$\mathcal{AMS}$ subject classification: 65M60, 65M15, 65M12

Сходимость H^1-смешанного метода конечных элементов Галеркина для параболических задач с уменьшенной регулярностью исходных данных

М. Трипати, Р. Кумар Синха

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Guwahati, Guwahati, 781039, India
E-mails: madhusmita.tripathy@gmail.com (Трипати М.), rajen@iitg.ernet.in (Синха Р. Кумар)

Трипати М., Синха Р. Кумар Сходимость H^1-смешанного метода конечных элементов Галеркина для параболических задач с уменьшенной регулярностью исходных данных // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 3. — С. 273–288.

Исследуется сходимость H^1-смешанного метода конечных элементов Галеркина для параболических задач в одномерном пространстве. Анализируются как полудискретные, так и полностью дискретные схемы при предположении об уменьшенной регулярности исходных данных. Точнее, для пространственно дискретной схемы установлены оценки ошибки порядка $\mathcal{O}(h^2t^{-1/2})$ при предположении, что начальная функция $p_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Кроме того, мы используем энергетический метод совместно с параболической дуальностью для получения оценок ошибки порядка $\mathcal{O}(h^2t^{-1})$, когда p_0 находится только в $H_0^1(\Omega)$. Анализируется дискретный во времени обратный метод Эйлера и устанавливаются границы ошибки почти оптимального порядка.

Ключевые слова: *параболические задачи, H^1-смешанный метод конечных элементов Галеркина, полудискретная схема, обратный метод Эйлера, оценки ошибки.*

Tripathy M., Sinha Rajen Kumar Convergence of H^1-Galerkin mixed finite element method for parabolic problems with reduced regularity of initial data // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 3. — P. 273–288.

We study the convergence of an H^1-Galerkin mixed finite element method for parabolic problems in one space dimension. Both semi-discrete and fully discrete schemes are analyzed assuming reduced regularity of the initial data. More precisely, for a spatially discrete scheme error estimates of order $\mathcal{O}(h^2t^{-1/2})$ for positive time are established assuming the initial function $p_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Further, we use an energy technique together with a parabolic duality argument to derive error estimates of order $\mathcal{O}(h^2t^{-1})$ when p_0 is only in $H_0^1(\Omega)$. A discrete-in-time backward Euler method is analyzed and almost optimal order error bounds are established.

Key words: *parabolic problems, H^1-Galerkin mixed finite element method, semi-discrete scheme, backward Euler method, error estimates.*

1. Введение

Мы будем рассматривать H^1-смешанный метод конечных элементов Галеркина для следующих однородных параболических задач:

$$p_t = (ap_x)_x, \quad (x,t) \in \Omega \times J, \tag{1.1}$$

$$p(0,t) = p(1,t) = 0, \quad t \in J, \tag{1.2}$$

$$p(x,0) = p_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

где $p_t = \frac{\partial p}{\partial t}$, $\Omega = (0,1)$, и J обозначает временной интервал $(0,T]$ при $T < \infty$. Коэффициент $a = a(x)$ предполагается гладким. Кроме того, a ограничено снизу и сверху положительными постоянными a_0 и a_1 соответственно, т. е.

$$a_0 \le a(x) \le a_1, \quad x \in \Omega. \tag{1.4}$$

Введя $u = ap_x$, расщепим задачу (1.1) на два уравнения первого порядка следующим образом:

$$p_t - u_x = 0, \qquad p_x = \alpha u, \tag{1.5}$$

где $\alpha = 1/a$. Для анализа ошибки нам потребуются следующие пространства [1]: $H_0^1(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) : w(0) = w(1) = 0\}$ и $V = H^1(\Omega)$. H^1-смешанная формулировка Галеркина такова: найти $\{u, p\} \in V \times H_0^1(\Omega)$ так, что

$$(\alpha u_t, \psi) + A(u, \psi) = \lambda(u, \psi) \ \ \forall\, \psi \in V, \tag{1.6}$$

$$(p_x, \phi_x) = (\alpha u, \phi_x) \ \ \forall\, \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{1.7}$$

при $u_0 = u(x, 0) = a\frac{dp_0}{dx}$. Для первого члена в (1.6) мы использовали интегрирование по частям относительно x и граничные условия Дирихле $p_t(0,t) = p_t(1,t) = 0$. Билинейная форма $A(\cdot,\cdot)$ задается как

$$A(u, v) = (u_x, v_x) + \lambda(u, v).$$

Отметим, что λ выбрано таким образом, чтобы $A(\cdot,\cdot)$ была V-коэрцитивной, т. е.

$$A(v, v) \ge c_0 \|v\|_1^2, \quad v \in V,$$

для некоторого $c_0 > 0$. Кроме того, $A(\cdot,\cdot)$ ограничена. То есть имеется положительная постоянная C такая, что $|A(u, v)| \le C\|u\|_1\|v\|_1$.

Пусть V_h и W_h — конечномерные подпространства V и $H_0^1(\Omega)$ соответственно. Предполагается, что конечномерные подпространства V_h и W_h удовлетворяют следующим свойствам аппроксимации:

$$\inf_{v_h \in V_h} \{\|v - v_h\| + h\|v - v_h\|_1\} \le Ch^2 \|v\|_{H^2(\Omega)} \ \ \forall\, v \in H^2(\Omega)$$

и

$$\inf_{w_h \in W_h} \{\|w - w_h\| + h\|w - w_h\|_1\} \le Ch^2 \|w\|_{H^2(\Omega)} \ \ \forall\, w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Полудискретная H^1-смешанная конечно-элементная аппроксимация Галеркина состоит в нахождении пары $\{u_h, p_h\} \in V_h \times W_h$ такой, что

$$(\alpha u_{h,t}, \psi_h) + A(u_h, \psi_h) = \lambda(u_h, \psi_h) \ \ \forall\, \psi_h \in V_h, \tag{1.8}$$

$$(p_{hx}, \phi_{hx}) = (\alpha u_h, \phi_{hx}) \ \ \forall\, \phi_h \in W_h \tag{1.9}$$

с исходными данными $u_h(0) = L_h u_0$, где $L_h : L^2(\Omega) \longrightarrow V_h$ — стандартная проекция L^2. Поскольку матрица жесткости, связанная с $(p_{h,x}, \phi_{h,x})$, является положительно определенной, система имеет единственное решение для подходящего начального условия [4].

