УДК 534.222.2:533.6.011

ПОВЕДЕНИЕ ВЕКТОРА ВИХРЯ СКОРОСТИ В СВЕРХЗВУКОВОМ НЕОДНОРОДНОМ ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ ГОРЮЧЕГО ГАЗА ЗА ДВИЖУЩЕЙСЯ КРИВОЛИНЕЙНОЙ УДАРНОЙ ИЛИ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ

В. А. Левин, Г. А. Скопина

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток, levin@imec.msu.ru

Получены выражения для компонент вектора вихря скорости за ударной или детонационной волной криволинейной формы, распространяющейся в сверхзвуковом неоднородном потоке горючего газа. Рассматриваются плоские и осесимметричные течения газа. Набегающий поток в общем случае является вихревым с заданным распределением параметров. Получено, что для осесимметричных течений формулы для компонент вектора вихря, лежащих в плоскости течения, имеют такой же вид, как и для установившихся осесимметричных течений. Показано, что, как и в случае установившихся течений, нормальная по отношению к волне компонента вектора вихря остается непрерывной при переходе через поверхность разрыва, а в случае осесимметричных течений непрерывной остается также и величина, равная отношению касательной компоненты вектора вихря, расположенной в плоскости течения, к плотности, хотя по отдельности сами величины терпят разрыв.

Ключевые слова: вихрь, ударная волна, волна детонации, осесимметричное течение, поверхность разрыва, закон сохранения.

В случае установившихся течений выражение для вихря за искривленной ударной волной для потока с постоянными параметрами впервые получено авторами работы [1] и позже другими авторами. В общем случае формулы для компонент вектора вихря за произвольной искривленной волной получены в [2] в предположении, что интенсивность ударной волны бесконечная. В работе [3] приведена обобщенная формула. В работах [4, 5] получены формулы для компонент вектора вихря за ударной волной любой интенсивности при постоянных значениях параметров набегающего потока. В работе [6] изучено поведение вектора вихря скорости в сверхзвуковых осесимметричных закрученных потоках за стационарной криволинейной ударной или детонационной волной. В общем трехмерном случае выражения для компонент вектора вихря скорости за поверхностью разрыва, возникающей при обтекании тела стационарным сверхзвуковым неоднородным потоком горючего газа, получены в работе [7]. Для нестационарных течений в работе [8] получены формулы для вихря на цилиндрической поверхности разрыва, распространяющейся в осесимметричном закрученном потоке идеального газа от оси симметрии. В данной работе определяется завихренность непосредственно за криволинейной ударной или детонационной волной, распространяющейся по неоднородному завихренному потоку горючего газа.

Изучаются плоскопараллельные и осесимметричные неустановившиеся движения газа, зависящие только от двух координат — x и y. Плоскостью течения является плоскость (x, y). Ось симметрии совпадает с прямой $x = 0$. Основные исследуемые величины — вектор скорости $\boldsymbol{V}$, давление p, плотность ρ и вектор вихря $2\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ — рассматриваются как функции декартовых координат (x, y) и времени t.

Вектор скорости $\boldsymbol{V}$ в системе координат (x_1, x_2, x_3) имеет компоненты u, v, w. Для плоскопараллельного движения $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$; для осесимметричного движения $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = \varphi$. В случае плоскопараллельного течения $w = 0$.

Пусть по газу со скоростью D распространяется криволинейная ударная волна. Поток перед волной является вихревым с заданным распределением параметров:

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ДВО РАН (код проекта 06-II-СО-03-009).

$$\boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{V}_0(x,y), \;\rho_0 = \rho_0(x,y), \; p_0 = p_0(x,y). \quad (1)$$

Если газ является взрывчатой смесью, то ударная волна, нагревая среду, может вызвать экзотермическую реакцию, что приведет к распространению по среде волны детонации. Детонационная волна рассматривается как поверхность сильного разрыва, на которой при сгорании единицы массы газа выделяется количество тепла Q, которое в общем случае зависит от параметров набегающего потока (при $Q = 0$ имеем обычную ударную волну).

Дифференциальные уравнения газовой динамики в этом случае можно записать в виде [9]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u y^\lambda}{\partial x} + \frac{\partial \rho \upsilon y^\lambda}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + u\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y} - \frac{\lambda w^2}{y}\right) = 0, \quad (2)$$

$$\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\upsilon w}{y}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + \upsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0.$$

Здесь γ — показатель адиабаты. Для плоских волн параметр геометрии λ равен нулю, для цилиндрических волн $\lambda = 1$.

