Рис. 3

Таким образом, средняя скорость потока массы $\mathbf{U} = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_T$. Расчеты скорости акустического течения проводились по полученным аналитическим выражениям (7), (8) для различных конфигураций сфероида и частот звуковой волны, когда содержащей средой является воздух. Результаты численных расчетов приведены на рис. 2, 3 (частота падающей волны 1 и 5 МГц соответственно), где показано распределение скорости $\mathbf{U}$ на расстоянии одной длины вязкой волны от поверхности в зависимости от угла θ между нормалью сфероида и направлением падения волны. Кривые *1—5* построены для сфероидов с малой полуосью 1 см и большими полуосями 1, 2, 3, 4, 5 см. Как видно из графиков, скорость потока значительно возрастает с увеличением частоты падающей волны. С увеличением вытянутости сфероида происходит смещение вихря к оси вращения. Аналогичные качественные результаты для эллиптического цилиндра получены в [6].

Отметим, что формулы (7), (8) получены с погрешностью $(\delta/l)^2$. При этом $(\delta/l)^2 = \left[\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}\Big/\frac{2\pi c}{\omega}\right]^2 = \frac{\nu\omega}{2\pi^2 c^2}$. При выбранных для численных расчетов значений частоты звуковых волн и характеристик содержащей среды эта погрешность имела порядок 10^{-6}. Расчеты проводились на ЭВМ ЕС 1033 с такой же точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ниборг В.** Акустические течения // Физическая акустика.— М.: Мир, 1969.— Т. 2.— Ч. Б.
2. **Зарембо Л. К.** Акустические течения // Мощные ультразвуковые поля.— М.: Наука, 1968.
3. **Галиуллин Р. Г., Репин В. Б., Халитов И. Х.** Течение вязкой жидкости и теплообмен тел в звуковом поле.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978.
4. **Федоров А. Я., Цой П. И.** Об акустических течениях в пограничном слое // ПМТФ.— 1978.— № 3.
5. **Цой П. И.** Дифракция цилиндрических и плоских стационарных звуковых волн на цилиндре в вязкой теплопроводной среде // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1972.— № 3.
6. **Сорокодум Е. Д., Тимошенко В. И.** Об акустических течениях около эллиптического цилиндра при больших числах Рейнольдса // Акуст. журн.— 1973.— Т. 19, № 6.

Поступила 19/VIII 1987 г.

УДК 532 : 662.215.2

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ СОУДАРЕНИИ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. В. Уткин

(Черноголовка)

Соударение плоских струй идеальной несжимаемой жидкости подробно рассмотрено в ряде работ [1—4]. Возникающая конфигурация течения в системе координат, связанной с точкой контакта, показана на рис. 1, где OC и OD — струи, соударяющиеся под углом $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$; OA и OB — основной поток, направленный параллельно оси Ox, и обратная струя, составляющая угол χ с осью Ox; O — точка контакта. Интерес к задаче объясняется тем, что столь простая модель достаточно хорошо описывает высокоскоростное косое соударение металлических пластин, в частности возникающие при этом волнообразование на границе соударения металлов и формирование обратной струи. Причем основные параметры обратной струи хорошо согласуются с расчетом в рамках идеальной несжимаемой жидкости [1, 2].

Волнообразование на границе соударения пластин открыто сравнительно недавно [5]. Подробно это явление, а также многие концепции, предложенные для его объяснения, рассмотрены в [6, 7]. В [8, 9] высказано мнение, что возникновение волн — следствие неустойчивости течения за точкой контакта. В [10—12] на основании не только качественных, но и количественных оценок показано, что в рамках этого подхода находят объяснение основные закономерности процесса волнообразования. В [13] исследовано на устойчивость симметричное соударение струй с учетом двумерности исходного течения. Показано, что струйная конфигурация неустойчива по отношению к потенциальным симметричным возмущениям и устойчива относительно антисимметричных. На основании такого результата сделан вывод о вихревой природе волн, наблюдаемых при высокоскоростном косом соударении металлических пластин.