Желая расширить смешанный метод наименьших квадратов [13] для параболических задач, автор работы [10] ввел H^1-смешанную конечно-элементную процедуру Галеркина. Когда $\Omega = (0,1)$, т. е. для одномерной параболической задачи, показано (см. [10]), что

$$\|(p - p_h)(t)\| + \|(u - u_h)(t)\| \le Ch^2 \left(\|p\|_{L^\infty(H^2)} + \|u\|_{L^\infty(H^2)} + \|u_t\|_{L^2(H^2)}\right), \tag{1.10}$$

где p_h и u_h — H^1-смешанные конечно-элементные аппроксимации Галеркина для решения p и его потока $u = ap_x$ соответственно. *Априорные* оценки ошибки в (1.10) требуют, чтобы $u_t \in H^2(\Omega)$, что, в свою очередь, требует, чтобы $p_0 \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Поэтому естественно задать вопрос, можно ли ожидать порядок сходимости $\mathcal{O}(h^2)$, как в (1.10), когда p_0 имеет меньшую регулярность. В данной статье сделана попытка анализа сходимости в предположении, что начальная функция p_0 имеет меньшую регулярность. Точнее, для однородной параболической задачи оценки ошибки порядка $\mathcal{O}(h^2 t^{-1/2})$ для решения и его потока устанавливаются для положительного времени с исходной функцией $p_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (см. теорему 3.1). Кроме того, оценки ошибки порядка $\mathcal{O}(h^2 t^{-1})$ как для решения, так и для его потока получаются для положительного времени при p_0 всего лишь в $H_0^1(\Omega)$ (см. теорему 3.2). Поскольку свойство сглаживания решения играет значительную роль в анализе ошибки, мы получим некоторые *априорные* границы в терминах исходных данных в различных нормах Соболева. Важные технические средства, используемые в нашем анализе ошибки, — это нестандартная энергетическая формулировка и параболическая дуальность. Также рассматривается анализ полной дискретной ошибки на основе схемы обратной временной дискретизации Эйлера и получены границы ошибки почти оптимального порядка. Анализ, представленный в данной статье, легко распространить для параболических задач с двумя пространственными переменными.

По сравнению с классическим смешанным методом конечных элементов [2, 3, 5, 7, 9, 14] H^1-смешанный метод Галеркина не зависит от условия непротиворечивости Ладыженской–Бабушки–Брецци (ЛББ-непротиворечивости) [10, 12]. Аппроксимирующие конечно-элементные подпространства V_h и W_h могут иметь различные степени многочленов. В отличие от стандартного H^1-метода Галеркина [6, 11, 15], $\mathcal{C}^1$-непрерывность в аппроксимирующих конечно-элементных пространствах может быть ослаблена и позволяет нам свободно работать с привлекательными с точки зрения вычислений линейными элементами.

Статья построена следующим образом. В пункте 2 мы получим некоторые *априорные* границы решения u и оценки устойчивости его полудискретной аппроксимации u_h. Полудискретные оценки ошибки для H^1-смешанного метода конечных элементов Галеркина в предположении уменьшенной регулярности начальной функции получены в п. 3. Анализ полностью дискретного обратного метода Эйлера представлен в п. 4.

В данной статье C обозначает положительную общую постоянную, не зависящую от параметров сетки.

2. Априорные границы

Получим некоторые *априорные* границы для переменной потока u, удовлетворяющей (1.5). Получим также некоторые оценки устойчивости для его полудискретного решения u_h, удовлетворяющего (1.8) и (1.9). Эти оценки необходимы для нашего анализа ошибки.

Лемма 2.1. *Пусть u — решение* (1.5) *при* $u_0(x) = u(x,0) = a\frac{dp_0}{dx}$ *и пусть* $0 \le i, j, k \le 2$.
(а) *если* $0 \le k + 2j - i \le 1$, *то*

$$t^i \left\| \frac{\partial^j u(t)}{\partial t^j} \right\|_k^2 \le C \|u_0\|_{k+2j-i}^2;$$

(б) *если* $0 \le k + 2j - i - 1 \le 1$, *то*

$$\int_0^t s^i \left\| \frac{\partial^j u(s)}{\partial s^j} \right\|_k^2 ds \le C \|u_0\|_{k+2j-i-1}^2.$$

Доказательство. Доказательства этих оценок являются стандартными для параболических задач и легко могут быть получены с использованием доказательств из [8] или [15]. □

Следуя линии рассуждений леммы 2.1, докажем оценки устойчивости u_h, удовлетворяющие (1.8) и (1.9).

Лемма 2.2. *Предположим, что* $u_0 \in H^1(\Omega)$ *при* $u_h(0) = L_h u_0$. *Тогда существует положительная общая постоянная* C *такая, что*

(а) $\displaystyle\int_0^t \|u_{h,s}(s)\|^2 ds + \|u_h(t)\|_1^2 \le C\|u_0\|_1^2$; (б) $\displaystyle\int_0^t s\|u_{h,s}(s)\|^2 ds + t\|u_h(t)\|_1^2 \le C\|u_0\|^2$;

(в) $\displaystyle\int_0^t s\|u_{h,s}(s)\|_1^2 ds \le C\|u_0\|_1^2$; (г) $\displaystyle\int_0^t s^2\|u_{h,ss}(s)\|^2 ds \le C\|u_0\|_1^2$.

3. Анализ полудискретной схемы

В данном пункте обсудим анализ ошибки для полудискретного H^1-смешанного метода Галеркина, когда исходная функция $p_0 \in H^i(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2$.

3.1. Оценки ошибки при $p_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

Сначала получим оценки ошибки во временных точках для решения p и потока u в норме L^2, когда начальные данные $p_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Используя (1.6)–(1.9), получим следующие уравнения для ошибки:

$$(\alpha(u - u_h)_t, \psi_h) + A(u - u_h, \psi_h) = \lambda(u - u_h, \psi_h) \ \ \forall\, \psi_h \in V_h, \tag{3.1}$$

$$((p - p_h)_x, \phi_{hx}) = (\alpha(u - u_h), \phi_{hx}) \ \ \forall\, \phi_h \in W_h. \tag{3.2}$$

Определим эллиптические проекции $\tilde{u}_h : [0, T] \longrightarrow V_h$ и $\tilde{p}_h : [0, T] \longrightarrow W_h$ посредством

$$A(u - \tilde{u}_h, \psi_h) = 0 \ \ \forall\, \psi_h \in V_h, \tag{3.3}$$

$$((p - \tilde{p}_h)_x, \phi_{hx}) = 0 \ \ \forall\, \phi_h \in W_h \tag{3.4}$$

соответственно. Поскольку прямое сравнение u, u_h и p, p_h не дает оптимального порядка сходимости, разобьем ошибки $u - u_h$ и $p - p_h$ следующим образом:

$$u - u_h = (u - \tilde{u}_h) + (\tilde{u}_h - u_h) := \eta + \theta_h \quad \text{и} \quad p - p_h = (p - \tilde{p}_h) + (\tilde{p}_h - p_h) := \rho + \rho_h.$$

Хорошо известно [10], что η и ρ удовлетворяют следующим оценкам:

$$\|\eta\| \le Ch^2\|u\|_2 \ \text{ и } \ \|\eta_t\| \le Ch^2\|u_t\|_2, \tag{3.5}$$

$$\|\rho\| \le Ch^2\|p\|_2 \ \text{ и } \ \|\rho\| \le Ch^2\|p_t\|_2. \tag{3.6}$$