При решении системы (2) необходимо удовлетворять начальным (1) и динамическим условиям на скачке (ударной или детонационной волне) [9]:

$$\rho(\upsilon_n - D) = \rho_0(\upsilon_{0n} - D),$$

$$p + \rho(\upsilon_n - D)^2 = p_0 + \rho_0(\upsilon_{0n} - D)^2,$$

$$\frac{1}{2}\,(\upsilon_n - D)^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2}\,(\upsilon_{0n} - D)^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\rho_0} + Q,$$

$$\upsilon_\tau = \upsilon_{0\tau}, \quad w = w_0.$$

Здесь $\upsilon_n = \boldsymbol{V\nu}$ — нормальная составляющая скорости, $\upsilon_\tau = \boldsymbol{V\tau}$ и w — касательные составляющие скорости, $\boldsymbol{\nu}$ — вектор нормали, $\boldsymbol{\tau}$ — касательный вектор к поверхности разрыва Σ.

Вектор вихря $2\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\boldsymbol{V}$ в системе координат x_1, x_2, x_3 имеет компоненты

$$2\omega_1 = \lambda\left(\frac{w}{y} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$2\omega_2 = -\lambda\frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\omega_3 = \frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

Для нахождения этих компонент введем на движущейся поверхности разрыва $\Sigma(t)$ криволинейную ортогональную систему координат, связанную с волной.

Рассмотрим движущуюся поверхность $\Sigma(t)$, определяемую уравнением вида

$$x_i = x_i(y^1, y^2, t),$$

где y^1, y^2 — криволинейные координаты на поверхности.

Остановимся несколько подробнее на выборе системы криволинейных координат на подвижной поверхности. Пусть в начальный момент времени на поверхности $\Sigma(0)$ выбрана некоторая система координат y^α. Для дальнейшего удобно произвести специальный выбор системы координат y^α на подвижной поверхности, который однозначно определяется выбором системы координат на поверхности $\Sigma(0)$, т. е. в начальный момент времени. Пусть в каждой точке поверхности $\Sigma(t)$ в любой момент времени можно построить единичный вектор нормали к этой поверхности. Тогда в точках пространства x_i, через которые прошла поверхность $\Sigma(t)$, определено векторное поле $\nu_i(x_j)$. Предположим, что поле $\nu_i(x_j)$ таково, что через каждую точку поверхности $\Sigma(0)$ с координатами y^1, y^2 можно провести только одну интегральную кривую, единичный вектор касательной к которой совпадает с вектором ν_i. Интегральная кривая пересекает поверхность $\Sigma(t)$ в любой момент времени в одной точке, которой припишем координаты y^1 и y^2 [10]. При таком выборе системы координат вектор $\dot{\boldsymbol{r}}(y^\alpha, t)$ направлен по нормали к поверхности $\Sigma(t)$ и выполняются соотношения

$$\dot{x}_i(y^\alpha, t) = D\nu_i.$$

Здесь D — скорость распространения волны $\Sigma(t)$ в направлении нормали, точкой обозначена частная производная по времени.

Во введенной таким образом системе координат в качестве параметров y^1, y^2 можно взять следующие: $y^1 = s$, где s — параметр кривой, определяющей форму волны в плоскости (x, y), и $y^2 = x_3$. Данная система координат будет ортогональной.

Компоненты метрического тензора поверхности имеют вид

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial s}\right)^2,$$

$$g_{22} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Из коэффициентов второй квадратичной формы $b_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha\beta}\nu_i$ отличен от нуля только один:

$$b_{11} = x_{i,ss}\nu_i.$$

Здесь и далее запятая означает производную, суммирование проводится по индексу i.

Вектор $\boldsymbol{r}_{,s}$, лежащий в плоскости (x, y), является касательным вектором к поверхности Σ. Введем в рассмотрение касательный вектор $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{11}}}\boldsymbol{r}_{,s}$ единичной длины. Вектор нормали $\boldsymbol{\nu}$ удовлетворяет равенствам

$$\nu_i\nu_i = 1, \quad x_{i,s}\nu_i = 0, \tag{5}$$

$$\nu_{i,s} = -\frac{b_{11}}{g_{11}}x_{i,s} = -\frac{b_{11}}{\sqrt{g_{11}}}\tau_i. \tag{6}$$

Здесь $b_{11}/\sqrt{g_{11}} = æ$, æ — кривизна поверхности разрыва.