Соударение струй произвольной толщины до сих пор на устойчивость не анализировалось. Однако эта проблема достаточно актуальна, в частности, потому, что задача о соударении плоских струй идеальной несжимаемой жидкости является неопределенной. Законы сохранения не позволяют найти, например, угол χ, который задает направление движения обратной струи. Поэтому изучение на устойчивость необходимо для определения устойчивых струйных конфигураций, если такие вообще существуют. Решению этой задачи посвящена данная работа.

Постановка задачи. Считаем, что течение, возникающее при соударении плоских струй идеальной несжимаемой жидкости, потенциально. Тогда решение, описывающее столкновение двух потоков толщиной h_1 и h_2, скорости которых на бесконечности равны, имеет вид [3]

$$\pi w = \ln(1 + v/a_1) + h_2 \ln (1 + v/a_2) - \tag{1}$$
$$- k_1 \ln (1 + v) - k_2 \ln (1 - v/a_3),$$

где $v = v_x - iv_y$ и $w = \varphi + i\psi$ — комплексные скорость и потенциал течения; k_1 и k_2 — толщины основного потока и обратной струи; $a_1 = \mathrm{e}^{-i\gamma_1}$; $a_2 = \mathrm{e}^{i\gamma_2}$, $a_3 = \mathrm{e}^{-i\chi}$. Все величины обезразмерены. В качестве единиц скорости и длины выбраны соответственно скорость сталкивающихся потоков на бесконечности и толщина h_1. Плотности струй считаются одинаковыми.

Для определения четырех неизвестных — k_1, k_2, χ и γ_1 или γ_2 (задан полный угол столкновения γ) — имеется три уравнения, следующие из законов сохранения массы и импульса. Решение (1), таким образом, содержит один неопределенный параметр, в качестве которого удобно выбрать угол χ. Тогда

$$k_1 = 1 + h_2 - k_2,\ k_2 = [1 - \cos \gamma_1 + h_2(1 - \cos \gamma_2)]/(1 + \cos \chi), \tag{2}$$

а связь между углами γ_1 и γ_2 находится из уравнения

$$(1 - \cos \gamma_1 + h_2(1 - \cos \gamma_2)) \operatorname{tg} \chi = h_2 \sin \gamma_2 - \sin \gamma_1, \tag{3}$$

т. е. все константы в равенстве (1) считаем известными.

Проанализируем на устойчивость струйную конфигурацию методом [14, 15]. Считаем, что возмущенное течение, как и основное, потенциально. Комплексный потенциал малых возмущений обозначим через w_1. Тогда полный потенциал равен сумме $w + w_1$. На свободной поверхности должны выполняться два условия: 1) давление равно нулю (динамическое условие); 2) частицы, первоначально находившиеся на свободной поверхности, остаются на ней и в последующие моменты времени (кинематическое условие). Дальнейшее исследование удобно вести в плоскости комплексной скорости v. Течение, изображенное на рис. 1, отобразится на внутренность круга радиуса *1* (рис. 2) [3]. Условия на свободной поверхности, которой соответствует окружность $vv^* = 1$ (звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения), приводят к уравнению для w_1 [15]:

$$\operatorname{Im}\left\{D\left[w_1 - v\frac{dw}{dv} D[w_1]\right] - \frac{\partial w_1}{\partial t}\right\} = 0, \tag{4}$$

где D — дифференциальный оператор $\partial/\partial w + \partial/\partial t$; t — безразмерное время. Обозначая выражение в фигурных скобках через $H(v)$ и считая v независимой переменной, получим

$$H(v) = (H(v))^* \text{ при } vv^* = 1. \tag{5}$$

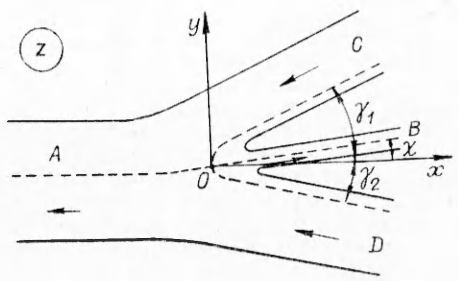

Рис. 1

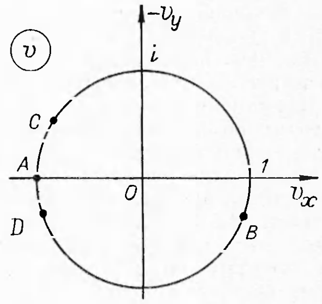

Рис. 2

Раскрытие равенства (4) дает граничное условие для потенциала φ_1, которое для ряда задач подробно изучено в [16]. В данной работе анализируется непосредственно соотношение (5).

