Нетрудно показать, что если в первой точке записать функцию

$$X_1(t) = [1 + u^* \times (t)]\, \varepsilon(t)$$

а во второй, расположенной на расстоянии $l \ll L_0$ вниз по потоку,

$$X_2(t) = [1 + u^*(t + \varphi)]\, \varepsilon(t)$$

то структурная функция $D(x, t)$ не будет в явном виде нести в себе информацию о турбулентных пульсациях скорости.

В то же время кросскорреляционная функция, подавляя влияние шумов, воспроизводит искомый частотно-модулированный сигнал [1].

Спектр кросскорреляционной функции будет содержать информацию как о величине продольной составляющей турбулентных пульсаций скорости, так и о спектрах модулируемого $\varepsilon(t)$ и модулирующего $u(t)$ случайных процессов.

Вместе с тем, применение структурных функций должно уточнить границы спектра модулируемого процесса. В связи с этим совместное использование структурных функций наряду с кросскорреляционными можно считать целесообразным.

Поступила 26 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Деревянко Н. Ф. и Трохан А. М. О применении корреляционного метода для измерения скорости плазменных потоков. Измерительная техника, 1966, № 10.
2. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., Изд-во «Наука», 1967.
3. Townsend A. A. Experimental evidence for the theory of local isotropy. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1948, vol. 44, No. 4.
4. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
5. Пугачев В. С. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТЬ ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ

В. Е. Захаров

(Новосибирск)

Исследуется устойчивость установившихся нелинейных волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости [1,2]. В п. 1 уравнения гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью приводятся к каноническим переменным; этими переменными оказываются форма поверхности $\eta(\mathbf{r}, t)$ и гидродинамический потенциал на поверхности $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Введение канонических переменных позволяет рассматривать задачу об устойчивости поверхностных волн, как часть более общей задачи о нелинейных волнах в средах с дисперсией [3,4]. Результаты остальной части статьи также легко переносятся на общий случай.

В п. 2 при помощи метода, аналогичного методу Ван дер Поля, получены упрощенные уравнения, описывающие нелинейные волны в приближении малой амплитуды. Эти уравнения особенно упрощаются, если предположить, что волновой пакет является узким. Полученные уравнения имеют точное решение, аппроксимирующее периодическую волну конечной амплитуды.

В п. 3 исследуются неустойчивости периодических волн конечной амплитуды. Найдены неустойчивости двух типов. Первый тип неустойчивостей — распадные неустойчивости вполне аналогичные распадным неустойчивостям волн в плазме [5,6]. При этих неустойчивостях одновременно возбуждается пара волн, сумма частот которых кратна частоте исходной волны. Наиболее быстрая распадная неустойчивость имеет место для капиллярных волн, более медленная — для гравитационных. Второй тип неустойчивостей — неустойчивость типа отрицательного давления — возникает за счет зависимости скорости нелинейной волны от амплитуды и приводит к неограниченному росту глубины модуляции волны. Эта неустойчивость имеет место для нелинейных волн в любых средах, в которых знак второй производной закона дисперсии по волновому числу $d^2\omega / dk^2$ и знак сдвига частоты за счет нелинейности не совпадают.

Как сообщили А. Н. Литвак и В. И. Таланов [7], эта же неустойчивость независимо была обнаружена ими для нелинейных электромагнитных волн.

1. Канонические переменные. Рассмотрим потенциальное течение идеальной жидкости бесконечной глубины в однородном поле тяжести. Выберем систему координат так, что невозмущенная поверхность жидкости совпадает с плоскостью x, y. Ось z направлена от поверхности. В дальнейшем все векторные обозначения относятся к двумерным векторам в плоскости x, y.

Пусть $\eta(\mathbf{r}, t)$ — форма поверхности жидкости, $\Phi(\mathbf{r}, z, t)$ — гидродинамический потенциал. Течение жидкости описывается уравнением Лапласа

$$\Delta\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1}$$

с двумя условиями на поверхности

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \sqrt{1+\nabla\eta^2}\,\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{z=\eta} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \nabla\eta\,\nabla\Phi\,|_{z=\eta} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\eta = -\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2|_{z=\eta} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\Big|_{z=\eta} + \alpha\nabla\frac{\nabla\eta}{\sqrt{1+\nabla\eta^2}} \tag{1.3}$$

и условием на бесконечности

$$\Phi \to 0 \text{ при } z \to -\infty$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, α — коэффициент поверхностного натяжения.

