

ЛИТЕРАТУРА

1. Schoek P. A. An Investigation of the Anode Energy Balance of High Intensity Arcs in Argon.— Modern Developments in Heat Transfer, N. Y., 1963.
2. Tankin P. S., Berry I. M. Experimental Investigation of Radiation from an Argon Plasma. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, N 10.
3. Шир Ц., Кунни Дж. А., Ротакер Д. Л. Подвод газа через поверхность пористого анода электрической дуги. Ракетная техника и космонавтика, 1964, т. 2, № 3.
4. Schoek P. A., Eckert E. R. G. Experiments on the transpiration cooled anode of an electric arc. Proc. 1961 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute. Stanford University Press, 1961.
5. Eckert E. R. G., Schoek P. A., Winter E. R. T. Thermische Untersuchung eines elektrischen Hochstromlichtbogens mit poröser, gasgekühlter Anode. Intern. J. Heat Mass Transfer, 1962, vol. 5, p. 292—305.
6. Кремерс Ц. Дж., Эккерт Е. Р. Г. Поле температур в дуге при пористом охлаждении анода. Ракетная техника и космонавтика, 1965, т. 3, № 10.
7. Кинни Р. Б., Спэрроу Е. М., Уинтер Е. Р. Ф. Краткий обзор экспериментов с системой теплоотвода при пористом охлаждении электрической дуги. Теплопередача, 1964, т. 64, № 1.
8. Кутателадзе С. С., Ребров А. К., Ярыгин В. Н. О влиянии конвективного теплообмена на характеристики плазмотрона. ПМТФ, 1967, № 1.
9. Кулик П. П., Паневин И. Г., Хвесюк В. И. Теоретический расчет вязкости, теплопроводности и критерия Прандтля аргона при наличии ионизации. Теплофизика высоких температур, 1963, № 1.
10. Кутателадзе С. С., Ясько О. И. Обобщение характеристик электродуговых подогревателей. Инж.-физ. ж., 1964, т. 7, № 4.
11. Даутов Г. Ю., Жуков М. Ф. Некоторые обобщения исследований электрических дуг. ПМТФ, 1965, № 2.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ЛУЧИСТЫЙ НАГРЕВ ТЕЛА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

А. Л. Бурка

(Новосибирск)

Рассматривается процесс нагрева цилиндра ($0 \leq r \leq R$, $0 \leq z \leq L$). верхнее основание которого подвергается лучистому нагреву, а на остальной части поверхности осуществляется теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона.

Математическая постановка задачи записывается следующим образом:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq z \leq L \end{array} \right), \quad \tau \geq 0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = h [f(R, z, \tau) - T(R, z, \tau)], \quad \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = h_1 [T(r, 0, \tau) - f(r, 0, \tau)]$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=L} = E(r, L, \tau), \quad T(r, z, 0) = T_0, \quad E(r, L, \tau) = H [T_1^4 - T^4(r, L, \tau)]$$

Здесь a — коэффициент температуропроводности, H — относительный коэффициент излучения, T_1 — температура излучателя, T_0 — начальная температура тела, $f(r, z, \tau)$ — температура окружающей среды, h , h_1 — относительные коэффициенты теплообмена по соответствующим поверхностям.

Преобразование Лапласа приводит краевую задачу (1) к следующей краевой задаче в изображениях:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{p}{a} r u \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{T_0}{a}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial r} + h u \right)_{r=R} = h F(r, z, p)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} - h_1 u \right)_{z=0} = h_1 F(r, z, p), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=L} = E_1(r, L, p) \quad (2)$$

Здесь

$$F = \int_0^{\infty} f(r, z, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad u = \int_0^{\infty} T(r, z, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad E_1 = \int_0^{\infty} E(r, L, \tau) e^{-p\tau} d\tau$$

Умножим уравнения (2) на $J_0(\mu_n r / R) dr$ и проинтегрируем в промежутке $(0, R)$: краевая задача (2) сведется к одномерной

$$\frac{d^2 v_1}{dz^2} - \kappa v_1 = \Phi(z, p), \quad \left(\frac{dv_1}{dz} - h_1 v_1\right)_{z=0} = h_1 F_1(0, p), \quad \left(\frac{dv_1}{dz}\right)_{z=L} = E_2(L, p) \quad (3)$$

Здесь

$$v_1(z) = \int_0^R r u(r, z, p) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr, \quad F_1(z, p) = \int_0^R r F(r, z, p) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr$$

$$\mu_n = \left(\kappa_n - \frac{pR}{a}\right)^{1/2}$$

$$E_2(L, p) = \int_0^R r E_1(r, L, p) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr, \quad \Phi(z, p) = hR J_0(\mu_n) F(R, z, p) + \frac{T_0 R^2}{a \mu_n} J_1(\mu_n)$$