Зависимость решения от времени ищем в виде [15]

$$w_1 = G_1(v)\,e^{\omega t} + G_2(v)\,e^{\omega^* t}. \tag{6}$$

Допустимые значения ω и отвечающие им функции G_1 и G_2 находятся из (5). Общее решение может быть представлено как сумма функций вида (6). Возмущения, для которых $\operatorname{Re}\{\omega\} > 0$, будут неустойчивы. После подстановки (6) в (5) условия на свободной поверхности приводят к уравнению

$$L_\omega[G_1(v)] = (L_{\omega^*}[G_2(v)])^*, \tag{7}$$

где

$$L_\omega[G] = \frac{v^2}{\Omega}\frac{d^2G}{dv^2} + 2\omega v\frac{dG}{dv} + \omega\left(\frac{d\Omega}{dv}\frac{v}{\Omega} + \omega\Omega\right)G, \tag{8}$$

$$\Omega = \frac{v}{\pi}\left(\frac{1}{v+a_1} + \frac{h_2}{v+a_2} - \frac{k_1}{v+1} - \frac{k_2}{v-a_3}\right).$$

Если течение симметрично относительно оси Ox, то легко установить связь между функциями G_1 и G_2 [15], что позволяет получить граничное условие для одной функции G_1, которое исследовалось, например, в [13] при анализе на устойчивость симметричной струйной конфигурации. При произвольной толщине сталкивающихся потоков этот метод неприменим. Поэтому рассмотрим частный случай равенства (7), а именно: пусть

$$L_\omega[G_1(v)] = C_0; \tag{9}$$

$$L_{\omega^*}[G_2(v)] = C_0 \tag{10}$$

(C_0 — действительная константа). Равенства (9), (10) должны выполняться при $vv^* = 1$. Используя свойство аналитического продолжения, считаем, что они справедливы во всей плоскости v. Задача свелась, таким образом, к нахождению функций $G_1(v)$ и $G_2(v)$, удовлетворяющих неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка (9), (10). Во всех последующих соотношениях ω встречается в виде комбинации ω/π, которая для сокращения записи обозначается просто через ω.

Изучим уравнения (9), (10), которые являются неоднородными линейными дифференциальными уравнениями второго порядка типа Фукса [17] с регулярными особыми точками 0, -1, $-a_1$, $-a_2$, a_3 и ∞. Если $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$ — два линейно независимых решения соответствующего однородного уравнения, то общее решение имеет вид [17]

$$G_1(v) = A_1K^{(1)} + B_1K^{(2)} + K^{(2)}\int_0^v \frac{K^{(1)}P}{W}dv - K^{(1)}\int_0^v \frac{K^{(2)}P}{W}dv, \tag{11}$$

где $P = C_0\Omega/v^2$; $W(v)$ — вронскиан, который может быть найден из дифференциального уравнения и равен

$$W(0)(1+v)^{2\omega k_1}(1-v/a_3)^{2\omega k_2}(1+v/a_2)^{-2\omega h_2}(1+v/a_1)^{-2\omega}.$$

Функция $G_2(v)$, очевидно, тоже будет даваться соотношением (11), если заменить ω на ω^* и A_1, B_1 на A_2, B_2. Решение (11) удовлетворяет необходимым условиям на свободной поверхности везде, за исключением особых точек. В окрестности особых точек поведение функций G_1 и G_2 должно соответствовать определенным физическим требованиям.