Уравнения (1.1) — (1.3) сохраняют полную энергию жидкости

$$E = \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\int_{-\infty}^{\eta}\left[(\nabla\Phi)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]dz + \frac{1}{2}g\int\eta^2 d\mathbf{r} + \alpha\int\left(\sqrt{1+\nabla\eta^2} - 1\right)d\mathbf{r} \tag{1.4}$$

Первое слагаемое в этом выражении есть кинетическая энергия, второе и третье, соответственно, потенциальная энергия в поле тяжести и за счет поверхностных сил. Введем величину $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Phi(z, \mathbf{r}, t)|_{z=\eta}$. Задание величин η и Ψ в силу единственности решения краевой задачи для уравнения Лапласа полностью определяет течение жидкости. Воспользовавшись формулой

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=\eta}$$

получим

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + g\eta - \alpha\nabla\frac{\nabla\eta}{\sqrt{1+\nabla\eta^2}} = -\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial\Phi}{\partial z}(\nabla\Phi\,\nabla\eta)\,|_{z=\eta} \tag{1.5}$$

Уравнения (1.2) и (1.5) вместе с уравнениями Лапласа эквивалентны системе (1.1) — (1.3). Докажем, что уравнения (1.1), (1.5) можно представить в виде

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta\Psi}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\delta E}{\delta\eta} \tag{1.6}$$

Здесь E — энергия, символы $\delta E / \delta\eta$, $\delta E / \delta\Psi$ обозначают вариационную производную.

Рассмотрим сначала варьирование по Ψ. Очевидно, варьирование потенциальной энергии дает нуль. Преобразуем кинетическую энергию по формуле Грина

$$E^* = \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\int_{-\infty}^{\eta} dz\left[(\nabla\Phi)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{dz}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\int_s \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_s \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\sqrt{1+\nabla\eta^2}\,d\mathbf{r}$$

Здесь ds есть дифференциал поверхности. Нормальная производная $\partial\Phi / \partial n$ связана с Ψ при помощи функции Грина краевой задачи для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial\Phi(s)}{\partial n} = \int G(s, s_1)\,\Psi(s_1)\,ds_1 \tag{1.7}$$

Здесь s и s_1 — точки на поверхности. Функция G симметрична $G(s, s_1) = G(s_1, s)$. Вариация кинетической энергии состоит из двух слагаемых

$$\delta E^* = \frac{1}{2}\int_s\left[\delta\Psi(s)\frac{\partial\Phi(s)}{\partial n} + \Psi(s)\frac{\partial}{\partial n}\delta\Phi(s)\right]ds$$

Пользуясь формулой (1.7) и симметрией функции Грина, убеждаемся, что оба слагаемые равны

$$\delta E^* = \int\limits_s \delta\Psi(s) \frac{\partial\Phi(s)}{\partial n} ds = \int\limits_s \delta\Psi(\mathbf{r}) \frac{\partial\Phi}{\partial n} \sqrt{1+\nabla\eta^2}\, d\mathbf{r}$$

Из последнего равенства получаем сразу уравнение (1.2).

Рассмотрим теперь варьирование[1] по η.

Варьирование потенциальной энергии сразу дает члены, стоящие в левой части уравнения (2.5). Варьирование кинетической энергии дает

$$\delta E^* = \frac{1}{2}\int \left[(\nabla\Phi)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] \delta\eta(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} + \int d\mathbf{r} \int\limits_{-\infty}^{\eta} \left[\left(\nabla\Phi,\ \nabla\delta\Phi\right) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial z}\delta\Phi\right)\right] dz$$

$$\left(\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta\eta\right)$$

Здесь $\delta\Phi$ — вариация потенциала за счет изменения границы. Пользуясь тем, что Φ удовлетворяет уравнению Лапласа, применим ко второму интегралу теорему Грина

$$\int d\mathbf{r} \int\limits_{-\infty}^{\eta} dz \left[(\nabla\Phi,\ \nabla\delta\Phi) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial z}\delta\Phi\right)\right] = \int \frac{\partial\Phi}{\partial n}\delta\Phi\, ds =$$

$$= \int \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \nabla\eta\,\nabla\Phi\right) \frac{\partial\Phi}{\partial z}\bigg|_{z=\eta} \delta\eta(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$$

Окончательно имеем

$$\delta E^* = \int \left[\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 + (\nabla\eta\,\nabla\Phi)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]_{z=\eta} \delta\eta(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$$

Отсюда получаем уравнение (1.5).

Таким образом, уравнения (1.2) и (1.5) есть уравнения Гамильтона, а Ψ и η — канонические переменные, причем Ψ есть обобщенная координата, а η — обобщенный импульс. Энергия жидкости E является гамильтонианом.

Для замыкания уравнений (1.1), (1.5) необходимо решить краевую задачу для уравнения Лапласа. Найдем решение этой задачи в виде ряда по степеням η. Этот ряд удобнее писать, сделав преобразование Фурье по переменным x и y

$$\eta(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi}\int \eta(\mathbf{r})\, e^{-i(\mathbf{kr})} d\mathbf{r}, \qquad \Psi(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi}\int \Psi(\mathbf{r})\, e^{-i(\mathbf{kr})} d\mathbf{r}$$

Не останавливаясь на подробностях, приведем сразу результат разложения (до второго порядка)

$$\Phi(\mathbf{k},\ z) = e^{|\mathbf{k}|z}\left\{\Psi(\mathbf{k}) + \int \Psi(\mathbf{k}_1)\,\eta(\mathbf{k}_2)\,|\mathbf{k}_1|\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \right. \tag{1.8}$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int (|\mathbf{k}-\mathbf{k}_3| + |\mathbf{k}-\mathbf{k}_2| - |\mathbf{k}|)\,|\mathbf{k}_1|\,\Psi(\mathbf{k}_1)\,\eta(\mathbf{k}_2)\,\eta(\mathbf{k}_3)\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3\right.$$

Здесь символ δ обозначает дельта-функцию.

