40. Лифшиц Л.С. Расчет устойчивости трубопроводов против хрупких разрушений // Строительство трубопроводов. — 1968. — № 3.
41. Партон В.З. Механика разрушения. От теории к практике. — М.: Наука, 1990.
42. Бойд Дж. Мурей. Практические примеры проектирования конструкций судов с учетом сопротивления хрупкому разрушению // Разрушение. — М.: Машиностроение, 1977. — Т. 5.
43. Адачи Хиро. Методы проектирования артиллерийского оружия // Там же.
44. Вессел Э., Кларк У., Прайл У. Расчеты стальных конструкций с крупными сечениями методами механики разрушения // Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению. — М.: Мир, 1972.
45. Друккер Д. Макроскопические основы теории хрупкого разрушения // Разрушение. — М.: Мир, 1973. — Т. 1.
46. Иванов А.Г., Рыжанский В.А. Запасы прочности и надежность крупногабаритных конструкций // ПМТФ. — 1994. — № 1.
47. Черепанов Г.П. Хрупкая прочность сосудов под давлением // ПМТФ. — 1969. — № 6.
48. Огородников В.А., Иванов А.Г. Зависимость откольной прочности металлов от амплитуды ударно-волновой нагрузки // ФГВ. — 1992. — № 1.
49. Stronge W.J., Ma Xiaoqing, Zhao Lanting. Fragmentation of explosively expanded steel cylinders // Int. J. Mech. Sci. — 1989. — V. 31, N 11/12.
50. Огородников В.А., Иванов А.Г., Лучинин В.И. и др. О природе масштабного эффекта при высокоскоростном разрушении (отколе) // ФГВ. — 1993. — № 6.
51. Махутов Н.А., Сериков С.В., Котоусов А.Г. Эскалационное разрушение трубопроводов // Пробл. прочности. — 1992. — № 12.

г. Арзамас-16

Поступила 1/VI 1993 г., в окончательном варианте — 23/VII 1993 г.

УДК 539.3

В.Н. Юрков

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК С РАЗРЕЗАМИ-ТРЕЩИНАМИ

В отличие от [1,2] предложенный в [1] энергетический подход в данной работе применяется к решению очень сильнонелинейных краевых задач неклассической теории анизотропных слоистых оболочек, содержащих разрезы-трещины. Рассматриваются три типа нелинейности: геометрическая, физическая и конструктивная. Третий тип нелинейности появляется в результате изменения расчетной схемы: при воздействии внешней нагрузки на оболочку с разрезом-трещиной может возникнуть контакт берегов разреза в сжатой зоне, поэтому следует определить его влияние на коэффициент интенсивности напряжений. Исследуются слоистые пологие оболочки, ослабленные одной или двумя коллинеарными прямолинейными в плане сквозными разрезами-трещинами. Основные требования, предъявляемые к пакету слоев, изложены в [1]. Поведение рассматриваемых оболочек с разрезами-трещинами описывается теорией типа Тимошенко, учитывающей геометрическую и физическую нелинейности. Предполагается, что во всех точках тела оболочки имеет место процесс активной деформации при простом нагружении с изотропным упрочнением [3—5].

1. Постановка задачи. Сформулируем вариационную задачу статики трижды нелинейной неклассической теории типа Тимошенко ортотропной слоистой пологой оболочки, содержащей разрез-трещину длиной $2L$, расположенный вдоль оси X_1. Декартова прямоугольная система координат

$X_i(i = 1, 2, 3)$, начало которой расположено в центре разреза, отнесена к координатной поверхности оболочки. Оси координат совпадают с осями ортотропии всех слоев. На поверхность оболочки с разрезом-трещиной действует внешняя нагрузка интенсивностью q_n.

Нелинейная вариационная задача ставится следующим образом: определить стационарное значение нелинейного функционала V, выражающего полную или дополнительную работу оболочки с разрезом-трещиной, исходя из условия, что первая вариация $\delta V = 0$ по всем независимым варьируемым функциональным аргументам, удовлетворяющим кинематическим $u_{nj} = u^0_{nj}$, $\varphi_{nt} = \varphi^0_{nt}$ или статическим $N_{njk} = N^0_{njk}$, $M_{njk} = M^0_{njk}$ $(j, k = 1, 2, 3;\ t = 2, 3)$, или смешанным неоднородным граничным условиям на контуре оболочки для всего пакета [6], а также граничным условиям на поверхности разреза: на участке контакта $|x_1| \leqslant L$, $h_0 \leqslant x_3 \leqslant \frac{h}{2}$ при $x_2 = 0$, $N^+_{njk} = N^-_{njk}$, $M^+_{njk} = M^-_{njk}$, $v^+ - v^- \geqslant c$, на поверхности разреза, свободной от контактных напряжений, $N_{njk} = 0$, $M_{njk} = 0$ (h_0 — расстояние от координатной поверхности до начала контактного участка, h — толщина оболочки, $N^\pm_{njk}$, $M^\pm_{njk}$ — сжимающие, сдвигающие, перерезывающие, изгибающие и крутящие контактные усилия и моменты, $v^\pm$ — перемещения точек контура разреза контактной области, c — начальное раскрытие разреза).