Величины $J_0(\mu_n r / R)$ — собственные функции краевой задачи

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dy}{dr} \right) + \left(\kappa - \frac{p}{a} \right) y = 0, \quad \left(\frac{dy}{dr} + hy \right)_{r=R} = 0 \quad (4)$$

При этом собственные значения μ_n определяются из уравнения

$$\mu_n J_1(\mu_n) - R h J_0(\mu_n) = 0$$

Не умаляя общности постановки задачи, полагаем

$$f(r, z, \tau) = f(\tau) = T_0 - k\tau$$

Решение задачи (3) запишется в виде

$$v_1(z, p) = \frac{T_0 R^2 J_1(\mu_n)}{a \mu_n \gamma_n^2} + hR J_0(\mu_n) \frac{F(p)}{\gamma_n^2} - \frac{h_1 T_0 R^2 J_1(\mu_n) \operatorname{ch} \gamma_n(L-z)}{a \mu_n \gamma_n^2 \omega(\gamma_n)} +$$

$$+ \left[\frac{R^2 J_1(\mu_n)}{\mu_n} - \frac{hR J_0(\mu_n)}{\gamma_n^2} \right] \frac{h_1 F(p) \operatorname{ch} \gamma_n(L-z)}{\omega(\gamma_n)} +$$

$$+ \frac{1}{\gamma_n \omega(\gamma_n)} (h_1 \operatorname{sh} \gamma_n z + \gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n z) \int_0^R \xi J_0(\mu_n \xi) E_1(\xi, L, p) d\xi \quad (5)$$

Здесь $\gamma_n = (\mu_n^2 / R^2 + p / a)^{1/2}$, $\omega(\gamma_n) = \gamma_n \operatorname{sh} \gamma_n L + h_1 \operatorname{ch} \gamma_n L$.

В работе [1] показано, что $v_1(z, p)$ — коэффициенты Фурье разложения функции $v(r, z, p)$ по ортонормированной системе собственных функций

$$\frac{1}{N_n} J_0(\mu_n r / R), \quad N_n = \frac{R^2}{2} [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)] -$$

норма собственных функций.

Тогда решение краевой задачи, записанной в изображениях, выразится

$$v(r, z, p) = \sum_{n=1}^{\infty} v_1(z, p) J_0(\mu_n r / R) / N_n \quad (6)$$

Окончательное решение задачи в оригинале получается посредством обратного преобразования Лапласа

$$T(r, z, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} u(r, z, p) e^{p\tau} dp \quad (7)$$

Предполагая здесь законность изменения порядка интегрирования и суммирования с учетом (6), будем почленно определять оригинал для $v_1(z, p)$

$$\frac{T_0 R^2 J_1(\mu_n)}{a \mu_n \gamma_n^2} \doteq \frac{T_0 R^2 J_1(\mu_n)}{\mu_n} e^{-a \mu_n \tau / R^2} \quad (8)$$

$$\Psi_1(\tau) = \frac{h_1 T_0 R^2 J_1(\mu_n)}{a \mu_n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\operatorname{ch} \gamma_n (L-z)}{\gamma_n^2 \omega(\gamma_n)} e^{s\tau} ds$$

Положим $s = a \gamma_n^2$, отсюда имеем

$$\Psi_1(\tau) = \frac{T_0 R^2 J_1(\mu_n)}{\mu_n} e^{-a \mu_n^2 \tau / R^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{s/a} (L-z)}{s \Omega(s)} e^{s\tau} ds, \quad \Omega(s) = \omega(s)/h_1 \quad (9)$$

Знаменатель подынтегрального выражения (9) имеет бесчисленное множество полюсов s_m ($m = 0, 1, 2, \dots$); $s_0 = 0$, а все остальные корни определяются из уравнения

$$\operatorname{ctg} v = v / (L h_1), \quad v = i (s/a)^{1/2} L \quad (10)$$

По теореме разложения изображений [2] оригинал подынтегральной функции (9) равен сумме вычетов по всем полюсам

$$\Psi_1(\tau) = \frac{T_0 R^2 J_1(\mu_n)}{\mu_n} e^{-a \mu_n^2 \tau / R^2} \left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos v_m L e^{-a v_m^2 \tau / L^2} \right]$$

$$A_m = \frac{2 \sin v_m}{v_m + \sin v_m \cos v_m} \quad (11)$$

Найдем оригинал выражения

$$\Phi_2(p) = \frac{h_1 \operatorname{sh} \gamma_n z + \gamma_n \operatorname{ch} \gamma_n z}{\gamma_n \omega(\gamma_n)}$$

Положив, как и раньше, $s = a \gamma_n^2$, имеем

$$\Psi_2(\tau) = \frac{1}{2\pi i} e^{-a \mu_n^2 \tau / R^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\sqrt{s/a} \operatorname{sh} \sqrt{s/a} z + s/(h_1 a) \operatorname{ch} \sqrt{s/a}}{\Omega(s)} e^{s\tau} ds \quad (12)$$