Если произвести линеаризацию (1.2) и (1.5), а в разложении (1.8) ограничиться первым числом, получим теорию малых колебаний поверхности жидкости, которая описывает распространение волн с законом дисперсии

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{g|\mathbf{k}| + \alpha|\mathbf{k}|^3}$$

Совершим теперь преобразование к комплексной переменной $a(\mathbf{k})$ по формулам

$$\eta(\mathbf{r},\ t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\int \frac{|\mathbf{k}|^{1/2}}{\omega^{1/2}(\mathbf{k})}\left[a(\mathbf{k})\, e^{i(\mathbf{kr})} + a^*(\mathbf{k})\, e^{-i(\mathbf{kr})}\right] d\mathbf{k} \tag{1.9}$$

$$\Psi(\mathbf{r},\ t) = -\frac{i}{2\pi\sqrt{2}}\int \frac{\omega^{1/2}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^{1/2}}\left[a(\mathbf{k})\, e^{i(\mathbf{kr})} - a^*(\mathbf{k})\, e^{-i(\mathbf{kr})}\right] d\mathbf{k}$$

[1] Это простое доказательство принадлежит Р. М. Гарипову.

Тогда

$$\eta(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|\mathbf{k}|^{1/2}}{\omega^{1/2}(\mathbf{k})} [a(\mathbf{k}) + a^*(-\mathbf{k})]$$

$$\Psi(\mathbf{k}) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{\omega^{1/2}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^{1/2}} [a(\mathbf{k}) - a^*(-\mathbf{k})] \qquad (1.10)$$

Преобразования (1.9) можно рассматривать как каноническое преобразование с комплексными коэффициентами к переменным $ia^*(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$; уравнения Гамильтона (1.6) сводятся к одному уравнению

$$\frac{\partial a(\mathbf{k})}{\partial t} = -i \frac{\delta E}{\delta a^*(\mathbf{k})}$$

При помощи формул (1.4), (1.8) и (1.10) выразим энергию в виде ряда по степеням $a(\mathbf{k})$, $a^*(\mathbf{k})$:

$$E = \int \omega(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, a^*(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} + \int V(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \times \qquad (1.11)$$

$$\times [a^*(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k}_1)\, a(\mathbf{k}_2) + a(\mathbf{k})\, a^*(\mathbf{k}_1)\, a^*(\mathbf{k}_2)]\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 +$$

$$+ \frac{1}{3} \int V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) [a^*(\mathbf{k})\, a^*(\mathbf{k}_1)\, a^*(\mathbf{k}_2) + a(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k}_1)\, a(\mathbf{k}_2)]\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)\, a^*(\mathbf{k})\, a^*(\mathbf{k}_1)\, a(\mathbf{k}_2)\, a(\mathbf{k}_3)\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3$$

где

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} \Big\{ [(\mathbf{k}\mathbf{k}_1) + |\mathbf{k}||\mathbf{k}_1|] \left(\frac{\omega(\mathbf{k})\,\omega(\mathbf{k}_1)}{\omega(\mathbf{k}_2)}\right)^{1/2} [(\mathbf{k}\mathbf{k}_2) + |\mathbf{k}||\mathbf{k}_2|] \times$$

$$\times \left(\frac{\omega(\mathbf{k})\,\omega(\mathbf{k}_2)}{\omega(\mathbf{k}_1)}\right)^{1/2} \left(\frac{|\mathbf{k}_1|}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}_2|}\right)^{1/2} + [(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2) + |\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_2|] \left(\frac{\omega(\mathbf{k}_1)\,\omega(\mathbf{k}_2)}{\omega(\mathbf{k})}\right)^{1/2} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_2|}\right)^{1/2} \Big\} \qquad (1.12)$$

$$W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = -\frac{3\alpha}{32\pi^2} \frac{(|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_2||\mathbf{k}_3|)^{1/2}}{[\omega(\mathbf{k})\,\omega(\mathbf{k}_1)\,\omega(\mathbf{k}_2)\,\omega(\mathbf{k}_3)]^{1/2}} (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)(\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3) +$$

$$+ \frac{1}{16(2\pi)^2} (|\mathbf{k}||\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_2||\mathbf{k}_3|)^{1/2} \Big\{ \left[\frac{\omega(\mathbf{k})\,\omega(\mathbf{k}_1)}{\omega(\mathbf{k}_2)\,\omega(\mathbf{k}_3)}\right]^{1/2} (2|\mathbf{k}| + 2|\mathbf{k}_1| - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_2| -$$