Локальное напряженно-деформированное состояние, возникающее непосредственно у разреза-трещины, описывается нелинейной вариационной задачей для «бесконечной» слоистой ортотропной оболочки, содержащей этот разрез-трещину, заключающейся в следующем: определить стационарное значение нелинейного функционала V, выражающего полную или дополнительную энергию оболочки с разрезом-трещиной; экстремали должны удовлетворять краевым условиям на поверхности разреза: на участке контакта $|x_1| \leqslant L$, $h_0 \leqslant x_3 \leqslant \frac{h}{2}$ при $x_2 = 0$ $N_{njk} = N^1_{njk} + N^+_{njk}$, $M_{njk} = M^1_{njk} + M^+_{njk}$, на кромках разреза, свободных от контактных напряжений, $N_{njk} = N^1_{njk}$, $M_{njk} = M^1_{njk}$ (N^1_{njk}, M^1_{njk} — продольная, сдвигающая и поперечная силы, изгибающий и крутящий моменты для всего пакета, взятые из решения для оболочки без трещины в том месте, где предполагается возникновение трещины), а также условиям на «бесконечности»: $u_{nj}|_{\rho\to\infty} \to 0$, $\varphi_{nt}|_{\rho\to\infty} \to 0$ (u_{nj} — перемещение точек координатной поверхности в направлении осей X_i соответственно, φ_{nt} — углы поворота нормали к срединной поверхности в плоскостях X_1X_3 и X_2X_3, ρ — расстояние от вершины разреза).

Важный момент для рассматриваемой сильнонелинейной теории — это выбор способа представления функциональной зависимости $\sigma_i = \varphi(e_i)$ (σ_i — интенсивность напряжений, e_i — интенсивность деформаций), аппроксимирующей индикаторную кривую материала при простом растяжении или сдвиге и удовлетворяющей условию независимости от вида напряженного состояния. В настоящей работе предполагается, что материал оболочек одинаково работает на растяжение и сжатие, т.е. функция $\varphi(e_i)$ должна быть нечетной. В связи с этим такой зависимостью, используемой в настоящей работе, является кубическая сплайн-функция [7, 8].

Для решения задач теории оболочек с разрезами применяются условия пластического состояния Мизеса [4] и энергетическая теория упрочнения Хилла [5], позволяющие рассчитывать материал с изотропным нелинейным упрочнением.

Решение поставленной нелинейной вариационной задачи сводится к определению величины параметров, определяющих локальное разрушение.

2. Метод решения. В настоящей работе рассматриваются очень сильнонелинейные задачи с симметричным распределением напряжений около вершины разреза, характеризующиеся интенсивностью освобождающейся энергии G_{I} и коэффициентом интенсивности напряжений K_{I} при нормальном отрыве [1, 2, 9, 10].

Вычисления интенсивности G_{I} и коэффициента K_{I} производились на основании энергетического подхода, описываемого формулами

$$V = \iint\limits_{S}\int_{0}^{\mathbf{r}} q(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} dS, \tag{2.1}$$

$$G_{\text{I}} = \partial V/\partial L,\ \ K_{\text{I}}^2 = G_{\text{I}}\Big/\left\{\left(\frac{a_{11}a_{22}}{2}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{a_{22}}{a_{11}}\right)^{1/2} + \frac{2a_{12}+a_{66}}{2a_{11}}\right]^{1/2}\right\},$$

где V — потенциальная энергия нелинейной деформации оболочки с разрезом, представляющая собой площадь, ограниченную диаграммой нагрузка — перемещение, и вычисляемая по формуле Симпсона; $q(\mathbf{r})$ — функция, описывающая кривую нагрузка — перемещение; $\mathbf{r}$ — вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки с разрезом; S — поверхность оболочки с разрезом, находящаяся под нагрузкой;

$$a_{11} = \sum_{i=1}^{n} a^i_{11},\ a^i_{11} = 1/E^i_{x_1};\ \ a_{22} = \sum_{i=1}^{n} a^i_{22},\ a^i_{22} = 1/E^i_{x_2};\ \ a_{12} = \sum_{i=1}^{n} a^i_{12},$$

$$a^i_{12} = -\nu^i_{x_1x_2}/E^i_{x_1};\ \ a_{66} = \sum_{i=1}^{n} a^i_{66},\ \ a^i_{66} = 1/\mu^i_{x_1x_2};\ \ E^i_{x_1},\ E^i_{x_2}$$

— модули Юнга слоев; $\mu^i_{x_1x_2}$ — модуль сдвига слоев; $\nu^i_{x_1x_2}$ — коэффициент Пуассона слоев. Зависимости для упругих постоянных записаны на основании [6]. Формулы (2.1) приведены для оболочек с разрезами, у которых толщина $h = 1$.