Пусть в пространстве x_i определена некоторая функция $f(x_i, t)$. Тогда на поверхности $\Sigma(t)$ определена функция

$$f(x_i(y^\alpha, t), t) = F(y^\alpha, t).$$

Частные производные функции f по координатам пространства x_i связаны с производными по криволинейным координатам y^α соотношениями

$$f_{,i} = f_{,n}\nu_i + \frac{\tau_i}{\sqrt{g_{11}}}f_{,s}, \tag{7}$$

где $f_{,n} = f_{,i}\nu_i$ — производная по нормали.

Частную производную функции $F(y^\alpha, t)$ по времени обозначим через $\dfrac{\delta f}{\delta t}$ и назовем δ-производной функции f по времени [10]:

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \dot{f} + f_{,i}\dot{x}_i = \dot{f} + f_{,n}D. \tag{8}$$

Это соотношение называется кинематическим условием совместности.

Если некоторая функция f задана только на поверхности разрыва $\Sigma(t)$ как функция y^1, y^2 и t, то δ-производная этой величины совпадает с частной производной по времени. Именно такими функциями являются компоненты касательного вектора и вектора нормали и другие характеристики внутренней геометрии поверхности. δ-Производные вектора нормали и касательного вектора определяются следующим образом [10]:

$$\begin{gathered}\frac{\delta\nu_i}{\delta t} = -D_{,s}\frac{\tau_i}{\sqrt{g_{11}}}, \\ \frac{\delta\tau_i}{\delta t} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}D_{,s}\nu_i, \quad \frac{\delta g_{11}}{\delta t} = -2Db_{11}.\end{gathered} \tag{9}$$

Используя кинематическое условие совместности (8), можно записать завихренность (4) непосредственно с обеих сторон поверхности разрыва при $y = R(x)$ ($R(x)$ — уравнение поверхности разрыва). Перед волной

$$\begin{gathered}2\omega_{01} = \lambda\left(\frac{w_0}{y} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) = \\ = \lambda\left(w_{0,n}\nu_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}w_{0,s}\tau_2 + \frac{w_0}{y}\right), \\ 2\omega_{02} = -\lambda\frac{\partial w_0}{\partial x} = -\lambda\left(w_{0,n}\nu_1 + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}w_{0,s}\tau_1\right), \\ 2\omega_{03} = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = \\ = v_{0,n}\nu_1 - u_{0,n}\nu_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}(v_{0,s}\tau_1 - u_{0,s}\tau_2);\end{gathered} \tag{10}$$

за волной

$$\begin{gathered}2\omega_1 = \lambda\left(\frac{w}{y} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \\ = \lambda\left(w_{,n}\nu_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}w_{0,s}\tau_2 + \frac{w_0}{y}\right), \\ 2\omega_2 = -\lambda\frac{\partial w}{\partial x} = -\lambda\left(w_{,n}\nu_1 + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}w_{0,s}\tau_1\right), \\ 2\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} =\end{gathered} \tag{11}$$

$$= v_{,n}\nu_1 - u_{,n}\nu_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}(v_{,s}\tau_1 - u_{,s}\tau_2).$$

Перейдем от компонент вектора скорости в декартовой системе координат к компонентам скорости в системе координат, связанной с волной. Тогда перед волной

$$u_0 = v_{0n}\nu_1 + v_{0\tau}\tau_1, \quad v_0 = v_{0n}\nu_2 + v_{0\tau}\tau_2; \qquad (12)$$

за волной

$$u = v_n\nu_1 + v_{0\tau}\tau_1, \quad v = v_n\nu_2 + v_{0\tau}\tau_2. \qquad (13)$$

В последней формуле использован тот факт, что касательная компонента скорости сохраняется при переходе через поверхность разрыва.