Знаменатель подынтегрального выражения (12) имеет те же полюсы, что и знаменатель подынтегрального выражения (9). Это позволяет записать

$$\Psi_2(\tau) = \frac{a}{L} \sum_{m=1}^{\infty} A_m v_m [\sin v_m z / L + v_m / (h_1 L) \cos v_m z / L] \exp \left[-a \left(\frac{\mu_n^2}{R^2} + \frac{v_m^2}{L^2} \right) \tau \right] \quad (13)$$

Последнее слагаемое в (5) представляет собой произведение двух изображений. Оригиналу его находится из теоремы умножения изображений и записывается в виде:

$$\Phi_2(p) \int_0^R \xi J_0(\mu_n \xi / R) E_1(\xi, L, p) d\xi \doteq \int_0^\tau \Psi_2(\tau-t) dt \int_0^R \xi J_0(\mu_n \xi / R) E(\xi, L, t) d\xi \quad (14)$$

Найдем оригинал выражения $\Phi_3(p) F(p)$, где

$$\Phi_3(p) = \left[\frac{R^2 J_1(\mu_n)}{\mu_n} - \frac{h R J_0(\mu_n)}{\gamma_n^2} \right] \frac{h_1 \operatorname{ch} \gamma_n (L-z)}{\omega(\gamma_n)}$$

Имеем

$$\Psi_3(\tau) = \frac{1}{2\pi i} e^{-a \mu_n^2 \tau / R^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [s R^2 J_1(\mu_n) - h a \mu_n J_0(\mu_n)] \operatorname{ch} [\sqrt{s/a} (L-z)] \frac{e^{s\tau}}{s \Omega(s)} ds \quad (15)$$

Как и ранее, интеграл (15) равен сумме вычетов по полюсам s_m ($m = 0, 1, 2, \dots$), а следовательно,

$$\Psi_3(\tau) = -e^{-a \mu_n^2 \tau / R^2} \left\{ a h R J_0(\mu_n) - a \sum_{m=1}^{\infty} A_m [v_m^2 J_1(\mu_n) / (\mu_n L^2) + \right.$$

$$\left. + h R J_0(\mu_n)] \cos v_m L (1-z/L) e^{-a v_m^2 \tau / L^2} \right\} \quad (16)$$

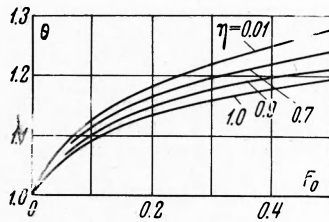
Тогда

$$\Phi_3(p) F(p) \doteq \int_0^{\tau} \Psi_3(\tau - t) f(t) dt$$

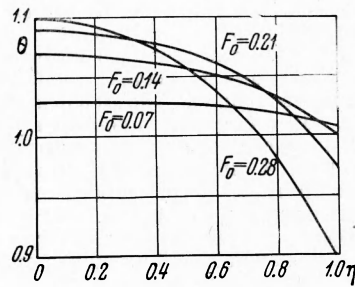
Оригинал от второго слагаемого (5) определяется

$$\frac{hRJ_0(\mu_n)}{\gamma_n^2} F(p) \doteq ahRJ_0(\mu_n) \int_0^{\tau} \exp[-a\mu_n^2(\tau - t)/R^2] f(t) dt \quad (17)$$

Рассмотрим частный случай, когда основание цилиндра теплоизолировано. Это соответствует случаю, когда критерий $Bi = h_1 L$ стремится к нулю.



Фиг. 1



Фиг. 2

Тогда корни уравнения (10) равны $v_m = \pi(m - 1)$ ($m = 1, 2, \dots$), и, следовательно,

$$\lim_{v_m \rightarrow (m-1)\pi} A_m = \lim_{v_m \rightarrow (m-1)\pi} \frac{2 \sin v_m}{v_m + \sin v_m \cos v_m} = \begin{cases} 1 & (m = 1) \\ 0 & (m > 1) \end{cases} \quad (18)$$