$$- |\mathbf{k} - \mathbf{k}_3| - |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| - |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3|) + \left[\frac{\omega(\mathbf{k}_2)\,\omega(\mathbf{k}_3)}{\omega(\mathbf{k})\,\omega(\mathbf{k}_1)}\right]^{1/2} (2|\mathbf{k}_2| + 2|\mathbf{k}_3| -$$

$$- |\mathbf{k} - \mathbf{k}_2| - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_3| - |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| - |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3|) - \left[\frac{\omega(\mathbf{k}_1)\,\omega(\mathbf{k}_2)}{\omega(\mathbf{k})\,\omega(\mathbf{k}_3)}\right]^{1/2} (2|\mathbf{k}_1| + 2|\mathbf{k}_2| -$$

$$- |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3| - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_2| - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| - |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3|) - \left[\frac{\omega(\mathbf{k})\,\psi(\mathbf{k}_2)}{\omega(\mathbf{k}_1)\,\omega(\mathbf{k}_3)}\right]^{1/2} (2|\mathbf{k}_1| + 2|\mathbf{k}_2| -$$

$$- |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3| - |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| - |\mathbf{k} + \mathbf{k}_3| - \left[\frac{\omega(\mathbf{k})\,\omega(\mathbf{k}_3)}{\omega(\mathbf{k}_1)\,\omega(\mathbf{k}_2)}\right]^{1/2} (-|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3| +$$

$$+ 2|\mathbf{k}| + 2|\mathbf{k}_3| - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_3| - |\mathbf{k} + \mathbf{k}_2|) -$$

$$- \left[\frac{\omega(\mathbf{k}_1)\,\omega(\mathbf{k}_3)}{\omega(\mathbf{k})\,\omega(\mathbf{k}_2)}\right]^{1/2} (2|\mathbf{k}_1| + 2|\mathbf{k}_3| - |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3| - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_3| - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_s| - |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|) \Big\} \qquad (1.13)$$

Существуют еще члены четвертого порядка по a, пропорциональные произведениям вида a^*aaa и $aaaa$ и им сопряженным. Эти члены не учитывались, так как в п. 3 будет показано, что они дают малый вклад.

Заметим, что функции V и W подчиняются следующим соотношениям:

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) = V(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k})$$

$$V(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2) = V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \qquad (1.14)$$

$$W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = W(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2) = W(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1)$$

$$W(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$$

Уравнение для a (k) имеет вид

$$\frac{\partial a(\mathbf{k})}{\partial t}+i\omega(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k})=-i\int\{V(-\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2)\,a(\mathbf{k}_1)\,a(\mathbf{k}_2)\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)+$$
$$+2V(-\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_2)\,a^*(\mathbf{k}_2)\,a(\mathbf{k}_1)\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)+V(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2)\,a^*(\mathbf{k}_1)\,a^*(\mathbf{k}_2)\times$$
$$\times\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\}\,d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2-i\int W(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3)\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\times$$
$$\times\,a^*(\mathbf{k}_1)\,a(\mathbf{k}_2)\,a(\mathbf{k}_3)\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}_3 \qquad (1.15)$$

Из уравнения (1.15) ясно, что переменные a (k) есть нормальные переменные задачи о малых колебаниях.

2. Упрощенные уравнения. Уравнение (1.15) является приближенным, и справедливо при малой нелинейности, грубо говоря при условии $a/\lambda\ll 1$, где a — характерная амплитуда волн, а λ — характерная длина волны. В этом же приближении можно провести значительное упрощение уравнения (1.12). Для этого представим величину a (k) в виде

$$a(\mathbf{k})=[A(\mathbf{k},\ t)+f(\mathbf{k},\ t)]\exp[-i\omega(\mathbf{k})\,t] \qquad (2.1)$$

Будем считать, что A (k, t) меняется медленно по сравнению с f, причем $f\ll A$. Подставим a (k) в виде (2.1) в уравнение для f и для A. В уравнении для f учтем только члены, квадратичные по A. Полагая A постоянным за время изменения f, проинтегрируем это уравнение по времени. Это дает: (2.2)

$$f=-\int\Big\{V(-\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2)\,\frac{\exp it\,[\omega(\mathbf{k})-\omega(\mathbf{k}_1)-\omega(\mathbf{k}_2)]}{\omega(\mathbf{k})-\omega(\mathbf{k}_1)-\omega(\mathbf{k}_2)}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\,A(\mathbf{k}_1)\,A(\mathbf{k}_2)+$$
$$+2V(-\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_2)\,\frac{\exp it\,[\omega(\mathbf{k})+\omega(\mathbf{k}_1)-\omega(\mathbf{k}_2)]}{\omega(\mathbf{k})+\omega(\mathbf{k}_1)-\omega(\mathbf{k}_2)}\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\,A^*(\mathbf{k}_1)\,A(\mathbf{k}_2)+$$
$$+V(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2)\,\frac{\exp it\,[\omega(\mathbf{k})+\omega(\mathbf{k}_1)+\omega(\mathbf{k}_2)]}{\omega(\mathbf{k})+\omega(\mathbf{k}_1)+\omega(\mathbf{k}_2)}\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\,A^*(\mathbf{k}_1)\,A^*(\mathbf{k}_2)\Big\}\,d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2$$