Вычислим производную компонент скорости вдоль поверхности разрыва в проекции на $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\tau}$. Учитывая формулы (5), (6), (12), (13), получим

$$u_{,s}\nu_1 + v_{,s}\nu_2 = v_{n,s} + \frac{b_{11}}{\sqrt{g_{11}}}v_{0\tau}, \qquad (14)$$

$$u_{,s}\tau_1 + v_{,s}\tau_2 = v_{0\tau,s} - \frac{b_{11}}{\sqrt{g_{11}}}v_n. \qquad (15)$$

Тогда с учетом формул (5), (14) можно переписать выражения для третьих компонент вектора вихря (10), (11): перед волной

$$2\omega_{03} = u_{0,n}\tau_1 + v_{0,n}\tau_2 - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left(v_{0n,s} + \frac{b_{11}}{\sqrt{g_{11}}}v_{0\tau}\right); \qquad (16)$$

за волной

$$2\omega_3 = u_{,n}\tau_1 + v_{,n}\tau_2 - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left(v_{n,s} + \frac{b_{11}}{\sqrt{g_{11}}}v_{0\tau}\right). \qquad (17)$$

Производные по нормали определяются из уравнения движения, записанного с помощью соотношений (7), (8): перед волной

$$u_{0,n} = -\frac{1}{\rho_0 v_{0n}}\left(p_{0,n}\nu_1 + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}p_{0,s}\tau_1\right) - \frac{u_{0,s}}{\sqrt{g_{11}}}\frac{v_{0\tau}}{v_{0n}},$$

$$v_{0,n} = -\frac{1}{\rho_0 v_{0n}}\left(p_{0,n}\nu_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}p_{0,s}\tau_2\right) - \frac{v_{0,s}}{\sqrt{g_{11}}}\frac{v_{0\tau}}{v_{0n}} + \frac{\lambda w_0^2}{v_{0n}y}, \qquad (18)$$

$$w_{0,n} = -\frac{v_{0\tau}}{v_{0n}}\frac{\lambda w_{0,s}}{\sqrt{g_{11}}} - \frac{\lambda w_0}{y}\left(\nu_2 + \frac{v_{0\tau}}{v_{0n}}\tau_2\right);$$

за волной

$$u_{,n} = -\frac{1}{\rho(v_n - D)}\left(p_{,n}\nu_1 + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}p_{,s}\tau_1\right) - \frac{1}{v_n - D}\left(\frac{\delta u}{\delta t} + \frac{v_{0\tau}u_{,s}}{\sqrt{g_{11}}}\right),$$

$$v_{,n} = -\frac{1}{\rho(v_n - D)}\left(p_{,n}\nu_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}p_{,s}\tau_2\right) - \frac{1}{v_n - D}\left(\frac{\delta v}{\delta t} + \frac{v_{0\tau}v_{,s}}{\sqrt{g_{11}}} - \frac{\lambda w_0^2}{y}\right), \qquad (19)$$

$$w_{,n} = -\frac{\lambda}{v_n - D}\left(\frac{\delta w_0}{\delta t} + \frac{v_{0\tau}w_{0,s}}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{w_0}{y}(v_n\nu_2 + v_{0\tau}\tau_2)\right).$$

Проецируя (18), (19) на $\boldsymbol{\tau}$ и учитывая формулы (14), (15), получим: перед волной

$$u_{0,n}\tau_1 + v_{0,n}\tau_2 = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{p_{0,s}}{v_{0n}\rho_0} - \frac{v_{0\tau}}{v_{0n}}\frac{v_{0\tau,s}}{\sqrt{g_{11}}} + v_{0\tau}\frac{b_{11}}{g_{11}} + \tau_2\frac{\lambda w_0^2}{v_{0n}y}; \qquad (20)$$

за волной

$$u_{,n}\tau_1 + v_{,n}\tau_2 = -\frac{1}{v_n - D}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{p_{,s}}{\rho} + \frac{\delta u}{\delta t}\tau_1 + \frac{\delta v}{\delta t}\tau_2 + \frac{v_{0\tau}}{\sqrt{g_{11}}}v_{0\tau,s} - \tau_2\frac{\lambda w_0^2}{y}\right) + v_{0\tau}\frac{v_n}{v_n - D}\frac{b_{11}}{g_{11}}. \qquad (21)$$