Используя (3.1), (3.2) и вспомогательные проекции (3.3), (3.4), получим следующие уравнения для ошибки в θ_h и ρ_h:

$$(\alpha\theta_{h,t}, \psi_h) + A(\theta_h, \psi_h) = \lambda(\eta, \psi_h) + \lambda(\theta_h, \psi_h) - (\alpha\eta_t, \psi_h), \quad \psi_h \in V_h, \tag{3.7}$$

$$(\rho_{hx}, \phi_{hx}) = (\alpha(\eta + \theta_h), \phi_{hx}), \quad \phi_h \in W_h. \tag{3.8}$$

Поскольку в (3.7) присутствует член η_t, стандартная энергетическая формулировка требует более высокой регулярности для потока u, а это, в свою очередь, требует более высокой регулярности для p. Поэтому мы используем следующую нестандартную энергетическую формулировку, описываемую ниже. Определим $\hat{\theta}(t)$ следующим образом:

$$\hat{\theta}(t) = \int_0^t \theta(\tau)\, d\tau, \quad t \in \bar{J}.$$

Отметим, что $\hat{\theta}(0) = 0$ и $\hat{\theta}_t(t) = \theta(t)$. Интегрируя (3.8) от 0 до t, мы получим

$$(\hat{\rho}_{hx}, \phi_{hx}) = (\alpha\hat{\eta}, \phi_{hx}) + (\alpha\hat{\theta}_h, \phi_{hx}). \tag{3.9}$$

Теперь проинтегрируем (1.6) и (1.8) от 0 до t. Тогда, используя $u_h(0) = L_h u_0$, где $L_h : L^2(\Omega) \longrightarrow V_h$ — стандартная проекция L^2, получим

$$(\alpha\theta_h, \psi_h) + A(\hat{\theta}_h, \psi_h) = \lambda(\hat{\eta}, \psi_h) + \lambda(\hat{\theta}_h, \psi_h) - (\alpha\eta, \psi_h). \tag{3.10}$$

Основной результат этого пункта содержится в представленной ниже теореме.

Теорема 3.1. *Пусть* $\{u, p\}$ *и* $\{u_h, p_h\}$ *— решения* (1.6), (1.7) *и* (1.8), (1.9) *соответственно. Также пусть* $p_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. *Тогда имеется положительная постоянная* C, *не зависящая от* h, *такая, что*

$$\|u(t) - u_h(t)\| \le Ch^2 t^{-1/2} \|u_0\|_1 \le Ch^2 t^{-1/2} \|p_0\|_2, \quad t > 0, \tag{3.11}$$

$$\|p(t) - p_h(t)\| \le Ch^2 t^{-1/2} \|p_0\|_2, \quad t > 0. \tag{3.12}$$

Доказательство вышеупомянутой теоремы требует некоторой подготовки. Ниже мы представим ряд вспомогательных результатов, которые приведут к желаемой оценке.

Лемма 3.1. *Пусть* ρ_h *удовлетворяет* (3.8). *Тогда имеется положительная постоянная* C, *не зависящая от* h, *такая, что*

$$\|\rho_h\| \le C\left(\|\eta\| + \|\theta_h\|\right).$$

Доказательство. Принимая $\phi_h = \rho_h$ в (3.8) и используя неравенство Коши–Шварца, получим

$$\|\rho_{hx}\|^2 = (\alpha\eta, \rho_{hx}) + (\alpha\theta_h, \rho_{hx}) \le C(\|\eta\|^2 + \|\theta_h\|^2) + \frac{1}{2}\|\rho_{hx}\|^2 \le C(\|\eta\|^2 + \|\theta_h\|^2).$$

Поскольку $\rho_h \in H_0^1(\Omega)$, использование неравенства Пуанкаре завершает доказательство. □

Лемма 3.2. *Пусть* θ_h *удовлетворяет* (3.7). *Тогда имеется положительная постоянная* C *такая, что*

$$t\|\theta_h\|^2 + \int_0^t s\|\theta_h\|_1^2\,ds \le C\left[\int_0^t (s^2\|\eta_s\|^2 + s\|\eta\|^2)\,ds + \int_0^t \|\theta_h\|^2 ds\right].$$

Доказательство. Возьмем $\psi_h = t\theta_h$ в (3.7) для получения

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{t\|\alpha^{1/2}\theta_h\|^2\} + c_0 t\|\theta_h\|_1^2 \le C(t\|\eta\|^2 + t\|\theta_h\|^2 + t^2\|\eta_t\|^2 + \|\theta_h\|^2).$$

Интегрирование от 0 до t приводит к

$$t\|\theta_h\|^2 + \int_0^t s\|\theta_h\|_1^2\,ds \le C\left[\int_0^t (s^2\|\eta_s\|^2 + s\|\eta\|^2)\,ds + \int_0^t \|\theta_h\|^2 ds\right] + C\int_0^t s\|\theta_h\|^2 ds.$$

Использование леммы Гроноулла завершает доказательство. □

Аналогичным образом, задав $\psi_h = \theta_h$ в (3.10), легко получить следующую оценку.

Лемма 3.3. *Пусть* θ_h *удовлетворяет* (3.10). *Тогда имеется положительная постоянная* C *такая, что*

$$\int_0^t \|\theta_h\|^2 ds + \|\hat{\theta}_h\|_1^2 \le C \int_0^t \left(\|\hat{\eta}\|^2 + \|\eta\|^2\right) ds.$$

Доказательство теоремы 3.1. Используя неравенство треугольника, мы получим

$$\|u(t) - u_h(t)\| \le \|\eta(t)\| + \|\theta_h(t)\|. \tag{3.13}$$

Используя лемму 3.3 в лемме 3.2, получим

$$t\|\theta_h\|^2 \le C \left[\int_0^t s^2\|\eta_s\|^2 ds + \int_0^t s\|\eta\|^2 ds + \int_0^t \|\eta\|^2 ds + \int_0^t \|\hat{\eta}\|^2 ds\right].$$

Поскольку

$$\int_0^t \|\hat{\eta}\|^2 ds \le C \int_0^t \|\eta\|^2 ds$$

и на основании свойства аппроксимации (3.5), мы получим

$$t\|\theta_h\|^2 \le Ch^4 \left[\int_0^t s^2\|u_s\|_2^2\, ds + \int_0^t s\|u\|_2^2\, ds + \int_0^t \|u\|_2^2\, ds\right]. \tag{3.14}$$

Теперь, используя *априорные* оценки леммы 2.1, получим

$$\|\theta_h\| \le Ch^2 t^{-1/2}\|u_0\|_1 \tag{3.15}$$

$$\|\eta\| \le Ch^2\|u\|_2 \le Ch^2 t^{-1/2}\|u_0\|_1. \tag{3.16}$$

Объединив (3.13), (3.15) и (3.16), легко можно получить первое неравенство (3.11). Для оценивания (3.12) вновь используем неравенство треугольника и лемму 3.1 для получения

$$\|p(t) - p_h(t)\| \le \|\rho(t)\| + \|\rho_h(t)\| \le \|\rho(t)\| + C(\|\eta(t)\| + \|\theta_h(t)\|). \tag{3.17}$$