Для физически нелинейных задач неклассической теории типа Тимошенко анизотропных слоистых оболочек с разрезами-трещинами вывод зависимости между интенсивностью G_{I} и коэффициентом K_{I}, представленной в (2.1) с учетом [9], заключается в следующем: примем гипотезу, что пластические деформации, появляющиеся в поверхностном слое последнего слоя оболочки в области вершины трещины локально на растянутой стороне, относятся к случаю маломасштабного пластического течения и локализованы в узкой полосе вдоль линии развития трещины, имеющей нулевую толщину и считающейся линией разрыва упругих смещений; при этом рассматриваемый слой оболочки у трещины ведет себя аналогично пластине, находящейся в состоянии равномерного растяжения; тогда величину упругих смещений находим из решения линейной задачи теории упругости [1].

При численном определении интенсивности G_{I} или коэффициента K_{I} применяются два метода: метод дифференциальной жесткости (метод податливости) и метод виртуального роста трещины, изложенные в [1, 10]. Основная трудность в обоих методах — вычисление компонентов вектора перемещения. Для их определения используется метод конечных элементов (МКЭ) в варианте перемещений. Главным в МКЭ является вывод матрицы жесткости [11]. На основании [12, 13] получена матрица жесткости треугольного конечного элемента ненулевой гауссовой кривизны из слоистого ортотропного материала для геометрически и физически нелинейной теории типа Тимошенко. Полученная матрица жесткости также используется и для расчета слоистых трансверсально-изотропных и изотропных произвольных оболочек с разрезами-трещинами [1].

3. Численные примеры и их анализ. Рассмотрим трехслойную изотропную квадратную в плане свободно опертую цилиндрическую панель с тремя случаями расположения разреза-трещины: *I* — в центре, *II* — сбоку, *III* — коллинеарно с обеих сторон. Геометрические и физические характеристики панели, изображенной на рис. 1, следующие: $h = 0{,}01$ м, $R = 0{,}20$ м,

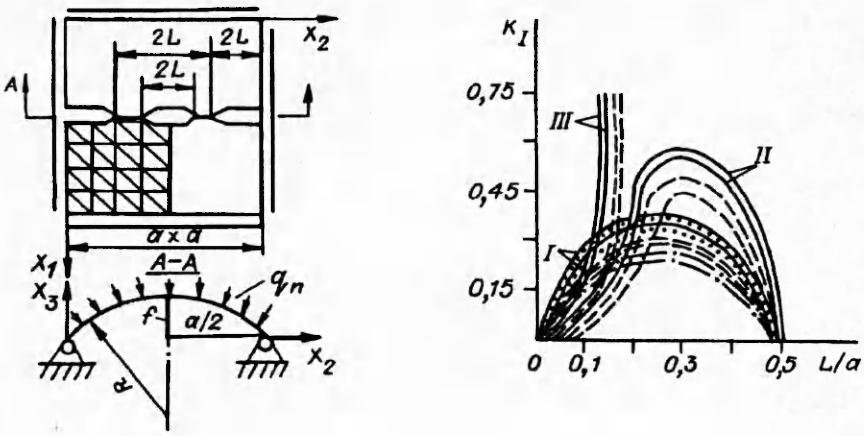

Рис. 1

$a = 0{,}30$ м, $f = 0{,}0677$ м, $0 \leqslant \nu \leqslant 0{,}5$. На рис. 1 представлены графики зависимости коэффициента K_{I} от параметра L/a. Для всех ситуаций расположения разреза-трещины полуось симметрии панели разбивалась на 13 и 25 узлов. Причем при разбивке полуоси панели на 13 узлов коэффициент K_{I} подсчитывался по методу податливости, при разбивке ее на 25 узлов — по методу виртуального роста трещины (эта процедура подтверждает сходимость и точность численных результатов). Относительная погрешность между графиками, полученными при разбивке полуоси симметрии на 13 и 25 узлов, для всех случаев расположения разреза-трещины не превышает 6 %. Сплошными линиями обозначены графики, полученные на основании геометрически и физически нелинейной теории оболочек (при неконтактирующих берегах разреза, т.е. при $c = 8 \cdot 10^{-5}$ м, которая определялась по методике, изложенной в [14]), штриховыми — на основании физически нелинейной теории, штрихпунктирными — на основании геометрически нелинейной теории; из их анализа можно сделать вывод, что коэффициент K_{I} существенно зависит от типа применяемой теории, а также и то, что в первую очередь необходимо учитывать физическую нелинейность, а затем геометрическую. На рис. 1 точками приведены графики, полученные при контактирующих берегах разреза, т.е. при $c = 0$. Из анализа соответствующих графиков можно сделать вывод, что контакт берегов разреза несущественно влияет на коэффициент K_{I} (погрешность менее 5 %).