Учтем в уравнении для A те из членов, пропорциональных Af, которые содержат наиболее медленные экспоненты. Очевидно, все медленные экспоненты содержатся в членах, пропорциональных A^*AA. Собирая все такие члены, получим

$$\frac{\partial A(\mathbf{k})}{\partial t}=-i\int T(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3)\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\exp it\,[\omega(\mathbf{k})+\omega(\mathbf{k}_1)-\omega(\mathbf{k}_2)-$$
$$-\,\omega(\mathbf{k}_3)]\,A^*(\mathbf{k}_1)\,A(\mathbf{k}_2)\,A(\mathbf{k}_3)\,d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}_3 \qquad (2.3)$$

Здесь

$$T(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3)=-4\,\frac{\omega(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)\,V(-\mathbf{k}-\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_1)\,V(-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3)}{\omega^2(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)-[\omega(\mathbf{k}_2)+\omega(\mathbf{k}_3)]^2}-$$
$$-4\,\frac{\omega(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)\,V(-\mathbf{k},\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}-\mathbf{k}_2)\,V(-\mathbf{k}_3,\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1)}{\omega^2(\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1)-[\omega(\mathbf{k}_3)-\omega(\mathbf{k}_1)]^2}-$$
$$-4\,\frac{\omega(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\,V(-\mathbf{k},\ \mathbf{k}_3,\ \mathbf{k}-\mathbf{k}_3)\,V(-\mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)}{\omega^2(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)-[\omega(\mathbf{k}_1)-\omega(\mathbf{k}_2)]^2}+W(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3) \qquad (2.4)$$

Очевидно, что все отброшенные члены в гамильтониане (1.11) не могут дать вклада в уравнение (2.4).

Для применимости уравнения (2.3) необходимо выполнение условия $f\ll A$. Для этого нужно, чтобы знаменатели в формулах (2.2) и (2.4) не обращались в нуль. Существование нулей знаменателя определяется существованием решения у системы

$$\omega(\mathbf{k})=\omega(\mathbf{k}_1)+\omega(\mathbf{k}_2),\quad \mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2 \qquad (2.5)$$

Если эта система не имеет решений, то уравнение (2.4) применимо при достаточно малых a/λ, если она имеет решение, то необходимо положить дополнительные ограничения.

Заметим, что если ω (k) — монотонная функция, то для существования (2.5) достаточным условием является выполнение неравенства

$$\omega(\mathbf{k})>\omega(\mathbf{k}_1)+\omega(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1) \qquad (2.6)$$

где k и $\mathbf{k}_1$ направлены по одной прямой. Действительно, если это равенство выполнено, то добавляя к $\mathbf{k}_1$ компоненты, перпендикулярные вектору k, можно увеличить правую часть неравенства (2.6) и превратить его в равенство. Напротив, выполнение неравенства, обратного неравенству (2.6), служит достаточным условием отсутствия решений у уравнений (2.5). Для гравитационных волн, имеющих закон дисперсии

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{g\,|\mathbf{k}|}$$

выполняется неравенство, противоположное неравенству (2.6). Соответственно, уравнения (2.5) не могут иметь решений, и при малых a/λ уравнение (2.3) применимо. Для капиллярных волн $[k \gg (g/\alpha)^{1/2}]$, имеющих закон дисперсии $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\alpha\,|\mathbf{k}|^3}$, выполняется неравенство (2.6); так что уравнение (2.3), вообще говоря, неприменимо, если предположить, что волновой пакет является достаточно узким, т. е. $a(\mathbf{k})$ отлично от нуля при $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \ll \mathbf{k}_0$, то уравнениям (2.5) удовлетворить невозможно при любых $\omega(\mathbf{k})$. Следовательно, в предположении узости пакета, уравнениие (2.6) годится при любых законах дисперсии, в частности, и для капиллярных волн.

