УДК 532.5:534.1

КАТЯЩИЕСЯ ВОЛНЫ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ

В. Ю. Ляпидевский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается односкоростное равновесное по давлениям в фазах движение газожидкостной среды с переменной массовой долей газовой фазы. Найдены условия существования нелинейных периодических волновых пакетов, аналогичных по структуре катящимся волнам в открытых наклонных каналах. Исследована структура бегущих волн в среде с непрерывным подводом энергии к газовой фазе.

Введение. Термин "катящиеся волны" используется в гидравлике открытых русел для описания близкого к периодическому волнового режима течения в наклонных каналах, в котором плавные участки течения разделены обрушивающимися гидравлическими прыжками или борами [1]. Особенностью таких течений является переход от докритического течения к сверхкритическому в системе координат, движущейся вместе с волной. Математическая теория катящихся волн вдоль наклонной плоскости построена в [2].

Возникновение квазипериодического существенно нелинейного волнового режима, соответствующего катящимся волнам, из неустойчивого равномерного течения характерно для широкого класса движений неоднородных сред. При течении газожидкостной среды в горизонтальных каналах и трубах развитие неустойчивости потока, приводящей к генерации катящихся волн конечной амплитуды, является одним из основных механизмов перехода от расслоенного режима течения к снарядному [3, 4]. Критерий нелинейной устойчивости катящихся волн в одно- и двухслойных течениях предложен в [5].

В данной работе построена модель газожидкостной среды с подводом и оттоком газа. Предложенная модель является простейшим вариантом неоднородной среды, в которой за счет непрерывного подвода энергии возбуждается автоколебательный процесс в виде периодических разрывных бегущих волн (катящихся волн). Рассматриваемая механическая система — аналог более сложной газожидкостной среды, в которой нелинейные колебания могут генерироваться за счет химических реакций с выделением тепла и фазовых переходов. Таким образом, создаются предпосылки для построения среды, в которой механическая энергия высвобождается в результате автоволнового процесса при непрерывной подкачке внутренней энергии (проблема "акустического лазера").

Математическая модель газожидкостной среды. Рассматривается односкоростная модель движения смеси жидкости и газа. Несущей фазой является идеальная несжимаемая жидкость плотности ρ_f. Пусть u — скорость жидкости, α — объемная доля жидкой фазы, m — масса газа в единице объема смеси, $\rho = m/(1-\alpha)$ — истинная плотность газа ($\rho \ll \rho_f$). Газ считается изотермическим: $p_g(\rho) = c_T^2\rho$, где $c_T \equiv \mathrm{const}$ — изотермическая скорость звука. В предположении равенства давлений в жидком и газовом компонентах ($p = p_g(\rho)$) уравнения движения принимают вид

$$\begin{gathered} \alpha_t + (\alpha u)_x = 0, \qquad u_t + (u^2/2 + p/\rho_f)_x = 0, \\ (m\alpha)_t + (m\alpha u)_x = \alpha(\varphi(\alpha) - \mu p). \end{gathered} \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-02-18004).

Последнее уравнение определяет баланс массы газовой фазы с учетом источников интенсивности $\varphi(\alpha)$ ($\varphi(\alpha) > 0$, $\varphi'(\alpha) > 0$, $\varphi''(\alpha) > 0$) и стока ($\mu = \mathrm{const}$). Поведение функции $\varphi(\alpha)$ свидетельствует о том, что с уменьшением объемной доли газовой фазы скорость притока газа увеличивается.

В безразмерных переменных можно положить $\rho_f = 1$, $c_T = 1$. Кроме того, дополнительным растяжением независимых переменных можно обеспечить $\mu = 1$. Система (1) гиперболическая. Имеется два семейства "звуковых" характеристик $dx/dt = \lambda^\pm = u \pm c$, $c = \sqrt{m\alpha/(1-\alpha)}$ и контактная характеристика $dx/dt = \lambda_0 = u$. Из дивергентной формы (1) следуют соотношения на разрывах

$$[\alpha(D-u)] = 0, \qquad [(D-u)^2/2 + p] = 0, \qquad [\alpha m(D-u)] = 0, \tag{2}$$

где $D = dx/dt$ — скорость распространения разрыва. Катящиеся волны для системы (1) будем искать в классе периодических бегущих волн.