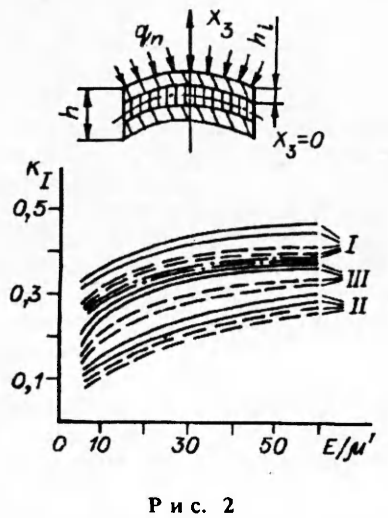

Рис. 2

Для вышеописанной цилиндрической панели, но уже из трансверсально-изотропных слоев на рис. 2 представлены графики зависимости коэффициента K_{I} от параметра E/μ' (μ' характеризует трансверсальность панели по толщине) для всех ситуаций расположения разреза-трещины при $h/L = 0{,}5$. Способ разбивки полуоси симметрии панели и методы определения коэффициента K_{I} аналогичны предыдущему случаю, а принятые обозначения графиков отвечают изображенным на рис. 1. Графики на рис. 2 иллюстрируют влияние трансверсальности оболочки по толщине на коэффициент K_{I} для всех типов теории. Относительная погрешность между соответствующими графиками для всех ситуаций расположения разреза-трещины не более 6 %.

$E^i_{x_1}/E^i_{x_2}$	K_{I}	$E^i_{x_1}/E^i_{x_2}$	K_{I}
2	0,407 0,428	20	0,399 0,418
5	0,403 0,426	40	0,399 0,426
10	0,404 0,428	60	0,408 0,420

Рассмотрим точно такую же, как и в предыдущем случае, панель, но слои уже обладают свойствами ортотропного материала с разрезом-трещиной в центре, и определим влияние степени ортотропии E_{x_1}/E_{x_2} на коэффициент K_{I}. Результаты для геометрически и физически нелинейной теории представлены в таблице ($h/L = 0,5$, верхние числа получены при $n = 13$, а нижние при $n = 25$), из анализа данных которой можно сделать вывод, что степень ортотропии не влияет на K_{I}. Имеющая место относительная погрешность между расчетами относится к вычислительной погрешности и влиянию густоты сетки.

На основании вышеизложенного можно сказать, что сформулированная очень сильнонелинейная вариационная задача теории типа Тимошенко анизотропных слоистых оболочек, содержащих разрезы-трещины, реализована достаточ о просто при помощи энергетического подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юрков В.Н. Энергетический подход к решению задач неклассической теории неоднородных анизотропных оболочек, содержащих трещины-разрезы // ПМТФ. — 1992. — № 3.
2. Осадчук В.А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. — Киев: Наук. думка, 1985.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
4. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975.
5. Хилл Р. Математическая теория пластичности. — М.: Гостехиздат, 1956.
6. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. — М.: Машиностроение, 1988.
7. Милейковский И.Е., Трушин С.И. Расчет тонкостенных конструкций. — М.: Стройиздат, 1989.
8. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. — М.: Стройиздат, 1978.
9. Атлури С., Кобаяси А. Квазистатическое разрушение упругопластических тел // Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Атлури. — М.: Мир, 1990.
10. Юрков В.Н. Метод податливости в задачах о напряженно-деформированном состоянии пластин, содержащих трещины: Автореф. дис. канд. тех. наук. — Киев, 1990.
11. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.
12. Утку Дж. Матрица жесткостей для тонких треугольных элементов ненулевой гауссовой кривизны // РТК. — 1967. — Т. 5, № 9.
13. Хофмейстер Л., Гринбаум Г., Ивенсен Д. Упругопластический расчет больших деформаций методом конечных элементов // РТК. — 1971. — Т. 9, № 7.
14. Юрков В.Н. Метод податливости в решении задач теории изгиба пластин, содержащих трещины. — Киев, 1987. — Деп. в ВИНИТИ 5.05.87, № 3169.

г. Киев

Поступила 17/II 1993 г.,
в окончательном варианте —8/IX 1993 г.