Исследуем решение при $v \to -1$. В плоскости z это отвечает движению по течению в основном потоке, где струя асимптотически становится прямой, а скорость — постоянной. Известно [18], что такое течение нейтрально устойчиво и любое возмущение распространяется без изменения вниз по потоку со скоростью струи. Этот факт можно выразить математически, приравняв нулю полную производную по времени от скорости возмущений, что приводит к требованию существования пределов

$$\lim_{v\to-1} (v+1)^{-\omega k_1} G_1 \quad \text{и} \quad \lim_{v\to-1} (v+1)^{-\omega^* k_1} G_2.$$

Проанализируем функцию G_1. Два линейно независимых решения однородного уравнения (9) $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$ в окрестности точки -1 ведут себя как $(v+1)^{\omega k_1+1}$ и $(v+1)^{\omega k_1} - \omega k_1 (v+1)^{\omega k_1+1} \ln (v+1)$, т. е. требуемые условия выполняются автоматически. Исследуя частное решение неоднородного уравнения, находим, что граничные условия удовлетворяются, если

$$\operatorname{Re}\{\omega\} \leqslant 1/k_1. \tag{12}$$

Для функции G_2 получаем такое же неравенство. Ограничение на решение в окрестности особой точки $v = a_3$ находится аналогично (с заменой k_1 на k_2). Но можно считать, что $k_2 \leqslant k_1$, и дополнительных ограничений на ω не накладывать.

При $v \to -a_1$ и $v \to -a_2$ функции G_1 и G_2 должны обращаться в нуль, поскольку сталкивающиеся струи на бесконечности не возмущены. Исследуем G_1. Решения однородного уравнения (9) имеют при $v \to -a_1$ асимптотику

$$K^{(i)} \sim \alpha_{1i} (v+a_1)^{-\omega+1} + \beta_{1i}\left[(v+a_1)^{-\omega} + \omega a_1^* (v+a_1)^{-\omega+1} \ln (v+a_1)\right]. \tag{13}$$

Здесь α_{1i} и β_{1i} $(i = 1, 2)$ — известные константы, являющиеся функциями a_1, a_2, a_3 и ω.

Характер поведения частного решения при $v \to -a_1$ зависит от ω. Интерес представляют решения с положительной действительной частью ω. Но при $\operatorname{Re}\{\omega\} > 0$ интегралы в (11) сходятся при $v \to -a_1$, их значения обозначим соответственно через $C_0 J_{11}$ и $C_0 J_{12}$. В этом случае, очевидно, асимптотика частного решения такая же, как у $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$. Значит, для того чтобы функция G_1 обращалась в нуль при $v \to -a_1$ и $\operatorname{Re}\{\omega\} > 0$, необходимо приравнять нулю коэффициент при $(v+a_1)^{-\omega}$ в (11), что приводит к равенству

$$\beta_{11} A_1 + \beta_{12} B_1 + (\beta_{12} J_{11} - \beta_{11} J_{12}) C_0 = 0, \tag{14}$$

которое связывает константы A_1, B_1 и C_0. Аналогичным образом изучается особая точка $-a_2$. Функция G_1 стремится к нулю при $v \to -a_2$ и $\operatorname{Re}\{\omega\} > 0$, если выполняется равенство

$$\beta_{13} A_1 + \beta_{14} B_1 + (\beta_{14} J_{13} - \beta_{13} J_{14}) C_0 = 0, \tag{15}$$

где β_{13} и β_{14} — константы разложения $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$ в окрестности $-a_2$, аналогичные β_{11} и β_{12} (это разложение отличается от (13) заменой a_1 на a_2 и ω на ωk_2); J_{13} и J_{14} — значения интегралов в (11) при $v = -a_2$.

Для функций G_2 также находим два уравнения: первое вытекает из требования обращения G_2 в нуль при $v \to -a_1$, а второе — при $v \to -a_2$:

$$\beta_{21} A_2 + \beta_{22} B_2 + (\beta_{22} J_{21} - \beta_{21} J_{22}) C_0 = 0; \tag{16}$$

$$\beta_{23} A_2 + \beta_{24} B_2 + (\beta_{24} J_{23} - \beta_{23} J_{24}) C_0 = 0. \tag{17}$$

Константы β_{2i} и J_{2i} $(i = 1, 4)$ имеют тот же смысл, что и соответствующие величины в (14), (15), и отличаются лишь тем, что зависят от ω^*, а не от ω.