Бегущие волны. Рассматриваются решения (1), зависящие от переменной $\xi = x - Dt$, $D \equiv \mathrm{const}$. Бегущие волны описываются системой уравнений

$$\begin{gathered} (D-u)\alpha = q \equiv \mathrm{const}, \qquad (D-u)^2/2 + m/(1-\alpha) = J \equiv \mathrm{const}, \\ (D-u)\,\frac{dm}{d\xi} = \frac{m}{1-\alpha} - \varphi(\alpha). \end{gathered} \tag{3}$$

Система (3) может быть сведена к одному уравнению

$$\frac{q}{\alpha}\,\frac{dm}{d\xi} = \frac{q\Delta}{\alpha}\,\frac{d\alpha}{d\xi} = F, \tag{4}$$

где $m = m(\alpha) = (J - q^2/(2\alpha^2))(1-\alpha)$; $\Delta = \Delta(\alpha) = (1-\alpha/2)q^2/\alpha^3 - J$; $F = F(\alpha) = J - q^2/(2\alpha^2) - \varphi(\alpha)$.

Для построения периодических решений, содержащих разрывы, необходимо, чтобы в непрерывном решении (3) докритическое решение за фронтом разрыва ($\Delta < 0$) переходило в сверхкритическое течение перед фронтом ($\Delta > 0$). Поэтому аналогично катящимся волнам в открытых каналах необходимо, чтобы существовало критическое значение $\alpha = y$ такое, что

$$\Delta(y) = 0. \tag{5}$$

Для существования непрерывного решения (3), удовлетворяющего (5), требуется также выполнение условия

$$F(y) = 0. \tag{6}$$

Заметим, что критическая точка y на интервале (0, 1) единственная, так как

$$\frac{d}{d\alpha}\,\Delta(\alpha) = -\frac{1}{2}\,\frac{q^2}{\alpha^3} - \Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)\frac{3q^2}{\alpha^4} < 0.$$

Поэтому $\Delta(\alpha) > 0$ при $\alpha < y$ и $\Delta(\alpha) < 0$ при $\alpha > y$.

Рассмотрим бегущие волны, обращенные вправо ($D > u$). В силу (5), (6) параметры q, J являются функциями одной переменной y:

$$q = \sqrt{y^3\varphi(y)/(1-y)}, \qquad J = (1 - y/2)\varphi(y)/(1-y). \tag{7}$$

Для построения периодической бегущей волны достаточно зафиксировать значение $\alpha = z$ перед разрывом, переводящим сверхкритическое течение ($\Delta(z) > 0$) в докритическое течение с объемной долей $\alpha = w$ ($z < w$, $\Delta(w) < 0$). Из соотношений на разрыве (2)

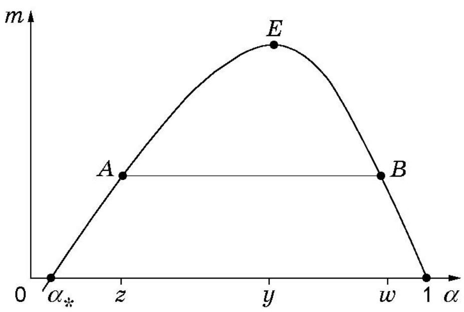

Рис. 1. Зависимость $m = m(\alpha)$

следует, что $m(z) = m(w)$. Для существования непрерывного решения (4), соединяющего состояния $\alpha = z$ и $\alpha = w$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$F(\alpha) > 0 \quad \text{при} \quad z < \alpha < y, \qquad F(\alpha) < 0 \quad \text{при} \quad y < \alpha < w. \tag{8}$$

В этом случае $d\alpha/d\xi > 0$, и периодическое решение соответствует переходу $ABEA$, показанному на рис. 1. Катящаяся волна состоит из разрыва AB и следующего за ним плавного участка BEA, на котором осуществляется переход от докритического течения BE к сверхкритическому течению EA. Структура построенной волны аналогична структуре катящихся волн в открытом канале [2].

Из соотношений (7), (8) следует необходимое условие существования катящихся волн

$$F'(y) = \varphi(y)/(1-y) - \varphi'(y) < 0. \tag{9}$$

Согласно теории кинематических волн [1] условие (9) означает, что скорость распространения одной из характеристик $\lambda_e^{\pm}$ равновесной модели

$$\alpha_t + (\alpha u)_x = 0, \qquad u_t + (u^2/2 + \varphi(\alpha))_x = 0,$$

полученной из (1) при $\varphi(\alpha) \equiv \rho$ ($c_T = 1$, $\rho_f = 1$, $\mu = 1$), превышает скорость распространения соответствующей характеристики $\lambda^{\pm}$ для системы (1). Для волн, обращенных вправо ($D > u$), это неравенство принимает вид