Подставив (18), (20) в выражения для вихря перед поверхностью разрыва (10), (16), получим в окончательном виде выражение для завихренности непосредственно перед волной:

$$2\omega_{01} = \lambda\left(\frac{w_{0,s}}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{w_0}{y}\nu_1\right)\left(\nu_1 - \nu_2\frac{v_{0\tau}}{v_{0n}}\right),$$

$$2\omega_{02} = \lambda\biggl(\frac{w_{0,s}}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{w_0}{y}\,\nu_1\biggr)\biggl(\nu_2 + \nu_1\frac{\upsilon_{0\tau}}{\upsilon_{0n}}\biggr), \quad (22)$$

$$2\omega_{03} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{p_{0,s}}{\rho_0\upsilon_{0n}} - \frac{\upsilon_{0\tau,s}}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\upsilon_{0\tau}}{\upsilon_{0n}} - {} - \frac{\upsilon_{0n,s}}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\lambda w_0^2}{\upsilon_{0n}y}\,\nu_1.$$

Для определения завихренности за ударной или детонационной волной нужно вычислить δ-производные компонент скорости. Для этого воспользуемся формулами (12), (13) и формулами для δ-производных компонент вектора нормали и касательного вектора (9):

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\delta \upsilon_{0\tau}}{\delta t}\,\tau_1 + \frac{\delta \upsilon_n}{\delta t}\,\nu_1 + \frac{D_{,s}}{\sqrt{g_{11}}}\,(\nu_1\upsilon_{0\tau} - \tau_1\upsilon_n),$$
$$\frac{\delta \upsilon}{\delta t} = \frac{\delta \upsilon_{0\tau}}{\delta t}\,\tau_2 + \frac{\delta \upsilon_n}{\delta t}\,\nu_2 + \frac{D_{,s}}{\sqrt{g_{11}}}\,(\nu_2\upsilon_{0\tau} - \tau_2\upsilon_n). \quad (23)$$

Проецируя (23) на $\boldsymbol{\tau}$, получим

$$\frac{\delta u}{\delta t}\tau_1 + \frac{\delta \upsilon}{\delta t}\tau_2 = \frac{\delta \upsilon_{0\tau}}{\delta t} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\upsilon_n D_{,s}.$$

Учитывая последнюю формулу, выражение (21) перепишем в следующем виде:

$$u_{,n}\tau_1 + \upsilon_{,n}\tau_2 = -\frac{1}{\upsilon_n - D}\biggl(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{p_{,s}}{\rho} + \frac{\delta\upsilon_{0\tau}}{\delta t} - \frac{\upsilon_n D_{,s}}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\tau,s}}{\sqrt{g_{11}}} - \tau_2\frac{\lambda w_0^2}{y}\biggr) + {} + \upsilon_{0\tau}\frac{\upsilon_n}{\upsilon_n - D}\frac{b_{11}}{g_{11}}.$$

Подставляя это соотношение в выражение для компоненты вектора вихря (17), получим, что за волной

$$2\omega_3 = -\frac{1}{\upsilon_n - D}\biggl(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{p_{,s}}{\rho} + \frac{\delta\upsilon_{0\tau}}{\delta t} - \frac{\upsilon_n D_{,s}}{\sqrt{g_{11}}} + {} + \frac{\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\tau,s}}{\sqrt{g_{11}}}\biggr) - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\biggl(\upsilon_{n,s} + \frac{b_{11}}{\sqrt{g_{11}}}\,\upsilon_{0\tau}\biggr) + {} + \frac{\upsilon_n\upsilon_{0\tau}}{\upsilon_n - D}\frac{b_{11}}{g_{11}} + \frac{1}{\upsilon_n - D}\frac{\lambda w_0^2}{y}\,\nu_1. \quad (24)$$

Распишем δ-производные касательных компонент вектора скорости, используя выражение для δ-производной (8) и формулы (12), (14), (15):

$$\frac{\delta\upsilon_{0\tau}}{\delta t} = \frac{\delta u_0}{\delta t}\tau_1 + \frac{\delta\upsilon_0}{\delta t}\tau_2 + \frac{D_{,s}}{\sqrt{g_{11}}}\,(\nu_1 u_0 + \nu_2\upsilon_0) = {} = D(u_{0,n}\tau_1 + \upsilon_{0,n}\tau_2) + \frac{D_{,s}}{\sqrt{g_{11}}}\,\upsilon_{0,n},$$

$$\frac{\delta w_0}{\delta t} = w_{0,n}D,$$

где $u_{0,n}\tau_1 + \upsilon_{0,n}\tau_2$, $w_{0,n}$ определяются из формул (18), (20). Таким образом,