В предположении узости пакета можно произвести дальнейшее упрощение уравнения (2.3). Введем переменную $\varkappa = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ и разложим $\omega(\mathbf{k})$ в ряд по степеням $\varkappa$ до второго порядка

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_0) + \varkappa_x C + {}^1/_2\,(\lambda_{\parallel}\varkappa_x^2 + \lambda_{\perp}\varkappa_y^2)$$

$$c = \left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k=k_0}, \quad \lambda_{\parallel} = \left.\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right|_{k=k_0}, \quad \lambda_{\perp} = \frac{c}{k_0}, \quad D_{\alpha\beta} = \left.\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha k_\beta}\right|_{k=k_0}$$

Здесь $\varkappa_x$, $\varkappa_y$ — проекция вектора $\varkappa$ на направление, параллельное и перпендикулярное вектору $\mathbf{k}_0$; c — групповая скорость волн; $\lambda_{\perp}$ — собственные числа тензора $D_{\alpha\beta}$. Далее заменим приближенно $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ на $w = T(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)$, и введем переменную

$$b(\mathbf{k}) = A(\mathbf{k}) \exp i\,[\varkappa_x c + {}^1/_2\,(\lambda_{\parallel}\varkappa_x^2 + \lambda_{\perp}\varkappa_y^2)]\,t$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + i\,(\varkappa_x c + {}^1/_2\lambda_{\parallel}\varkappa_x^2 + {}^1/_2\lambda_{\perp}\varkappa_y^2)\,b =$$

$$= -\,iw \int b^*(\mathbf{k}_1)\, b(\mathbf{k}_2)\, b(\mathbf{k}_3)\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \tag{2.7}$$

Заметим, что $\lambda_{\perp}$ всегда положительно, тогда как $\lambda_{\parallel}$ обращается в нуль при $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_0{}^*$

$$\mathbf{k}_0{}^* = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{g}{\alpha}\right)^{1/2} \sim 0.4 \left(\frac{g}{\alpha}\right)^{1/2}$$

причем при $\mathbf{k}_0 < \mathbf{k}_0{}^*$ $\lambda_{\parallel}$ отрицательно, а при $\mathbf{k}_0 > \mathbf{k}_0{}^*$ $\lambda_{\parallel}$ положительно. Совершим обратное преобразование Фурье по переменным $\varkappa$:

$$b(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int b(\varkappa_x, \varkappa_y, t) \exp\,[-\,i\,(x\varkappa_x + y\varkappa_y)]\, d\varkappa_x d\varkappa_y$$

Величина $b(x, y, t)$ имеет смысл огибающей волнового пакета. Получим

$$\frac{\partial b}{\partial t} + c\,\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{i}{2}\left(\lambda_{\parallel}\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \lambda_{\perp}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\right) = -\,iw\,|b|^2 b \tag{2.8}$$

Для дальнейшего упрощения этого уравнения введем $\xi = x - ct$ (что соответствует переходу в систему отсчета, движущегося со скоростью, равной групповой скорости волны) и будем считать, что решение зависит только от t и от $z = \xi\cos\alpha + y\sin\alpha$; получим

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{i\lambda}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = -\,iw\,|\Psi|^2\Psi, \qquad \lambda = \lambda_{\parallel}\cos^2\alpha + \lambda_{\perp}\sin^2\alpha \tag{2.9}$$

Уравнение (2.3) имеет точное решение

$$A(\mathbf{k}) = b_0\,\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \exp\,[-\,it\Omega(\mathbf{k})], \qquad \Omega(\mathbf{k}) = w\,|b_0|^2 \tag{2.10}$$

Здесь b_0 — призвольная постоянная. В переменных η, Ψ решение (2.10) имеет вид

$$\eta = a\cos(kx - \omega t), \quad \Psi = a\sin(kx - \omega t), \quad a = \frac{k^{1/2}}{\pi\sqrt{2}\,\omega^{1/2}(k)}\,|b_0|, \quad \omega = \omega(k) + \Omega(k)$$

Вычисление дает

$$\Omega(\mathbf{k}) = |b_0|^2 \left[\frac{4V(-2\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k})^2}{4\omega^2(\mathbf{k}) - \omega^2(2\mathbf{k})} - W(\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k})\right] =$$

$$= \omega(\mathbf{k})(ka)^2 \left[\frac{1}{2}\,\frac{\omega^2(\mathbf{k})}{4\omega^2(\mathbf{k}) - \omega^2(2\mathbf{k})} + \frac{1}{4} - \frac{3\alpha\,|\mathbf{k}|^3}{16\omega(\mathbf{k})}\right] \tag{2.11}$$

В пределе малых k эта формула приобретает вид $\Omega(k) = {}^1/_2 (ka)^2 \omega(k)$, что совпадает с формулой, полученной Стоксом в 1847 г. Таким образом, решение (2.9) аппроксимирует периодическую волну конечной амплитуды.

В случае

$$k = \left(\frac{a}{2g}\right)^{1/2}$$

сдвиг частоты обращается в бесконечность; при больших k он отрицателен.

