УДК 624.131 + 532.215 + 534.22

В.Ф. Нестеренко

КОНТИНУАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СРЕДЕ

В работе рассматривается проблема волновых процессов в нелинейной дискретной среде. Автор придал уравнениям специальую форму, позволившую эффективно решать вопросы распространения возмущений в существенно нелинейных системах, в том числе и в «звуковом вакууме».

Длинноволновое приближение для одномерной дискретной системы частиц, взаимодействующих по степенному закону

$$f_{i,i-1} = A(u_{i-1} - u_i)^n, \tag{1}$$

где $f_{i,i-1}$ — сила взаимодействия между i-й и $(i—1)$-й частицами; A — константа; u_i — смещение i-й частицы из положения равновесия, позволило получить частные точные решения для стационарных периодических возмущений и характеристики уединенных волн нового типа [1—4]. При $n > 1$ («звуковой вакуум» по определению [2]) уединенные волны сжатия при деформации в максимуме ξ_{max}, много большей исходной ξ_0, качественно отличны от уравнения Кортевега-де Вриза. Начальная скорость звука не входит в характеристики солитонов и их размер (конечный) не зависит от амплитуды возмущения [1, 4]. Для случая $n = 3/2$, соответствующего закону Герца для упругих контактов сферических гранул, получено качественное согласие континуального приближения с численными расчетами и экспериментом [1]. При $n < 1$ солитоны сжатия не существуют, но возможны уединенные волны разрежения.

При $n \to 1$ нет гладкого перехода между соответствующими стационарными решениями для $n > 1$ и $n < 1$, что получило название в [3] «звуковая катастрофа». В [5] доказана модуляционная устойчивость периодических возбуждений «звукового вакуума» для $n = 3/2$, а в [6] исследован распад солитонов на контакте двух «звуковых вакуумов».

Отметим, что одномерные системы дискретных частиц представляют собой одну из возможностей получения физически обоснованных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, более высокого порядка по пространственной переменной, чем вторые производные. Уравнения такого типа используются для описания поведения сред со структурой в области интенсивных сдвиговых деформаций [7].

Поэтому представляет интерес получить континуальное приближение (без предположения о малости амплитуды возмущения) для дискретной системы частиц, в которой закон взаимодействия имеет более общий характер, чем степенной.

Рассмотрим систему уравнений для дискретной цепочки частиц:

$$m\ddot{u}_i = f(u_{i-1} - u_i) - f(u_i - u_{i+1}), \quad N \geqslant i \geqslant 2, \tag{2}$$

где m — масса частицы; f — сила взаимодействия; N — число частиц. Как и в [1—4] рассмотрим континуальное приближение приведенной дискретной системы (2), исходя из условия, что пространственный размер импульса $L \gg a$ (a — расстояние между частицами в состоянии равновесия). Полагаем, что смещение соседних частиц может быть получено путем разложения в ряд относительно смещения i-й частицы по малому параметру $\varepsilon = a/L$ до четвертого порядка включительно [8].

Тогда

$$u_i = u,$$

© В.Ф. Нестеренко, 1995.

$$u_{i-1} = u - u_x a + 1/2\, u_{xx} a^2 - 1/6\, u_{xxx} a^3 + 1/24\, u_{xxxx} a^4 + \ldots$$
$$u_{i+1} = u + u_x a + 1/2\, u_{xx} a^2 + 1/6\, u_{xxx} a^3 + 1/24\, u_{xxxx} a^4 + \ldots \quad (3)$$

Учет четвертого порядка дает первый член в дифференциальном уравнении, качественно отличный от классического волнового. Формулы (3) позволяют получить

$$u_{i-1} - u_i = - u_x a + 1/2\, u_{xx} a^2 - 1/6\, u_{xxx} a^3 + 1/24\, u_{xxxx} a^4 + \ldots = N(x) + \varphi(x),$$
$$u_i - u_{i+1} = - u_x a - 1/2\, u_{xx} a^2 - 1/6\, u_{xxx} a^3 - 1/24\, u_{xxxx} a^4 + \ldots = N(x) + \psi(x),$$
$$N(x) = - u_x a = a\xi, \;\; \xi = - u_x, \quad (4)$$
$$\varphi(x) = + 1/2\, u_{xx} a^2 - 1/6\, u_{xxx} a^3 + 1/24\, u_{xxxx} a^4 + \ldots,$$
$$\psi(x) = - 1/2\, u_{xx} a^2 - 1/16\, u_{xxx} a^3 - 1/24\, u_{xxxx} a^4 + \ldots$$