$$\frac{\delta\upsilon_{0\tau}}{\delta t} = \frac{D}{\sqrt{g_{11}}}\biggl(-\frac{p_{0,s}}{\upsilon_{0n}\rho_0} - \frac{\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\tau,s}}{\upsilon_{0n}} + {} + \frac{b_{11}}{\sqrt{g_{11}}}\,\upsilon_{0\tau} + \frac{\lambda w_0^2\sqrt{g_{11}}}{\upsilon_{0n}y}\,\nu_1\biggr) + \frac{D_{,s}}{\sqrt{g_{11}}}\,\upsilon_{0n}, \quad (25)$$
$$\frac{\delta w_0}{\delta t} = -\lambda D\biggl(\frac{\upsilon_{0\tau}}{\upsilon_{0n}}\frac{w_{0,s}}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{w_0}{y}\biggl(\nu_2 + \frac{\upsilon_{0\tau}}{\upsilon_{0n}}\,\tau_2\biggr)\biggr).$$

Подставив первое выражение для δ-производной касательной компоненты скорости из (25) в формулу для вихря (24), запишем выражение для ω_3:

$$2\omega_3 = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{1}{\upsilon_n - D}\biggl(\frac{p_{,s}}{\rho} + \frac{Dp_{0,s}}{\rho_0\upsilon_{0n}} + {} + D_{,s}(\upsilon_{0n} - \upsilon_n) + \biggl(\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\tau,s} - {} - \frac{\lambda\sqrt{g_{11}}w_0^2}{y}\,\nu_1\biggr)\frac{\upsilon_{0n} - D}{\upsilon_{0n}}\biggr) - \frac{\upsilon_{n,s}}{\sqrt{g_{11}}}. \quad (26)$$

Для нахождения компонент вихря за волной в окончательном виде воспользуемся выражением для ω_{03} из (22), законом сохранения массы на поверхности разрыва (3), а также найдем производную $p_{,s}$ из закона сохранения импульса на поверхности разрыва (3):

$$\nu_1\frac{\lambda w_0^2}{y} - \frac{\upsilon_{0\tau}\upsilon_{0\tau,s}}{\sqrt{g_{11}}} = {} = 2\omega_{03}\upsilon_{0n} + \frac{p_{0,s}}{\sqrt{g_{11}}\rho_0} + \frac{\upsilon_{0n}\upsilon_{0n,s}}{\sqrt{g_{11}}}, \quad (27)$$

$$\upsilon_n - D = \frac{\rho_0}{\rho}(\upsilon_{0n} - D),$$

$$\frac{p_{,s}}{\rho(v_n - D)} = \frac{p_{0,s}}{\rho_0(v_{0n} - D)} + v_{0n,s} - v_{n,s} + \\ + (v_{0n} - v_n)\left(\frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} + \frac{v_{0n,s} - D_{,s}}{v_{0n} - D}\right).$$

Подставив соотношения (19), (25) в (11), а (27) в (26), получим в окончательном виде формулы для компонент вектора вихря за волной:

$$\omega_1 = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{w_{0,s}}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{w_0}{y}\nu_1\right)\left(\nu_1 - \nu_2\frac{v_{0\tau}}{v_{0n}}\frac{\rho}{\rho_0}\right),$$

$$\omega_2 = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{w_{0,s}}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{w_0}{y}\nu_1\right)\left(\nu_2 + \nu_1\frac{v_{0\tau}}{v_{0n}}\frac{\rho}{\rho_0}\right), \tag{28}$$

$$\omega_3 = \frac{\rho}{\rho_0}\omega_{03} - \frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}\left\{\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{p_{0,s}}{(v_{0n} - D)\rho_0} + \right. \\ + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{(v_{0n} - D)\rho_{0,s}}{\rho_0} - \\ \left. - (v_{0n,s} - D_{,s})\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \Big/ \frac{\rho}{\rho_0}\right\}.$$