Из свойства аппроксимации (3.6) мы имеем

$$\|\rho\| \le Ch^2\|p\|_2. \tag{3.18}$$

Отметим, что

$$\|p\|_2^2 = \|p\|^2 + \|p_x\|^2 + \|p_{xx}\|^2 \le C(\|p_x\|^2 + \|p_{xx}\|^2),$$

где на втором шаге мы использовали неравенство Пуанкаре $\|p\| \le C\|p_x\|$. Поскольку $u = ap_x$, то

$$\|p\|_2 \le C(\|u\| + \|u_x\|) = C\|u\|_1. \tag{3.19}$$

Используя (3.19) в (3.18) и *априорную* оценку леммы 2.1, имеем

$$\|\rho\| \le Ch^2\|u_0\|_1. \tag{3.20}$$

Вставив (3.15), (3.16) и (3.20) в (3.17), мы получим

$$\|p(t) - p_h(t)\| \le Ch^2 t^{-1/2}\|u_0\|_1 \le Ch^2 t^{-1/2}\|p_0\|_2. \qquad \square$$

3.2. Оценки ошибки при $p_0 \in H_0^1(\Omega)$

Теперь попробуем получить оценки ошибки во временных точках для $u-u_h$ и $p-p_h$, когда исходные данные $p_0 \in H_0^1(\Omega)$. Пусть V^* — дуальное пространство V с нормой

$$\|v\|_{V^*} = \sup_{\psi \in V} \frac{(v,\psi)}{\|\psi\|_V}.$$

Основное средство, используемое в нашем анализе ошибки, — представленная ниже параболическая дуальность [5, 8]: для фиксированных $t > 0$ и $g \in V$ пусть $\{v(s), q(s)\} : [0,t) \longrightarrow V \times H_0^1(\Omega)$ — решение следующей смешанной задачи:

$$(\alpha v_s, \psi) - A(v,\psi) = -\lambda(v,\psi) \ \forall\, \psi \in V, \quad s < t, \tag{3.21}$$

$$(q_x, \phi_x) = (\alpha v, \phi_x) \ \forall\, \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{3.22}$$

при $v(t) = g$ и $v(s) = aq_x(s)$. Соответствующая полудискретная H^1-смешанная конечно-элементная аппроксимация Галеркина состоит в следующем: найти $\{v_h(s), q_h(s)\} : [0,t) \longrightarrow V_h \times W_h$ так, что

$$(\alpha v_{h,s}, \psi_h) - A(v_h,\psi_h) = -\lambda(v_h,\psi_h) \ \forall\, \psi_h \in V_h, \quad s < t, \tag{3.23}$$

$$(q_{hx}, \phi_{hx}) = (\alpha v_h, \phi_{hx}) \ \forall\, \phi_h \in W_h \tag{3.24}$$

при $v_h(t) = L_h g$.

Основной результат этого пункта содержится в представленной ниже теореме.

Теорема 3.2. *Пусть* $\{u,p\}$ *и* $\{u_h,p_h\}$ *— решения* (1.6), (1.7) *и* (1.8), (1.9) *соответственно. Также пусть* $p_0 \in H_0^1(\Omega)$ *и* $u_h(0) = L_h u_0$. *Тогда имеется положительная постоянная* C, *не зависящая от* h, *такая, что*

$$\|u(t) - u_h(t)\| \le Ch^2 t^{-1} \|p_0\|_1, \quad t > 0, \tag{3.25}$$

$$\|p(t) - p_h(t)\| \le Ch^2 t^{-1} \|p_0\|_1, \quad t > 0. \tag{3.26}$$

Доказательство вышеприведенной теоремы требует некоторой подготовки. Используя (3.21)–(3.24) и (1.6)–(1.9), отметим, что

$$\frac{d}{ds}\{(\alpha u(s), v(s)) - (\alpha u_h(s), v_h(s))\} = 0. \tag{3.27}$$

Интегрируя (3.27) от 0 до t, получим

$$(\alpha u(t), v(t)) - (\alpha u_h(t), v_h(t)) = (\alpha u(0), v(0)) - (\alpha u_h(0), v_h(0)). \tag{3.28}$$

При $u_h(0) = L_h u_0$ и $v_h(t) = L_h v(t) = L_h g$ имеем

$$(\alpha e_2(t), g) = (\alpha u_0, \tilde{e}_2(0)), \tag{3.29}$$

где $e_2(t) = u(t) - u_h(t)$ и $\tilde{e}_2(s) = v(s) - v_h(s)$ — ошибки, связанные с прямой задачей (1.6)–(1.9) и обратной задачей (3.21)–(3.24) соответственно. Здесь для члена в правой части (3.28) мы использовали тот факт, что

$$(\alpha L_h u_0, v_h(0)) = (L_h u_0, \alpha v_h(0)) = (u_0, \alpha v_h(0)) = (\alpha u_0, v_h(0)).$$

Следующая лемма оказывается удобной.

Лемма 3.4. *Если* $p_0 \in H_0^1(\Omega)$, *то*

$$\|e_2(t)\|_{V^*} \le Ch^2 t^{-1/2}\|u_0\| \le Ch^2 t^{-1/2}\|p_0\|_1. \tag{3.30}$$

Доказательство. Из теоремы 3.1 мы имеем

$$\|e_2(t)\| \le Ch^2 t^{-1/2}\|u_0\|_1. \tag{3.31}$$

Из (3.29) видно, что

$$|(\alpha e_2(t), g)| = |(\alpha u_0, \tilde{e}_2(0))| \le C\|u_0\|\|\tilde{e}_2(0)\|. \tag{3.32}$$

Применив оценку (3.31) к обратной задаче (3.21)–(3.24), мы получим

$$\|\tilde{e}_2(s)\| \le Ch^2(t-s)^{-1/2}\|g\|_1, \quad s < t.$$

Как прямой результат приведенной выше оценки мы получим

$$\|\tilde{e}_2(0)\| \le Ch^2 t^{-1/2}\|g\|_1. \tag{3.33}$$

Теперь оценки (3.32) и (3.33) дают

$$|(e_2(t), \alpha g)| \le Ch^2 t^{-1/2}\|g\|_1\|u_0\| \le Ch^2 t^{-1/2}\|\alpha g\|_1\|u_0\|,$$

где мы использовали $\|g\|_1 = \|\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right)g\|_1 \le C\|\alpha g\|_1$. □

Доказательство теоремы 3.2. Интегрируя (3.27) от $t/2$ до t, получим

$$\begin{aligned}(\alpha u(t), v(t)) - (\alpha u_h(t), v_h(t)) &= (\alpha u(t/2), v(t/2)) - (\alpha u_h(t/2), v_h(t/2)) \\ &= (\alpha e_2(t/2), v(t/2)) + (\alpha u_h(t/2), \tilde{e}_2(t/2)).\end{aligned}$$