$$\lambda_e^+ = u + \sqrt{y\varphi'(y)} > u + \sqrt{\varphi(y)y/(1-y)} = \lambda^+. \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10) эквивалентны. Заметим, что условие (9) является достаточным для существования катящихся волн малой амплитуды. Далее, если соотношения (5), (6), (9) выполнены, то $F(\alpha) < 0$ при $y < \alpha < 1$, так как $F''(\alpha) = -3q^2/\alpha^4 - \varphi''(\alpha) < 0$. Поэтому условие (8) может нарушиться только на интервале (α_*, y), где $m(\alpha_*) = 0$; $\alpha_* = \sqrt{q^2/(2J)} = \sqrt{y^3/(2-y)}$ (рис. 1). Кроме того, $F(\alpha_*) = -\varphi(\alpha_*) < 0$, и существует единственное значение $\alpha = z_m$ на интервале (α_*, y), при котором функция $F(\alpha)$ обращается в нуль. При $z \to z_m$ длина волны стремится к бесконечности и реализуется волна предельной амплитуды.

Из сказанного выше следует, что профиль катящейся волны определяется параметрами y, z ($0 < z_m < z < y < 1$) при выполнении условия (9). В силу инвариантности уравнений (1) относительно преобразования Галилея свободным параметром является также скорость распространения волны D.

На рис. 2 представлена область существования катящихся волн (заштрихована) на плоскости (y, z) для функции $\varphi(\alpha) = 10\alpha^2 + 1$. Условие (9) выполняется при $0 < y_1 < y < y_2 < 1$. Кривые Γ^+, Γ^-, ограничивающие область существования катящихся волн, соответствуют волнам максимальной амплитуды. Кривая Γ^- задается уравнением $z = z_m(y)$, а кривая Γ^+ — уравнением $w = w_m(y)$, причем максимальная объемная доля жидкой фазы $w_m = w_m(y)$ в катящейся волне определяется из соотношений (2), т. е. $m(z_m) =$

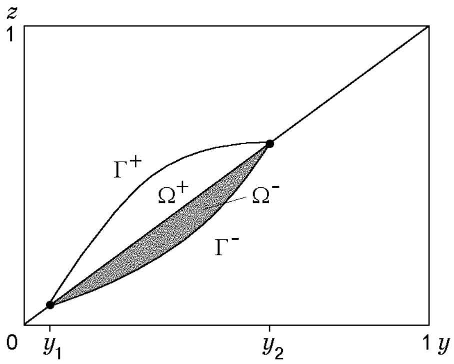

Рис. 2. Диаграмма катящихся волн

$m(w_m)$. При $y_1 < y < y_2$ диагональ квадрата соответствует катящимся волнам бесконечно малой амплитуды.

Для любых значений параметров y, z из области $\Omega^- = \{(y, z) : 0 < z_m < z < y,$ $y_1 < y < y_2\}$, ограниченной кривой Γ^- и диагональю квадрата, существует катящаяся волна с минимальной объемной долей жидкой фазы z и максимальной объемной долей w, причем точка (y, w) принадлежит области $\Omega^+ = \{(y, z) : y < w < w_m < 1,\ y_1 < y < y_2\}$, расположенной между кривой Γ^+ и диагональю квадрата (рис. 2).

Так же как для катящихся волн в открытом наклонном канале, вопрос об устойчивости цуга катящихся волн данной амплитуды является нетривиальным и требует отдельного рассмотрения. Полученный в [5] критерий нелинейной устойчивости катящихся волн, основанный на анализе гиперболичности уравнений модуляций, в принципе применим и для системы (1), однако это исследование выходит за рамки данной работы.

Заключение. Построена механическая модель газожидкостной среды, в которой при определенных условиях энергия, подводимая к полостям газа, за счет внутренней самоорганизации волнового движения может быть преобразована в кинетическую энергию движения смеси. Аналогия между периодическими решениями системы (1), построенными выше, и катящимися волнами в наклонных открытых каналах прослеживается достаточно четко. В то же время имеется аналогия между системой (1) и газожидкостной средой, в которой энерговыделение на фронте волны осуществляется за счет непрерывного подвода тепла к газовой фазе таким образом, что скорость нагрева увеличивается с уменьшением объема газа, а охлаждение осуществляется в результате теплообмена с несущей жидкой фазой. Итак, построена простейшая математическая модель газожидкостной среды с накачкой внутренней энергии, в которой возможно возбуждение нелинейного периодического волнового процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
2. **Dressler R. F.** Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels // Communs Pure Appl. Math. 1949. V. 2. P. 140–194.
3. **Barnea D., Taitel Y.** Interfacial and structural stability of separated flow // Intern. J. Multiphase Flow. 1994. V. 205. P. 387–414.
4. **Kordyban E.** Horizontal slug flow: a comparison of existing theories // Trans. ASME. J. Fluids Engng. 1990. V. 112. P. 74–83.
5. **Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

Поступила в редакцию 18/XII 2001 г.