Используя выражения (4), запишем

$$f(u_{i-1} - u_i) = f(N(x) + \varphi(x)),$$
$$f(u_1 - u_{i+1}) = f(N(x) + \psi(x)). \quad (5)$$

Легко заметить, что $N(x)$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ имеют разный порядок малости по порядку ε.

$$\frac{\varphi(x)}{N(x)} \sim \frac{\psi(x)}{N(x)} \sim \varepsilon \ll 1. \quad (6)$$

Применяя (6), можно разложить в ряд функции f из (5)

$$f(N(x) + \varphi(x)) \approx f(N(x)) + f'/a \cdot \varphi + \frac{f''}{2a^2}\varphi^2 + \frac{f'''}{6a^3}\varphi^3 + \ldots,$$
$$f(N(x) + \psi(x)) \approx f(N(x)) + \frac{f'}{a}\psi + \frac{f''}{2a^2}\psi^2 + \frac{f'''}{6a^3}\psi^3 + \ldots \quad (7)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование функции $f(a\xi)$ по ξ. Из (7) получаем выражение для силы, действующей на i-ю частицу

$$f(u_{i-1} - u_i) - f(u_i - u_{i+1}) \approx \frac{f'}{a}(\varphi - \psi) + \frac{f''}{2a^2}(\varphi^2 - \psi^2) + \frac{f'''}{6a^3}(\varphi^3 - \psi^3) + \ldots \quad (8)$$

Используя выражение (4), имеем

$$\varphi - \psi \sim a^2 u_{xx} + \frac{a^4}{12} u_{xxxx} + 0(\varepsilon^6),$$
$$\varphi^2 - \psi^2 \approx -\frac{a^5}{3} u_{xx} u_{xxx} + 0(\varepsilon^7), \quad (9)$$
$$\varphi^3 - \psi^3 \approx \frac{a^6}{4} u_{xx}^3 + 0(\varepsilon^7).$$

Сохранение членов в (9) и отбрасывание приведенных порядков малости обусловлено тем, что отношение множителей в (8) перед соответствующими разностями (9) имеет следующие порядки малости по ε:

$$a\frac{f'}{f''} \sim \varepsilon, \;\; a^2 \frac{f'}{f'''} \sim \varepsilon^2. \quad (10)$$

Благодаря (10) оставленные члены в (9) обеспечивают включение в конечное уравнение выражений порядка ε^2 включительно по отношению к основному члену.

Если пренебречь конвективной производной скорости, что справедливо, если фазовая скорость много больше скорости частиц и хорошо выполняется в ряде случаев в нелинейной акустике [1], результирующее уравнение примет вид

$$\rho u_{tt} = f' u_{xx} + a^2 \left[\frac{f'}{12} u_{xxxx} - \frac{f''}{6} u_{xx} u_{xxx} + \frac{f'''}{24} u_{xx}^3 \right]. \quad (11)$$

Формулу для деформации находим, дифференцируя обе части (11) по x и подставляя $\xi = -u_x$:

$$\rho \xi_{tt} = \left\{ f' \xi_x + a^2 \left[\frac{f'}{12} \xi_{xxx} + \frac{f''}{6} \xi_x \xi_{xx} + \frac{f'''}{24} \xi_x^3 \right] \right\}_x, \quad (12)$$

где $\rho = m/a$ — линейная плотность. Выражение в квадратных скобках в (12) преобразуется к дивергентному виду

$$\frac{f'}{12} \xi_{xxx} + \frac{f''}{6} \xi_x \xi_{xx} + \frac{f'''}{24} \xi_x^3 = \frac{1}{24} \left[2f' \xi_{xx} + f'' \xi_x^2 \right]_x. \quad (13)$$