Учитывая это обстоятельство, легко заметить, что при $Bi \rightarrow 0$

$$\Psi_1(\tau) = \Psi_2(\tau) = \Psi_3(\tau) \rightarrow 0 \quad (19)$$

В рассматриваемом случае температурное поле запишется в виде

$$\begin{aligned} \theta(r, z, \tau) = & 1 - k\tau/T_0 + \frac{kR^2}{4aT_0} \left[(1 - \rho^2) + \frac{z}{Rh} \right] - \frac{k}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{x_n} J_0(\mu_n \rho) \exp(-x_n \tau) + \\ & + \eta \int_0^{\tau} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \exp[-y_m(\tau - t)] \cos \frac{\pi m z}{L} \right\} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n A_n}{J_1(\mu_n)} \exp[-x_n(\tau - t)] dt \int_0^1 \xi J_0(\mu_n \rho) J_0(\mu_n \xi) \Phi(\xi, L, t) d\xi \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} x_n = a\mu_n^2/R^2, \quad y_m = a(\pi m/L)^2, \quad A_n = \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} \\ \eta = \frac{aH(T_1^4 - T_0^4)}{R^2 L T_0}, \quad \theta(r, z, \tau) = \frac{T(r, z, \tau)}{T_0}, \quad \Phi(r, L, \tau) = \frac{E(r, L, \tau)}{H[T_1^4 - T_0^4]} \end{aligned}$$

В выражении (20) безразмерная результирующая плотность излучения $\Phi(r, L, \tau)$ — неизвестная величина. Поэтому температурное поле формально представлено через результирующую неизвестную плотность излучения. Как и для одномерного случая [3], полагая в (20) $z = L$, задачу можно свести к нелинейному интегральному уравнению относительно результирующей плотности излучения $\Phi(r, L, \tau)$.

Это уравнение можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, \tau) = & \delta - \gamma \left\{ 1 - k\tau/T_0 + \frac{kR^2}{4\alpha T_0} \left[(1 - \rho^2) + \frac{2}{Rh} \right] - \frac{k}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{x_n} J_0(\mu_n \rho) \exp(-x_n \tau) + \right. \\ & + \eta_0 \int_0^{\tau} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-y_n(\tau - t)) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n A_n}{J_1(\mu_n)} \exp(-x_n(\tau - t)) dt \times \\ & \left. \times \int_0^1 \xi J_0(\mu_n \rho) J_0(\mu_n \xi) \Phi(\xi, t) d\xi \right\}^4 \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$\delta = T_1^4 / (T_1^4 - T_0^4), \quad \gamma = T_0^4 / (T_1^4 - T_0^4), \quad \eta_0 = \eta R^2$$

Интегральное уравнение (21) описывает процесс нагрева поверхности $z = L$ цилиндра, численное решение его получено итерационным методом Ньютона [4].

При «арифметизации» его интеграл по пространственной координате разбивался на конечную сумму по квадратурной формуле Гаусса, а интеграл по времени — по формуле прямоугольников. Таким образом, температурное поле $\theta(r, z, \tau)$ определялось после того, как в результате решения уравнения (21) были найдены значения результирующей плотности потока на поверхности $z = L$ в любой момент времени.

На фиг. 1 представлена зависимость безразмерной температуры поверхности $z = L$ от критерия Фурье для различных радиальных сечений при начальной температуре цилиндра $T_0 = 293^\circ \text{K}$.

На фиг. 2 представлена зависимость безразмерной температуры теплоизолированного основания $z = 0$ цилиндра от безразмерного радиуса для различных значений Фурье и критерия $B_i = 1$ при $T_0 = 293^\circ \text{K}$. Расчеты производились при следующих данных: $R = 0.12 \text{ м}$, $L = 0.015 \text{ м}$, $\alpha = 3.3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$, $H = 4.910^{-9} \text{ град}^3/\text{м}$.

Поступила 18 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.
2. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 2, М., Физматгиз, 1958.
3. Бурка А. Л. Несимметричный лучисто-конвективный прогрев неограниченной пластины. ПМТФ, 1966, № 2.
4. Канторович Л. В. О методе Ньютона. Тр. Матем. ин-та им. В. И. Стеклова, 1949, т. 28.

О ВОЗМОЖНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ КОРРЕЛЯЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Н. Ф. Деревянко (Москва)

В работе [1] был описан корреляционный метод измерения пульсаций скорости в стационарных плазменных потоках. При этом величина пульсаций определялась по значению девиации частоты в спектре кросскорреляционной функции оптических флуктуаций в двух близко расположенных точках вдоль по потоку.

В данной работе делается попытка обоснования подобного метода для измерения характеристик турбулентности как плазменных, так и любых низкотемпературных газовых потоков.

1. Влияние турбулентных пульсаций скорости на частотный спектр оптических флуктуаций. Пусть имеется однородное изотропное случайное поле M , элементами которого являются случайные множества гидродинамических характеристик турбулентного потока несжимаемой жидкости.

Будем регистрировать поле оптических флуктуаций N , полагая, что N является образом поля M при отображении g , т. е.

$$g(M) = \{g(X); X \in M\} \quad (1.1)$$

Здесь элемент X — случайное множество.

При этом отображение предполагается взаимно однозначным. То есть если $g: M \rightarrow N$, то для каждого $\alpha \in g(M)$ существует только один элемент $X \in M$, такой, что $g(X) = \alpha$ (α — случайная величина, служащая элементом поля N).

В этом случае поле N также будет однородным и изотропным.