанного, R, D и т. д. однозначно определяются параметрами волнового уравнения.

Автор благодарит Р. З. Сагдеева за обсуждение и А. А. Галеева и А. М. Фридмана за обсуждение результатов.

Поступила 28 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., «Наука», 1967.
2. Денисов Н. Г. Об одной особенности поля электромагнитной волны, распространяющейся в неоднородной плазме. ЖЭТФ, 1956, т. 31, вып. 4.
3. Försterling K. und Wüster H. O. Über die Entstehung von Oberwellen in der Ionosphäre. J. Atm. Terr. Phys., 1951, Bd. 2, Nr. 1.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
5. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, Гостехиздат, 1939.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики, ч. 2. М., Гостехиздат, 1956, т. 3.