Таким образом, доказано, что компоненты вектора вихря за поверхностью разрыва зависят от начальной завихренности, производных параметров газа и скорости движения поверхности разрыва вдоль волны, метрического тензора поверхности разрыва, самих параметров газа, скорости движения волны и отношения плотностей ρ/ρ_0. Вид формул для компонент вектора вихря ω_1, ω_2, лежащих в плоскости течения, которые отличны от нуля в случае осесимметричных течений, совпадает с видом формул для компонент вектора вихря, полученных в работе [6] за стационарной осесимметричной криволинейной волной детонации, находящейся в вихревом сверхзвуковом потоке горючего газа. Разложим вектор завихренности на нормальную ω_n и касательные составляющие ω_τ, ω_3: перед волной

$$\omega_{0n} = (\omega_{01}\nu_1 + \omega_{02}\nu_2) = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{w_{0,s}}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{w_0}{y}\,\nu_1\right),$$

$$\omega_{0\tau} = (\omega_{01}\tau_1 + \omega_{02}\tau_2) = \\ = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{w_{0,s}}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{w_0}{y}\,\nu_1\right)\frac{v_{0\tau}}{v_{0n}} = \omega_{0n}\frac{v_{0\tau}}{v_{0n}},$$

$$\omega_{03} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{p_{0,s}}{\rho_0 v_{0n}} + \frac{v_{0\tau,s}}{\sqrt{g_{11}}}\frac{v_{0\tau}}{v_{0n}} + \right. \\ \left. + \frac{v_{0n,s}}{\sqrt{g_{11}}} - \frac{\lambda w_0^2}{v_{0n}y}\,\nu_1\right);$$

за волной

$$\omega_n = (\omega_1\nu_1 + \omega_2\nu_2) = \\ = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{w_{0,s}}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{w_0}{y}\nu_1\right) = \omega_{0n},$$

$$\omega_\tau = (\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2) = \\ = \frac{\lambda}{2}\frac{v_{0\tau}}{v_{0n}}\frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{w_{0,s}}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{w_0}{y}\nu_1\right) = \omega_{0\tau}\frac{\rho}{\rho_0}, \tag{29}$$

$$\omega_3 = \frac{\rho}{\rho_0}\omega_{03} - \frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}\left\{\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{p_{0,s}}{(v_{0n} - D)\rho_0} + \right. \\ + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{(v_{0n} - D)\rho_{0,s}}{\rho_0} - \\ \left. - (v_{0n,s} - D_{,s})\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \Big/ \frac{\rho}{\rho_0}\right\}.$$

Таким образом, как и в случае установившихся течений [6, 7], при переходе через поверхность разрыва нормальная компонента вектора вихря остается непрерывной функцией. Для неустановившихся осесимметричных течений при переходе через поверхность разрыва выполняется закон сохранения величины ω_τ/ρ при любых распределениях параметров газа в набегающем потоке, как и в случае установившихся осесимметричных течений [6].

Если кривизна поверхности разрыва равна нулю ($\text{æ} = 0$), то все параметры течения зависят только от одной координаты y (течение одномерное, $\dfrac{\partial}{\partial x} = 0$). Вектор нормали имеет компоненты $\{0, 1\}$, касательный вектор — компоненты $\{1, 0\}$, $\dfrac{d}{ds} = 0$.

Уравнения (2) в этом случае имеют стационарное решение:

$$u = u_0(y), \quad v_0 = 0, \quad w = w_0(y), \quad \rho = \rho_0(y),$$

$$p_0 = \int \frac{\rho_0 w_0^2}{y}\,dy, \quad v_{0n} = v_0 = 0, \quad v_{0\tau} = u_0.$$

Тогда из формул (29) вектор вихря за волной имеет компоненты

$$\omega_1 = \omega_\tau = \omega_{0\tau}\frac{\rho}{\rho_0} = \omega_{01}\frac{\rho}{\rho_0},$$

$$\omega_2 = \omega_{0n} = 0, \quad \omega_3 = \frac{\rho}{\rho_0}\omega_{03}.$$

Здесь начальная завихренность определяется формулами (10):

$$\omega_{01} = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{w_0}{y}\right),\ \omega_{02} = 0,\ \omega_{03} = -\frac{1}{2}\frac{\partial u_0}{\partial y}.$$

Таким образом, из формул для завихренности за движущейся криволинейной ударной или детонационной волной, если она не является искривленной, получены формулы для завихренности в нестационарных одномерных течениях [8]. В этом случае нормальная компонента вектора вихря равна нулю по обе стороны поверхности разрыва, а для касательных компонент вектора вихря выполняется закон сохранения величины, равной отношению касательной компоненты вихря к плотности:

$$\frac{\omega_1}{\rho} = \frac{\omega_{01}}{\rho_0}, \quad \frac{\omega_3}{\rho} = \frac{\omega_{03}}{\rho_0}.$$