Поскольку $v(t) = g$ и $v_h(t) = L_h g$, то

$$\begin{aligned}|(\alpha e_2(t), g)| &= |(\alpha(u(t) - u_h(t)), g)| \\ &\le C\|e_2(t/2)\|_{V^*}\|v(t/2)\|_1 + C\|\tilde{e}_2(t/2)\|_{V^*}\|u_h(t/2)\|_1.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Оценка (3.30), примененная к $e_2(t/2)$ и $\tilde{e}_2(t/2)$, дает

$$\|e_2(t/2)\|_{V^*} \le Ch^2 t^{-1/2}\|u_0\| \quad \text{и} \quad \|\tilde{e}_2(t/2)\|_{V^*} \le Ch^2 t^{-1/2}\|g\|.$$

Используя соответствующие модификации в доказательстве оценки (а) в лемме 2.1, легко получить следующую *априорную* оценку для обратного решения v:

$$\|v(s)\|_1 \le C(t-s)^{-1/2}\|g\|, \quad s < t,$$

и, следовательно, $\|v(t/2)\|_1 \le Ct^{-1/2}\|g\|$. Оценка (б) из леммы 2.2 дает $\|u_h(t/2)\|_1 \le Ct^{-1/2}\|u_0\|$. Используя оценки, приведенные выше в (3.34), получим

$$|(e_2(t), \alpha g)| \le Ch^2 t^{-1}\|u_0\|\|g\| \le Ch^2 t^{-1}\|u_0\|\|\alpha g\|,$$

и это доказывает первую оценку (3.25). Теперь, чтобы доказать (3.26), используя (3.2) и неравенство Коши–Шварца, мы имеем

$$(e_{1,x}, \phi_{h,x}) = (\alpha e_2, \phi_{h,x}) \le C\|e_2\|\|\phi_{h,x}\|,$$

где $e_1(t) = (p - p_h)(t)$ и $e_2(t) = (u - u_h)(t)$. Таким образом,

$$\|e_{1,x}\| \le C\|e_2\|.$$

Поскольку $e_1 \in H_0^1(\Omega)$, использование неравенства Пуанкаре и (3.25) завершает доказательство. $\square$

4. Анализ полностью дискретной схемы

В данном пункте мы рассмотрим временную дискретизацию задачи (1.8), (1.9) с непрерывным временем, используя обратную разностную схему Эйлера. Будут найдены границы *априорной* ошибки для решения и его потока.

Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = T$ — разбиение временного интервала $[0, T]$ с длиной шага $\Delta t = T/M$ для некоторого положительного целого числа M. Для гладкой функции ϕ на $[0, T]$ определим $\phi^n = \phi(t_n)$ и $\partial_t \phi^n = (\phi^n - \phi^{n-1})/\Delta t$. Пусть U^n и P^n — аппроксимации u и p при $t = t_n$ соответственно. Тогда дискретную задачу на основе обратного метода Эйлера можно сформулировать следующим образом: для $n \ge 1$ найти $\{U^n, P^n\} \in V_h \times W_h$ так, что

$$(\alpha \partial_t U^n, \psi_h) + A(U^n, \psi_h) = \lambda(U^n, \psi_h) \;\; \forall \psi_h \in V_h, \tag{4.1}$$
$$(P_x^n, \phi_{hx}) = (\alpha U^n, \phi_{hx}) \;\; \forall \phi_h \in W_h \tag{4.2}$$

при данном $\{U^0, P^0\} \in V_h \times W_h$.

4.1. Оценки ошибки при $p_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

Сначала получим оценки L^2-ошибки для $u(t_n) - U^n$ и $p(t_n) - P^n$, когда исходная функция $p_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Используя (4.1), (4.2) и (1.8), (1.9), получим следующие уравнения для ошибки:

$$(\alpha \partial_t (u_h(t_n) - U^n), \psi_h) + A(u_h(t_n) - U^n, \psi_h) = \lambda(u_h(t_n) - U^n, \psi_h) + (\sigma(t_n), \psi_h), \tag{4.3}$$
$$(p_{hx}(t_n) - P_x^n, \phi_{hx}) = (\alpha(u_h(t_n) - U^n), \phi_{hx}) \tag{4.4}$$

для всех $\psi_h \in V_h$ и $\phi_h \in W_h$. Здесь $\sigma(t_n) = \alpha(\partial_t u_h(t_n) - u_{h,t}(t_n))$. Положим $u_h(t_n) - U^n = \zeta^n$ и $p_h(t_n) - P^n = \xi^n$. Тогда уравнения для ошибки (4.3), (4.4) сводятся к

$$(\alpha \partial_t \zeta^n, \psi_h) + A(\zeta^n, \psi_h) = \lambda(\zeta^n, \psi_h) + (\sigma^n, \psi_h), \tag{4.5}$$
$$(\xi_x^n, \phi_{hx}) = (\alpha \zeta^n, \phi_{hx}). \tag{4.6}$$

Наряду со стандартной энергетической формулировкой мы также используем нестандартную энергетическую формулировку, описываемую ниже.

Определим $\tilde{\zeta}^n = \Delta t \sum_{j=0}^{n} \zeta^j$. Ясно, что $\partial_t \tilde{\zeta}^n = \zeta^n$ и $\tilde{\zeta}^0 = \zeta^0 = 0$. Используем тот факт, что $\Delta t \sum_{n=1}^{m} A(\zeta^m, \psi_h) = A(\tilde{\zeta}^m, \psi_h)$ для получения

$$(\alpha \zeta^m, \psi_h) + A(\tilde{\zeta}^m, \psi_h) = \lambda(\tilde{\zeta}^m, \psi_h) + Q_1^m(u_h)(\psi_h) + Q_2^m(u_h)(\psi_h), \tag{4.7}$$

где
$$Q_1^m(u_h)(\psi_h) = \Delta t \sum_{n=1}^{m} A(u_h(t_n), \psi_h) - \int_0^{t_m} A(u_h(s), \psi_h)\, ds,$$
$$Q_2^m(u_h)(\psi_h) = \int_0^{t_m} \lambda(u_h(s), \psi_h)\, ds - \lambda \Delta t \sum_{n=1}^{m} (u_h(t_n), \psi_h).$$

Теперь сформулируем основной результат этого пункта в приводимой ниже теореме.

Теорема 4.1. *Пусть* $\{u, p\}$ *— точное решение* (1.6), (1.7) *и* $\{U^n, P^n\}$ *— аппроксимация обратного метода Эйлера, определяемая по формулам* (4.1), (4.2). *Тогда для* $n \geq 1$ *и* $p_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *мы имеем*

$$\|u(t_n) - U^n\| \leq C\left(h^2 + \Delta t \left(1 + \log \frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2}\right) t_n^{-1/2} \|p_0\|_2, \quad t_n > 0, \tag{4.8}$$
$$\|p(t_n) - P^n\| \leq C\left(h^2 + \Delta t \left(1 + \log \frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2}\right) t_n^{-1/2} \|p_0\|_2, \quad t_n > 0. \tag{4.9}$$

Доказательство приведенной выше теоремы требует следующих дополнительных результатов. Первый результат (лемма 4.1) можно получить, если положить $\psi_h = t_n \zeta^n$ в (4.5) и выбрать $\psi_h = \zeta^m$ в (4.7) для получения второго результата (лемма 4.2). Подробности опускаются.