Получены две системы (14), (15) и (16), (17) для определения A_1, B_1 и A_2, B_2 через C_0 (константа C_0 остается произвольной и находится из начальных условий), у которых есть единственное решение, когда их определители отличны от нуля. Если, например, определитель первой системы равен нулю, то, полагая $C_0 = 0$ и $G_2 \equiv 0$, будем иметь одно уравнение, связывающее A_1 и B_1, т. е. всем граничным условиям удастся удовлетворить, выбирая в качестве G_1 общее решение однородного уравнения (9) и полагая $w_1 = G_1 e^{\omega t}$. Аналогичным образом поступаем, если определитель второй системы равен нулю. Тогда $w_1 = G_2 e^{\omega^* t}$. Если оба определителя одновременно равны нулю, то $G_1 e^{\omega t}$ и $G_2 e^{\omega^* t}$ являются решениями задачи. В любом случае оказывается возможным приравнять нулю коэффициенты при расходящихся членах $(v + a_1)^{-\omega}$ и $(v + a_2)^{-\omega h_2}$, когда $\mathrm{Re}\{\omega\} > 0$. Учитывая (12), окончательно получаем: струйная конфигурация неустойчива по отношению к малым потенциальным возмущениям; граничные условия удовлетворяются при положительных значениях действительной части ω, которые лежат в интервале

$$0 < \mathrm{Re}\{\omega\} \leqslant 1/k_1. \tag{18}$$

Симметричное соударение потоков подробно изучено на устойчивость в [13]. Там показано, что струйная конфигурация неустойчива относительно симметричных возмущений. Причем для действительной части ω найдено неравенство, совпадающее с (18). Таким образом, возмущения, по отношению к которым произвольная струйная конфигурация неустойчива, переходят в симметричные при $h_2 = 1$ и $\chi = 0$.

При $\omega = 0$ уравнения (9), (10) легко разрешимы в конечном виде. Полученная функция w_1 удовлетворяет всем граничным условиям. Поэтому $\omega = 0$ — собственное значение рассмотренной задачи.

В проведенном исследовании на устойчивость струйной конфигурации предполагалось, что возмущенное течение потенциально. Класс допустимых возмущений сильно ограничен. Однако даже по отношению к этому ограниченному классу возмущений задача о соударении струй произвольной толщины неустойчива. Корректны поэтому подходы, в которых предполагается, что волны на границе соударения металлов возникают из-за неустойчивости течения за точкой контакта (см., например, [10—12]).

Следствием гидродинамической неустойчивости является также, по-видимому, распад обратной струи. Основанием для этого вывода служит хорошо известный экспериментальный факт, согласно которому в режиме волнообразования устойчивых обратных струй не наблюдается, а регистрируется облако распыленных частиц [6, 7]. Поскольку волны в основном потоке возникают из-за неустойчивости исходного течения, то естественно ожидать, что проявление этой неустойчивости в обратной струе приведет к ее распаду.

И наконец, как уже упоминалось, задача о соударении струй в общем случае неопределенная. У [4] сформулировано несколько факторов, учет которых может либо устранить, либо ограничить эту неопределенность. Указано, в частности, на необходимость определения устойчивых струйных конфигураций. Результаты данной работы показывают, что таких конфигураций нет. Интересно отметить, что, согласно соотношению (18), действительная часть ω принимает минимальные положительные значения тогда, когда толщина основного потока максимальна. Используя равенства (2), (3), можно показать, что k_1 достигает максимума при $\chi = 0$. Именно это условие, полученное из совершенно других соображений, предложено в [19] для замыкания системы уравнений (2), (3). Практический интерес к задаче продолжает стимулировать поиски замыкающего соотношения. Два таких примера, отличных от [19], приведены в [20, 21]. В [20] рассмотрено положение центров инерции жидких частиц в сталкивающихся и расходящихся потоках и получено условие (в принятых в данной работе обозначениях) $\gamma_1 = \gamma_2 + \chi$. В [21] на основании анализа экспериментальных данных сформулирована следующая гипотеза:

реализуется конфигурация, при которой нулевая линия тока в отходящих струях имеет минимальную кривизну. С точки зрения устойчивости, однако, ни одна из конфигураций не обладает никакими преимуществами перед любой другой, поскольку, как и любая другая, неустойчива в рамках идеальной несжимаемой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А.** Кумулятивный заряд и принципы его работы // УМН.— 1957.— Т. 12, вып. 4.
2. **Birkhoff G., Dougal D. Mc. et al.** Explosives with lined cavities // J. Appl. Phys.— 1948.— V. 19, N 6.
3. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости.— М.: Наука, 1979.
4. **Милн-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика.— М.: Мир, 1964.
5. **Allen W. A., Mapes J. M., Wilson W. G.** An effect produced by oblique impact of a cylinder on a thin target // J. Appl. Phys.— 1954.— V. 25, N 5.
6. **Дерибас А. А.** Физика упрочнения и сварки взрывом.— Новосибирск: Наука, 1980.
7. **Кудинов В. М., Коротеев А. Я.** Сварка взрывом в металлургии.— М.: Металлургия, 1978.
8. **Cowan G., Holtzman A.** Flow configuration in colliding plates // J. Appl. Phys.— 1963.— V. 34, N 4.
9. **Schmidtmann E., Koch W., Scheen H.** Vorgänge beim Explosivschweissen metallischen Werkstoffe // Arch. Eisenhüttenwesen.— 1965.— Bd 36, N 9.
10. **Reid S. R., Sherif N. H. S.** Prediction of the wavelength of interface waves in symmetrical explosive welding // J. Mech. Engng Sci.— 1976.— V. 18, N 2.
11. **Robinson J. L.** The mechanics of wave formation in impact welding // Phil. Mag.— 1975.— V. 31, N 3.
12. **Уткин А. В., Дремин А. Н. и др.** Волнообразование при высокоскоростном соударении металлов // ФГВ.— 1980.— № 4.
13. **Уткин А. В., Дремин А. Н.** Неустойчивость течения, возникающего при симметричном соударении струй идеальной жидкости // ФГВ.— 1986.— № 3.
14. **Гуревич М. И., Хаскинд М. Д.** Струйное обтекание контура, совершающего малые колебания // ПММ.— 1953.— Т. 17, вып. 5.
15. **Fox J. L., Morgan G. M.** On the stability of some flows on an ideal fluid with free surfaces // Quart. Appl. Math.— 1954.— V. 11, N 4.
16. **Кузнецов А. В.** Нестационарные возмущения течений жидкости со свободными границами.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975.
17. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1971.
18. **Ламб Г.** Гидродинамика.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
19. **Palatini A.** Sulla confluenza di due vene // Atti del R. Instituto Venetto di Sc. L. ed Arti.— 1916.— T. 75.
20. **Тришин Ю. А.** Несимметричное соударение струй идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 5.
21. **Кинеловский С. А., Соколов А. В.** О несимметричном соударении плоских струй идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 1.

Поступила 22/IX 1987 г.

УДК 532.529

О ДВИЖЕНИИ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ВЯЗКОЙ ВИБРИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В. Л. Сенницкий

(Новосибирск)

Имеется значительное число работ (см., например, [1—5]), содержащих результаты исследований теоретического характера, относящихся к движению газового пузыря в вибрирующей жидкости.

В данной работе рассматривается следующая задача. Замкнутый сосуд, заполненный вязкой несжимаемой жидкостью, в которой находится газовый пузырь, совершает заданные периодические поступательные колебания относительно инерциальной системы прямоугольных координат X, Y, Z (колебания сосуда имеют период T и происходят вдоль оси Z). При этом сосуд заданным образом деформируется (сжимается и разжимается). Положение газового пузыря относительно системы координат X,