Если параметры газа перед волной постоянны ($w_0 = 0$), то завихренность перед волной равна нулю, а компоненты вектора вихря за волной (28) выражаются формулами

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0,$$

$$\omega_3 = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}(D_{,s} + æ v_{0\tau})\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \Big/ \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Таким образом, для нестационарных течений с постоянными параметрами завихренность за волной зависит от метрического тензора поверхности разрыва, произведения кривизны на касательную компоненту скорости и от производной скорости движения поверхности разрыва вдоль волны, а также от отношения плотностей, которое в свою очередь является функцией параметров, определяющих состояние среды, скорости распространения поверхности разрыва и количества тепла, подведенного к единице массы газа.

При $D = 0$ данная формула совпадает с выражением для завихренности за криволинейной стационарной ударной или детонационной волной при постоянных значениях начальных параметров газа, полученной в работах [1–7].

Если $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$, а s — естественная координата, введенная на поверхности разрыва, то полученные формулы для компонент вектора вихря (29) полностью совпадают с формулами для завихренности за стационарной волной детонации, находящейся в вихревом неоднородном сверхзвуковом потоке горючего газа, полученными в работах [6, 7]:

$$\omega_n = \frac{\lambda}{2}\left(w_{0,s} + \nu_1\frac{w_0}{y}\right) = \omega_{0n},$$

$$\omega_\tau = \frac{\lambda}{2}\left(w_{0,s} + \nu_1\frac{w_0}{y}\right)\frac{v_{0\tau}}{v_n} = \omega_{0\tau}\frac{\rho}{\rho_0},$$

$$\omega_3 = \frac{\rho}{\rho_0}\omega_{03} + \frac{v_{0n,s}}{2}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \Big/ \frac{\rho}{\rho_0} - \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{v_{0n}\rho_{0,s}}{2\rho_0} - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{p_{0,s}}{2v_{0n}\rho_0}.$$

Таким образом, в работе исследовано поведение завихренности потока непосредственно за ударной или детонационной волной криволинейной формы, распространяющейся по неоднородному потоку горючего газа. Показано, что в этом случае нормальная компонента вектора вихря остается непрерывной функцией при переходе через поверхность разрыва. Для осесимметричных течений выполняется закон сохранения величины ω_τ/ρ при любых распределениях параметров газа в набегающем потоке, независимо от того, является ли волна ударной или детонационной, как и в случае установившихся течений [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Truesdell C.** On curved shocks in steady plane flow of an ideal fluid // J. Aeronaut. Sci. — 1952. — N 19. — P. 826–828.
2. **Лайтхилл М.** Динамика диссоциирующего газа // Вопросы ракетной техники: Сб. науч. тр. — М.: Изд-во иностр. лит., 1957. — № 6. — С. 41–60.
3. **Hayes W. D.** The vortycity jump across a gasdynamic discontinuities // J. Fluid Mech. — 1957. — № 2. — P. 595–600.
4. **Майкапар Г. И.** Вихри за головной ударной волной // Изв. АН СССР. — Механика жидкости и газа. — 1968. — № 4. — С. 162–165.
5. **Русанов В. В.** Производные газодинамических функций за искривленной ударной волной. — М., 1973. — (Препр. / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 18).

6. **Левин В. А., Скопина Г. А.** Поведение вектора вихря скорости в сверхзвуковых осесимметричных закрученных потоках за детонационной волной // ПМТФ. — 2007. — Т. 48, № 6. — С. 1–7.
7. **Левин В. А., Скопина Г. А.** Поведение вектора вихря скорости в сверхзвуковых потоках за поверхностями разрывов // Теплофизика и аэромеханика. — 2007. — Т. 14, № 3. — С. 381–389.
8. **Левин В. А., Скопина Г. А.** Распространение волн детонации в закрученных потоках газа // ПМТФ. — 2004. — Т. 45, № 4. — С. 3–6.
9. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1987.
10. **Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д.** Теория пластичности. — Владивосток: Дальнаука, 1998.

Поступила в редакцию 4/VI 2008 г.