Из (12) и (13) имеем окончательное длинноволновое приближение для дисперсной системы (2)

$$\rho \xi_{tt} = \left\{ f + \frac{a^2}{24} \left[2f' \xi_{xx} + f'' \xi_x^2 \right] \right\}_{xx}. \quad (14)$$

Напомним, что обнаружение в [1—4] уединенных волн нового типа в случае степенного закона взаимодействия оказалось возможным благодаря использованной замене переменных

$$z = \xi^{n+1/2}. \quad (15)$$

Структура выражения в квадратных скобках в (14) позволяет использовать нетривиальное преобразование переменных, решающее ту же задачу, что и (15) для степенного закона взаимодействия. Действительно, формула (14) для стационарных волн $\xi(x - Vt)$ сведется к уравнению нелинейного осциллятора, если выражение в квадратных скобках удастся записать в виде

$$2f' \xi_{xx} + f'' \xi_x^2 = h(\xi) z_{xx}, \quad (16)$$

где h — некая функция ξ: z — новая переменная. Уравнению (16) можно удовлетворить следующим преобразованием переменных:

$$z = B \int_{\xi_0}^{\xi} (f')^{1/2} d\xi, \quad (17)$$

где B — константа; $f' > 0$;

$$h(\xi) = \frac{2}{B} (f')^{1/2}. \quad (18)$$

С использованием (17) выражение (14) приводится к виду

$$\rho [M(z)]_{tt} = \left[K(z) + \frac{a^2}{12} P(z) z_{xx} \right], \quad (19)$$

где функции $M(z) = \xi(z)$, $K(z) = f\{aM(z)\}$, $P(z) = \{f'(aM(z))\}^{1/2}$ находятся из обратного преобразования к (17). Простота (19) важна для анализа стационарных волн. Действительно, если функция z имет вид $z(x - Vt)$, то уравнение (19) после двойного интегрирования по x сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению нелинейного осциллятора в потенциальном поле $W(z)$

$$\frac{a^2}{12} z_{xx} = \frac{\partial W(z)}{\partial z}$$
$$-\frac{\partial W(z)}{\partial z} = \rho V^2 \frac{M(z)}{P(z)} - \frac{K(z)}{P(z)} - \frac{C}{P(z)}, \quad P(z) \neq 0, \tag{20}$$

C — константа интегрирования. В случае степенного закона взаимодействия мы возвращаемся к найденным в [2] солитонам сжатия ($n > 1$) или разрежения [3]($n < 1$). Определение условий образования солитонов, периодических волн и их параметров в дискретной системе частиц в континуальном приближении при произвольном законе взаимодействия между частицами сводится таким образом к анализу наличия экстремумов функции $W(y)$ и их относительного расположения. Если функция $W(z)$ может быть получена в явном виде, как и обратное преобразование $z \to \xi$, то форма стационарных возбуждений получится из (20) по крайней мере в квадратурах стандартным образом.

Важно отметить, что структура уравнения (14) качественно изменится, если дискретная система существенно отличается от периодической. В то же время, как показано в [1], при незначительной степени хаотизации частиц по размерам поведение одиночных импульсов может быть качественно близко к случаю периодической системы и сильно отличаться при большой степени хаотизации.

Наконец, преобразуем найденное уравнение (естественно сводящееся обычной процедурой после дополнительного ангармонического приближения к уравнению Кортевега—де Вриза) к уравнению со смешаными производными по x и t вместо члена с четвертой производной по x. Соображения в пользу подобного преобразования для уравнений типа Кортевега—де Вриза можно найти в [9], как, впрочем, и критику данной процедуры в [10]. Выразим ξ_{xx} из уравнения низшего порядка ((14) без члена в квадратных скобках)

$$2f'\xi_{xx} = 2\rho\xi_{tt} + 2f''\xi_x^2. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (14), имеем

$$\rho\xi_{tt} = \left\{f + \frac{a^2}{24}[2\rho\xi_{tt} - f''\xi_x^2]\right\}_{xx}. \tag{22}$$