В пределе при $k \to \infty$ имеем:

$$\Omega(k) = -\frac{1}{16}(ka)^2 \omega(k)$$

3. Устойчивость установившихся волн конечной амплитуды. Рассмотрим развитие малых возмущений на фоне установившейся периодической волны. Будем искать $a(\mathbf{k})$ в виде

$$a(\mathbf{k}) = b_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) e^{-i\omega t} + \alpha(\mathbf{k}, t) e^{-i\omega t}, \qquad \omega = \omega(\mathbf{k}_0) + \Omega(\mathbf{k}_0) \tag{3.1}$$

Величину $\alpha(\mathbf{k})$ будем предполагать малой в том смысле, что

$$\int |\alpha(\mathbf{k})| \, d\mathbf{k} \ll |b_0|$$

Линеаризуем уравнение (1.15) по величине $\alpha(\mathbf{k})$. При этом в правой части уравнения учтем только медленно меняющиеся по времени члены. Получим

$$\frac{\partial \alpha(\mathbf{k})}{\partial t} = -2ib_0 e^{i\gamma t} V(-\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \alpha^*(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \tag{3.2}$$

$$\gamma = \omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) - \omega(\mathbf{k}_0) - \Omega(\mathbf{k}_0)$$

Из уравнения (3.2) исключим $\alpha(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-i\gamma t} \frac{\partial \alpha(\mathbf{k})}{\partial i}\right) = \frac{8\pi\omega(\mathbf{k}_0)}{|\mathbf{k}_0|} e^{-i\gamma t} a^2 V(-\mathbf{k}_0, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \alpha(\mathbf{k}) \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) допускает решение в виде

$$\alpha(\mathbf{k}) = ce^{qt}$$

$$q = {}^1/_2 i\gamma \pm \sqrt{|b_0|^2 U^2(-\mathbf{k}_0, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) - {}^1/_4 \gamma^2} \tag{3.4}$$

Неустойчивость имеет место, если выражение под радикалом положительно. Для того, чтобы неустойчивость существовала при сколь угодно малых b_0, необходимо существование решений уравнения $\gamma = 0$. Если в том уравнении пренебречь малым членом $\Omega(\mathbf{k}_0)$, то придем к системе уравнений (2.5). Как было установлено в п. 2, эта система разрешима для капиллярных волн; таким образом, неустойчивость этого типа имеет место для капиллярных волн. Неустойчивые волновые векторы сосредоточены вблизи поверхности $\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$ в слое, толщина которого пропорциональна амплитуде. Максимальный инкремент неустойчивости имеет порядок $\mathrm{Re}\, q \sim (\mathbf{k}a)\,\omega(\mathbf{k})$.

Для гравитационных волн эта неустойчивость невозможна. Однако для них возможны более медленные неустойчивости. Воспользуемся уравнением (2.3) и подставим в него $A(\mathbf{k})$ в виде

$$A(\mathbf{k}) = b_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) e^{-i\Omega(\mathbf{k}_0)t} + \alpha(\mathbf{k}, t)$$

Линеаризуя по $\alpha(\mathbf{k}, t)$ получим

$$\frac{\partial \alpha(\mathbf{k})}{\partial t} = 2T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}) |b_0|^2 \alpha(\mathbf{k}) + e^{-2i\Omega(\mathbf{k}_0)t} T(\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0) b_0^2 \alpha^*(2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})$$

Это уравнение можно привести к уравнению типа (3.2); оно имеет решения, пропорциональные e^{qt}, причем для q получаем

$$q = {}^1/_2 i\delta \pm \sqrt{|b_0|^2 T^2(\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)^2 - {}^1/_4 \delta^2}$$

$$\delta = \omega(\mathbf{k}) + \omega(2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) - 2\omega(\mathbf{k}_0) + 2|b_0|^2 [T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}) + T(2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) - T(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)] \tag{3.5}$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|\frac{d\omega}{d\mathbf{k}} \gg \omega |b|^2 \tag{3.6}$$

В этом случае членами, пропорциональными b^2 в формуле (3.5), можно пренебречь. Условие существования неустойчивости при сколь угодно малых амплитудах есть $\delta = 0$, что эквивалентно существованию решений у системы уравнений

$$2\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2), \qquad 2\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \tag{3.7}$$

Очевидно, что для существования решений этой системы достаточно выполнение неравенства

$$\omega\left(\frac{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}{2}\right) > \frac{\omega(\mathbf{k}_1)+\omega(\mathbf{k}_2)}{2} \tag{3.8}$$

где векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ направлены по одной прямой. Неравенство (3.8) есть требование выпуклости вверх функции $\omega(k)$. Для гравитационных волн

$$\left[|\mathbf{k}| \ll \left(\frac{g}{\alpha}\right)^{1/2}\right]$$

это неравенство заведомо выполняется.

Наоборот, для капиллярных волн выполняется обратное неравенство, обозначающее, что неустойчивость указанного типа невозможна.

Уравнение (3.7) задает поверхность в k-пространстве. Неустойчивые векторы лежат вблизи этой поверхности в слое, толщина которого пропорциональна b^2. Максимальный инкремент неустойчивости для гравитационных волн имеет порядок

$$\gamma \sim (ka)^2\,\omega(k)$$

Существуют неустойчивости и более высокого порядка, отвечающие законам сохранения m

$$n\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2), \qquad n\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$$

По порядку величины инкремент таких неустойчивостей равен $\gamma(k) \sim (ka)^n\omega(k)$. Все эти неустойчивости можно называть распадными.