Лемма 4.1. *Пусть* ζ^n *удовлетворяет* (4.5). *Тогда имеется положительная постоянная* C *такая, что*

$$t_m \|\zeta^m\|^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{m} t_n \|\zeta^n\|_1^2 \leq C \left(\Delta t \sum_{n=1}^{m} t_n^2 \|\sigma^n\|^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{m} \|\zeta^n\|^2 \right).$$

Лемма 4.2. *Пусть* ζ^m *удовлетворяет* (4.7). *Тогда имеется положительная постоянная* C *такая, что*

$$\Delta t \sum_{m=1}^{l} \|\zeta^m\|^2 + \|\tilde{\zeta}^l\|_1^2 \leq \left| \Delta t \sum_{m=1}^{l} Q_2^m(u_h)(\zeta^m) \right| + \left| \Delta t \sum_{m=1}^{l} Q_2^m(u_h)(\zeta^m) \right|.$$

Лемма 4.3. *Имеется положительная общая постоянная* C *такая, что*

$$\left| \Delta t \sum_{m=1}^{l} Q_1^m(u_h)(\zeta^m) \right| \leq C(\Delta t)^2 \left(1 + \log \frac{1}{\Delta t}\right) \|u_0\|_1^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\zeta}^l\|_1^2.$$

Доказательство. Поскольку $\tilde{\zeta}^0 = 0$, прежде всего отметим, что

$$\left| \Delta t \sum_{m=1}^{l} Q_1^m(u_h)(\zeta^m) \right| = \left| \Delta t \sum_{m=1}^{l} Q_1^m(u_h)(\partial_t \tilde{\zeta}^m) \right| = \left| \Delta t \sum_{m=1}^{l} \partial_t \{Q_1^m(u_h)(\tilde{\zeta}^m)\} \right| = \left| Q_1^l(u_h)(\tilde{\zeta}^l) \right|.$$

Использование правила прямоугольника дает

$$\left|Q_1^l(u_h)(\tilde{\zeta}^l)\right| = \left|\sum_{j=1}^{l}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_{j-1})\frac{\partial}{\partial s}\{A(u_h(s),\tilde{\zeta}^l)\}\,ds\right| \le \sum_{j=1}^{l}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_{j-1})\|u_{h,s}(s)\|_1\|\tilde{\zeta}^l\|_1\,ds$$
$$= \|\tilde{\zeta}^l\|_1\int_0^{t_1}s\|u_{h,s}\|_1\,ds + \|\tilde{\zeta}^l\|_1\sum_{j=2}^{l}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_{j-1})\|u_{h,s}(s)\|_1\,ds.$$

Использование неравенства Коши–Шварца приводит к

$$|Q_1^l(u_h)(\tilde{\zeta}^l)| \le C(\Delta t)^2\|u_0\|_1^2 + C(\Delta t)^2\left(\log\frac{1}{\Delta t}\right)\|u_0\|_1^2 + \frac{1}{2}\|\tilde{\zeta}^l\|_1^2,$$

где мы использовали лемму 2.2. Это завершает доказательство. □

Лемма 4.4. *Имеется положительная общая постоянная C такая, что*

$$\left|\Delta t\sum_{m=1}^{l}Q_2^m(u_h)(\zeta^m)\right| \le C(\Delta t)^2\|u_0\|_1^2 + \frac{\Delta t}{2}\sum_{m=1}^{l}\|\zeta^m\|^2.$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 4.3, и поэтому подробности опускаются. □

Лемма 4.5. *Пусть ζ^m удовлетворяет* (4.7). *Тогда имеется положительная общая постоянная C такая, что*

$$\Delta t\sum_{m=1}^{l}\|\zeta^m\|^2 + \|\tilde{\zeta}^l\|_1^2 \le C(\Delta t)^2\left(1+\log\frac{1}{\Delta t}\right)\|u_0\|_1^2.$$

Доказательство. Желаемый результат следует из леммы 4.2, леммы 4.3 и леммы 4.4. Это завершает доказательство. □

Лемма 4.6. *Пусть $u_0 \in H^1(\Omega)$. Тогда имеется положительная общая постоянная C такая, что*

$$\sum_{n=1}^{m}t_n^2\|\sigma^n\|^2 \le C\Delta t\|u_0\|_1^2.$$

Доказательство. Запишем σ^n в следующем виде:

$$\sigma^n = \frac{\alpha}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(s-t_{n-1})u_{h,ss}(s)\,ds.$$

Следовательно,

$$\|\sigma^n\|^2 \le \frac{C}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(s-t_{n-1})^2\|u_{h,ss}(s)\|^2\,ds.$$

Умножая на t_n^2 и суммируя по $n = 1,\ldots,m$, мы получаем

$$\sum_{n=1}^{m}t_n^2\|\sigma^n\|^2 \le \frac{C}{\Delta t}\sum_{n=1}^{m}\int_{t_{n-1}}^{t_n}t_n^2(s-t_{n-1})^2\|u_{h,ss}(s)\|^2\,ds \le C\Delta t\sum_{n=1}^{m}\int_{t_{n-1}}^{t_n}s^2\|u_{h,ss}(s)\|^2\,ds$$
$$\le C\Delta t\int_0^{t_m}s^2\|u_{h,ss}\|^2ds \le C\Delta t\|u_0\|_1^2,$$

где на втором шаге мы использовали $t_n^2(s-t_{n-1})^2 \le s^2(\Delta t)^2$, а на третьем — лемму 2.2. Это завершает доказательство. □

Лемма 4.7. *Пусть* ζ^m *удовлетворяет* (4.5). *Тогда имеется положительная общая постоянная* C *такая, что*

$$\|\zeta^m\| \le C\Delta t \left(1 + \log\frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2} t_m^{-1/2}\|u_0\|_1, \quad t_m > 0.$$

Доказательство. Объединив лемму 4.1 с леммой 4.5 и леммой 4.6, мы получим желаемую оценку. □

Доказательство теоремы 4.1. Перепишем $u(t_n) - U^n$ в следующем виде:

$$u(t_n) - U^n = (u(t_n) - u_h(t_n)) + \zeta^n.$$

Используя неравенство треугольника, мы получим

$$\|u(t_n) - U^n\| \le \|u(t_n) - u_h(t_n)\| + \|\zeta^n\|. \tag{4.10}$$

Оценка (3.11) при $t = t_n$ и лемма 4.7 в (4.10) приводят к (4.8). Чтобы оценить (4.9), мы можем переписать $p(t_n) - P^n$ в следующем виде:

$$p(t_n) - P^n = (p(t_n) - p_h(t_n)) + \xi^n.$$

Снова, используя неравенство треугольника, мы получим

$$\|p(t_n) - P^n\| \le \|p(t_n) - p_h(t_n)\| + \|\xi^n\|. \tag{4.11}$$

Из (4.6) мы имеем $(\xi^n_x, \phi_{hx}) = (\alpha\zeta^n, \phi_{hx}) \le C\|\zeta^n\|\|\phi_{hx}\|$. Следовательно, $\|\xi^n_x\| \le C\|\zeta^n\|$. Теперь применение леммы 4.7 приводит к

$$\|\xi^n_x\| \le C\|\zeta^n\| \le C\Delta t\left(1 + \log\frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2} t_n^{-1/2}\|p_0\|_2.$$