Второй член в (22) — это дисперсионный член, как в классическом линейном приближении, а третий имеет тот же порядок малости, что и второй и представляет собой вклад нелинейной дисперсии.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-02-14880) и Института механики материалов Калифорнийского университета в Сан-Диего.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нестеренко В.Ф. Импульсное нагружение гетерогенных материалов. — Новосибирск: Наука, 1992. — 198 с.
2. Нестеренко В.Ф. Нелинейные волны в «звуковом вакууме» //ФГВ. — 1992. — 28, № 3. — С. 121.
3. Нестеренко В.Ф. Уединенные волны в дискретной среде с нормальной сжимаемостью //ФГВ. — 1994. — 30, № 2. — С. 134.
4. Nesterenko V.F. Solitary waves in discrete media with anomalous compressibility and similar to “sonic vacuum“ // Proceedings of International Conference DYMAT-94, Oxford 25—31, September, 1994.
5. Гаврилюк С.Л., Нестеренко В.Ф. Устойчивость периодических возбуждений для одной модели «звукового вакуума» //ПМТФ. — 1993. — № 6. — С. 45.

6. Нестеренко В.Ф., Лазариди А.Н., Сибиряков Е.Б. Распад солитона на контакте двух «звуковых вакуумов» //ПМТФ. — 1995 (в печати).
7. Leroy Y.N., Molinary A. Space particles with size effects in shear zones: a hyperelastic model with high-order gradients //J. Mech. Phys. Solids., 1993. — 41. — P. 631.
8. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. — М.: Наука, 1975. — 202 с.
9. Albert J.P., Bona J.L. Comperisons between Model equation for leng waves //J.Nonlinear Sci., 1991. — 1. — P. 345.
10. Kruskal M. Nonlinear wave equations //Lecture Notes in Physics, 38 (Dynamical Systems, Theory and Applications), Springer-Verlag., Heidelberg, 1975. — P. 310—354.

630099, г. Новосибирск, ИГиЛ СО РАН

Поступила в редакцию 14/VIII 1994

УДК 622.235.5

Ю.С. Вахрамеев

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИБЛИЖЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЗРЫВОВ НА ВЫБРОС

Рассмотрены разные случаи точного и приближенного подобия подземных взрывов с выбросом грунта. Обращено внимание на противоречие между имевшимся представлением о законе подобия и данными обработки результатов крупномасштабных экспериментов. Дана уточненная теория явления. Показана возможность приближенного подобия выброса в одинаковой среде. Установлено согласие изложенных представлений с результатами более тщательной обработки опытов. Предложен набор удобных безразмерных параметров, являющихся основой методики приближенного моделирования крупномасштабных взрывов в лабораторных условиях.

Геометрическое подобие и моделирование выброса на его основе

В механике сплошных сред есть много случаев, когда справедлив геометрический закон подобия. Геометрическое подобие широко используется во взрывных процессах для моделирования их на той стадии, когда характерные ускорения намного превышают ускорения силы тяжести.

При подземных взрывах с выбросом грунта размеры навала зависят от траектории полета кусков породы, которая определяется ускорением силы тяжести g и характерной скоростью кусков v_0. Сочетание их дает величину с размерностью длины v_0^2/g, не связанную с размерами тела. Если при моделировании процесса искусственно изменять g по закону $g^{м} = g(E_0^{н}/E_0^{м})^{1/3}$ (здесь E_0 — энергия или масса ВВ), то высота подъема кусков $\sim E_0^{1/3}$, и геометрический закон подобия останется в силе.

Попытки моделирования взрывов на выброс таким образом не дали ощутимых результатов. При идейной простоте моделирование связано с большими техническими трудностями по созданию искусственной тяжести и по измерению эффекта, которое нужно провести за время действия повышенного ускорения. Не меньшие трудности сопряжены и с необходимостью точного воспроизведения свойств реального массива на малых образцах грунта, без чего все моделирование останется только приближенным.

Ниже рассматриваются вопросы приближенного моделирования выброса малыми взрывами без искусственного изменения силы тяжести.

Противоречие между экспериментом и простейшими представлениями о подобии крупных взрывов на выброс

Реально многие свойства грунта на эффекте выброса не сказываются. Крупнейшие специалисты по физике взрывов, в том числе подземных,

© Ю.С. Вахрамеев, 1995.