Перейдем теперь к неустойчивостям, для которых $|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0| \ll \mathbf{k}_0$. Для этого воспользуемся непосредственно уравнением (3.3). Вполне конечной амплитуде соответствует решение

$$b = b_0 \exp(-iw|b_0|^2 t)$$

Будем теперь искать решение в виде

$$\Psi = \exp(-iw|b_0|^2 t)\{b_0 + \alpha e^{-i\omega t + i\varkappa_0 z} + \alpha^* e^{i\omega t - i\varkappa_0 z}\}, \qquad \varkappa_0 \ll \mathbf{k}_0$$

Тогда для ω получим

$$\omega = \pm\sqrt{\omega|b_0|^2\lambda\varkappa_0^2 + {}^1/_4\lambda^2\varkappa_0^4} \tag{3.9}$$

Из формулы (3.9) видно, что неустойчивость возможна, если $w\lambda < 0$, причем неустойчивы лишь возмущения с достаточно малыми волновыми векторами

$$\varkappa_0^2 < \frac{4w}{\lambda}|b_0|^2$$

Рассмотрим случаи различных волновых чисел для поверхностных волн.

1. В области волновых чисел

$$k_0 < \sqrt{\sqrt{3/4} - 1}\,(g/\alpha)^{1/2}$$

где $w > 0$, $\lambda_\perp > 0$, $\lambda_\parallel < 0$, область неустойчивости в плоскости $\varkappa_x$, $\varkappa_y$ ограничена неравенствами $0 < |\lambda_\parallel \varkappa_x^2 - \lambda_\perp \varkappa_y^2 < 4|b|^2 w$, т. е. лежит между гиперболой

$$4|b|^2 w = \lambda_\parallel \varkappa_x^2 - \lambda_\perp \varkappa_y^2$$

и ее асимптотами.

2. В области

$$\sqrt{\sqrt{4/3} - 1}\,(g/\alpha)^{1/2} < k_0 < 1/\sqrt{2}\,(g/\alpha)^{1/2}$$

где $\lambda_\perp > 0$, $\lambda_\parallel > 0$, $w > 0$, неустойчивость вообще невозможна.

3. В области капиллярных волн

$$k_0 > 1 / \sqrt{2}\,(g / \alpha)^{1/2}, \qquad \lambda_\perp > 0,\ \lambda_\parallel > 0,\ w < 0$$

область неустойчивости есть внутренность эллипса

$$\lambda_\parallel \varkappa_x^2 + \lambda_\perp \varkappa_y^2 = 4|b|^2 w$$

Сделаем в уравнении (2.9) замену переменных

$$\Psi = \sqrt{n} \exp\left[\frac{i}{\lambda}\int v dz\right]$$

Уравнение (3.9) перейдет в систему уравнений

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(nv) = 0 \qquad (3.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial z} = -w\lambda\frac{\partial n}{\partial z} + \frac{\lambda^2}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\sqrt{n}$$

Эта система уравнений подобна уравнениям газовой динамики с адиабатической зависимостью давления от плотности

$$P = \frac{w\lambda n^2}{2}$$

и отличается от них добавочным членом, содержащим третью производную по z. Если рассматривать достаточно крупномасштабные движения с характерным масштабом L, то при

$$\frac{1}{L} \ll \frac{2wn_0}{\lambda}$$

этим членом можно пренебречь. При положительном давлении $w\lambda > 0$ уравнения (3.10) описывают звуковые волны со скоростью, равной $\sqrt{w\lambda n_0}$. При отрицательном давлении скорость звука становится мнимой, это означает, что начальные возмущения нарастают экспоненциально по закону

$$v \sim \exp\left(t\sqrt{|w\lambda|\, n_0}\right)$$

Поэтому эту неустойчивость можно назвать неустойчивостью типа отрицательного давления.

Заметим, что формулу (3.9) для инкремента неустойчивости отрицательного давления можно получить, устремляя $k \to k_0$ в формуле (3.5). Таким образом, неустойчивость отрицательного давления есть предельный случай медленной распадной неустойчивости гравитационных волн.

Автор благодарит Л. В. Овсянникова и Р. З. Сагдеева за плодотворное обсуждение.

Поступила 22 VI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика, ОГИЗ — Гостехиздат, 1964.
2. Моисеев Н. Н. Вводная статья к сборнику «Поверхностные волны». Физматгиз, 1960.
3. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. Изд-во АН СССР, 1964.
4. Захаров В. Е. Решаемая модель слабой турбулентности. ПМТФ, 1965, № 1, стр. 14.
5. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы. ЖТФ, 1963, т. 32, стр. 1921.
6. Ораевский В. Н. Устойчивость нелинейных установившихся колебаний плазмы. Ядерный синтез, 1964, т. 4, вып. 4, стр. 263.
7. Литвак А. Г., Таланов В. И. Применение параболического уравнения к расчету полей в диспергирующих нелинейных средах. Изв. вузов, Радиофизика, 1967, т. 10, вып. 4, стр. 539.