Поскольку $\xi^n \in H^1_0(\Omega)$, используем неравенство Пуанкаре для получения

$$\|\xi^n\| \le C\|\zeta^n\| \le C\Delta t\left(1 + \log\frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2} t_n^{-1/2}\|p_0\|_2. \tag{4.12}$$

Оценка (3.12) при $t = t_n$ и (4.12) в (4.11) доказывает (4.9). Это завершает доказательство теоремы 4.1. □

4.2. Оценки ошибки при $p_0 \in H^1_0(\Omega)$

В данном пункте рассматриваются оценки L^2-ошибки для $u(t_n) - U^n$ и $p(t_n) - P^n$, когда начальная функция $p_0 \in H^1_0(\Omega)$. Основное средство, используемое в нашем анализе ошибки, — это следующая дискретная параболическая дуальность: для любого фиксированного времени $t_n > 0$ и любой функции $G \in V_h$ определим $\{v_h(s), q_h(s)\} \in V_h \times W_h$ и $\{(V^m)^n_{m=0}, (Q^m)^n_{m=0}\} \in V_h \times W_h$ как непрерывные и дискретные решения следующих смешанных задач.

Непрерывный случай: найдем $\{v_h, q_h\} : [0, T] \longrightarrow V_h \times W_h$ так, что при $v_h(t_n) = G$:

$$(\alpha v_{h,s}, \psi_h) - A(v_h, \psi_h) = -\lambda(v_h, \psi_h)\ \forall\, \psi_h \in V_h, \quad s \le t_n, \tag{4.13}$$

$$(q_{hx}, \phi_{hx}) = (\alpha v_h, \phi_{hx})\ \forall\, \phi_h \in W_h. \tag{4.14}$$

Дискретный случай: найдем $\{V^m, Q^m\} \in V_h \times W_h$ так, что при $V^n = G$:

$$(\alpha \partial_t V^m, \psi_h) - A(V^{m-1}, \psi_h) = -\lambda(V^{m-1}, \psi_h) \ \forall \psi_h \in V_h, \quad m = n, \dots, 1, \tag{4.15}$$

$$(Q_x^m, \phi_h) = (\alpha V^m, \phi_h) \ \forall \phi_h \in W_h. \tag{4.16}$$

Основной результат этого пункта представлен в следующей теореме.

Теорема 4.2. *Пусть* $\{u, p\}$ *— точное решение* (1.6), (1.7), *а* $\{U^n, P^n\}$ *— аппроксимация обратного метода Эйлера, определяемая* (4.1), (4.2). *Тогда для* $n \geq 1$ *и* $p_0 \in H_0^1(\Omega)$ *при* $u_h(0) = L_h u_0$ *мы имеем*

$$\|u(t_n) - U^n\| \leq C \left(h^2 + \Delta t \left(1 + \log \frac{1}{\Delta t} \right)^{1/2} \right) t_n^{-1} \|p_0\|_1, \quad t_n > 0, \tag{4.17}$$

$$\|p(t_n) - P^n\| \leq C \left(h^2 + \Delta t \left(1 + \log \frac{1}{\Delta t} \right)^{1/2} \right) t_n^{-1} \|p_0\|_1, \quad t_n > 0. \tag{4.18}$$

Доказательство теоремы требует некоторой подготовки. Используя (1.8) и (4.13), отметим, что

$$\frac{d}{ds}\{\alpha u_h, v_h\} = (\alpha u_{h,s}, v_h) + (\alpha u_h, v_{h,s}) = 0. \tag{4.19}$$

Теперь из (4.1) и (4.15) мы имеем

$$\partial_t (\alpha U, V)^m = 0. \tag{4.20}$$

Дискретный аналог (3.27) следующий:

$$\partial_t \left\{ (\alpha u_h, v_h) - (\alpha U, V) \right\}^m = 0. \tag{4.21}$$

Суммируя (4.21) по $m = 1, \dots, n$, мы получим

$$\{(\alpha u_h, v_h) - (\alpha U, V)\}^n - \{(\alpha u_h, v_h) - (\alpha U, V)\}^0 = 0.$$

При $v_h(t_n) = L_h V(t_n) = L_h G$ и $u_h(0) = L_h u_0$ получим

$$(\alpha u_h^n, L_h V(t_n)) - (\alpha U^n, V^n) = (\alpha u_h(0), v_h(0)) - (\alpha U^0, V^0).$$

Следовательно,

$$(\alpha(u_h^n - U^n), G) = (\alpha u_h(0), v_h(0) - V^0). \tag{4.22}$$

При $\bar{\zeta}^n = v_h(t_n) - V^n$, $n \leq m$, и используя ошибку, связанную с дискретной обратной задачей, мы имеем

$$|(\alpha \zeta^n, G)| \leq c \|u_h(0)\| \|\bar{\zeta}^{\,0}\|, \tag{4.23}$$

где $\bar{\zeta}^{\,0} = v_h(0) - V^0$. Теперь применим лемму 4.7 к $\bar{\zeta}^n = v_h(t_n) - V^n$ в обратном времени, чтобы получить

$$\begin{aligned} \|\bar{\zeta}^p\| &\leq C \Delta t \left(1 + \log \frac{1}{\Delta t} \right)^{1/2} (t_n - t_p)^{-1/2} \|v(t_n)\|_1 \\ &\leq C \Delta t \left(1 + \log \frac{1}{\Delta t} \right)^{1/2} (t_n - t_p)^{-1/2} \|G\|_1, \quad t_p \leq t_n. \end{aligned}$$

При $t_p = t_0$ мы имеем

$$\|\bar{\zeta}^0\| \leq C \Delta t \left(1 + \log \frac{1}{\Delta t} \right)^{1/2} t_n^{-1/2} \|G\|_1. \tag{4.24}$$

Приводимые ниже леммы оказываются удобными для нашей оценки ошибки.

Лемма 4.8. *При* $\zeta^n = u_h(t_n) - U^n$ *мы имеем*

$$\|\zeta^n\|_{V^*} \le C\Delta t \left(1 + \log\frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2} t_n^{-1/2}\|p_0\|_1, \quad n \ge 1.$$

Доказательство. Из (4.23) и (4.24) следует, что

$$|(\zeta^n, \alpha G)| \le C\|u_h(0)\|\|\bar\zeta^0\| \le C\Delta t \left(1 + \log\frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2} t_n^{-1/2}\|G\|_1\|u_h(0)\|$$
$$\le C\Delta t \left(1 + \log\frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2} t_n^{-1/2}\|\alpha G\|_1\|u_0\|,$$

где мы использовали $u_h(0) = L_h u_0$ и $\|u_h(0)\| \le C\|u_0\|$, чтобы получить желаемую оценку. Это завершает доказательство. □

Лемма 4.9. *При* $\zeta^n = u_h(t_n) - U^n$ *мы имеем*

$$\|\zeta^n\| \le C\Delta t \left(1 + \log\frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2} t_n^{-1}\|p_0\|_1.$$

Доказательство. Суммируя (4.21) для $m = r+1, \dots, n$, где $r = [\frac{n}{2}]$, мы имеем

$$(\alpha u_h^n, v_h^n) - (\alpha U^n, V^n) = (\alpha u_h^r, v_h^r) - (\alpha U^r, V^r).$$

При $v_h^n = L_h G$ мы получим

$$(\alpha\zeta^n, G) = (\alpha\zeta^r, v_h^r) + (\alpha U^r, \bar\zeta^r). \tag{4.25}$$

Таким образом,

$$|(\alpha\zeta^n, G)| \le C\|\zeta^r\|_{V^*}\,\|v_h^r\|_1 + C\|\bar\zeta^r\|_{V^*}\,\|U^r\|_1. \tag{4.26}$$

Лемма 4.8 применяется к обратной ошибке $\bar\zeta^r$ для получения

$$\|\bar\zeta^r\|_{V^*} \le C\Delta t \left(1 + \log\frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2} t_n^{-1/2}\|G\|. \tag{4.27}$$

Лемма 4.8 при $t = t_r$ дает

$$\|\zeta^r\|_{V^*} \le C\Delta t \left(1 + \log\frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2} t_n^{-1/2}\|u_0\|. \tag{4.28}$$

Используя *априорные* оценки $\|U^r\|_1 \le Ct_n^{-1/2}\|u_0\|$ и $\|v_h^r\|_1 \le Ct_n^{-1/2}\|G\|$ из (4.27) и (4.28), получим

$$|(\zeta^n, \alpha G)| \le C\Delta t \left(1 + \log\frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2} t_n^{-1/2}\|u_0\|\|\alpha G\|.$$

Следовательно,

$$\|\zeta^n\| \le C\Delta t \left(1 + \log\frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2} t_n^{-1/2}\|u_0\| \le C\Delta t \left(1 + \log\frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2} t_n^{-1/2}\|p_0\|_1.$$ □

Доказательство теоремы 4.2. Как и раньше, перепишем $u(t_n) - U^n$ в следующем виде:

$$u(t_n) - U^n = (u(t_n) - u_h(t_n)) + \zeta^n.$$

Используя неравенство треугольника, получим

$$\|u(t_n) - U^n\| \le \|u(t_n) - u_h(t_n)\| + \|\zeta^n\|. \tag{4.29}$$

Из оценки (3.25) при $t = t_n$ и леммы 4.9 в (4.29) имеем (4.17). Чтобы оценить (4.18), мы можем переписать $p(t_n) - P^n$ в следующем виде:

$$p(t_n) - P^n = (p(t_n) - p_h(t_n)) + \xi^n.$$

Снова используя неравенство треугольника, получим

$$\|p(t_n) - P^n\| \le \|p(t_n) - p_h(t_n)\| + \|\xi^n\|. \tag{4.30}$$

Из (4.6) мы имеем $(\xi^n_x, \phi_{hx}) = (\alpha\zeta^n, \phi_{hx}) \le C\|\zeta^n\|\|\phi_{hx}\|$. Следовательно, $\|\xi^n_x\| \le C\|\zeta^n\|$. Применение леммы 4.9 приводит к

$$\|\xi^n_x\| \le C\|\zeta^n\| \le C\Delta t\left(1 + \log\frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2} t_n^{-1}\|p_0\|_1.$$

Поскольку $\xi^n \in H^1_0(\Omega)$, используем неравенство Пуанкаре для получения

$$\|\xi^n\| \le C\|\xi^n_x\| \le C\Delta t\left(1 + \log\frac{1}{\Delta t}\right)^{1/2} t_n^{-1}\|p_0\|_1. \tag{4.31}$$

Объединив (4.30), (4.31) и (3.26), мы получим (4.18). Это завершает доказательство теоремы 4.2. □

Литература

1. **Adams R.A.** Sobolev Spaces. — New York: Academic Press, 1975.
2. **Brezzi F., Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New York: Springer-Verlag, 1991.
3. **Brezzi F., Douglas J., and Marini J.L.D.** Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems // Numer. Math. — 1985. — Vol. 47. — P. 217–235.
4. **Campbell S.L., Brenan K E., and Petzold L.R.** Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. — New York: American Elsevier Science, 1989.
5. **Chen H., Ewing R., and Lazarov R.D.** Superconvergence of mixed finite element methods for parabolic problems with nonsmooth initial data // Numer. Math. — 1998. — Vol. 78. — P. 495–521.
6. **Douglas J., Dupont T.F., and Wheeler M.F.** H^1-Galerkin methods for the Laplace and heat equations // Mathematical aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations / C. de Boor. — 1975. — New York: Academic Press. — P. 383–415.
7. **Johnson C., Thomée V.** Error estimates for some mixed finite element methods for parabolic type problems // RAIRO Analyse numrérique. — 1981. — Vol. 15. — P. 41–78.
8. **Luskin M., Rannacher R.** On the smoothing property of the Galerkin method for parabolic equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1982. — Vol. 19, № 1. — P. 93–113.

9. **Neittaanmäki P., Saranen J.** A mixed finite element method for the heat flow problem // BIT. — 1981. — Vol. 21, iss. 3. — P. 342–346.
10. **Pani A.K.** An H^1-Galerkin mixed finite element method for parabolic partial differential equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1998. — Vol. 35, № 2. — P. 712–727.
11. **Pani A.K., Das P.C.** An H^1-Galerkin method for quasilinear parabolic partial differential equations // Methods of Functional Analysis in Approximation Theory / C.A. Micchelli, D.V. Pai, and B.V. Limaye. ISNM 76. — Basel: Birkhäuser-Verlag, 1986. — P. 357–370.
12. **Pani A.K., Fairweather G.** H^1-Galerkin mixed finite element methods for parabolic partial integro-differential equations // IMA J. Numer. Anal. — 2002. — Vol. 22. — P. 231–252.
13. **Pehlivanov A.I., Carey G.F., and Lazarov R.D.** Least-squares mixed finite elements for second order elliptic problems // SIAM J. Numer. Anal. — 1994. — Vol. 31, № 5. — P. 1368–1377.
14. **Raviart P.A., Thomas J.M.** A Mixed Finite Element Method for Second Order Elliptic Problems. — New York: Springer-Verlag, 1977. — P. 293–315. — (Lecture Notes in Mathematics; 606).
15. **Thomée V.** Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. 2nd Ed. — Berlin, New York: Springer-Verlag, 2006.

Поступила в редакцию 22 апреля 2013 г.