УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ГАЗОНАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД

В. А. Буряченко, А. М. Липанов

(*Москва*)

Газонасыщенное пористое тело рассматривается как микронеоднородная среда, состоящая из однородной линейно-упругой матрицы и эллипсоидальных пор, наполненных газом под давлением p. Положение центров и ориентаций включений имеет распределение Пуассона в каждой фиксированной области среды. Параметры среды статистически однородны и обладают свойством эргодичности в макрообласти W с размерами, существенно превышающими характерные размеры неоднородности. Результаты значительного числа работ по оценке эффективных свойств среды инвариантны относительно формы пор [1, 2] либо недостаточно точно учитывают многочастичное взаимодействие включений [3]. В распространенном методе эффективного поля [4] взаимодействие включений учитывается суммированием полей от каждой точечной особенности, находящейся в некотором эффективном поле, структура которого не зависит от свойств рассматриваемого включения.

В данной работе предложено обобщение метода, в котором любое конечное число включений находится в эффективном поле, и тем самым на каждое включение воздействует поле напряжений, зависящее от свойств рассматриваемого включения. Бинарное взаимодействие включений построено асимптотически точным методом последовательных приближений. Оценены эффективные свойства газонасыщенной среды и концентрация напряжений вблизи отдельных включений.

1. Общие соотношения. Рассмотрим макрообласть W, состоящую из матрицы с тензором модулей упругости L_0 и пуассоновского множества $X = (V_k, x_k, a_k, \omega_k)$ эллипсоидальных пор v_k с характеристическими функциями V_k, центрами x_k, полуосями $a_k^i (i = 1, 2, 3)$ и совокупностью эйлеровых углов ω_k. Текущее давление газа в порах p и модуль матрицы L_0 считаются постоянными в макрообласти W, размеры которой существенно меньше характерных размеров рассчитываемой конструкции или области. Зависимость между напряжениями и деформациями в микроточке среды можно представить в виде

$$\sigma = L_0(1 - V)\varepsilon - qV, \tag{1.1}$$

где $V = \bigcup_k V_k$; $q = p\delta_{ij}$. Подставляя (1.1) в уравнение равновесия, получим

$$\nabla L_0 \nabla u = (\nabla L_0 \nabla u + \nabla q)V. \tag{1.2}$$

Здесь $u(x)$ — смещение; ∇ — оператор симметрированного градиента. Пусть на бесконечности задано однородное поле напряжений σ^0, тогда (1.2) можно свести к интегральному уравнению

$$u = u^0 - \int U(x-y)(\nabla L_0 \nabla u + \nabla q)V(y)\,dy \tag{1.3}$$

(U — тензор Грина уравнения Ламэ однородной среды с тензором упругости L_0 и смещением на бесконечности u^0). После применения операции ∇ (1.3) и преобразования интеграла по теореме Грина центрируем полученное уравнение, т. е. вычтем из обеих его частей их средние по ансамблю X:

$$\varepsilon(x) = \langle\varepsilon\rangle - \int G(x-y)\{[L_0\varepsilon(y) + q]V(y) - [L_0\langle\varepsilon V\rangle + q\langle V\rangle]\}\,dy, \tag{1.4}$$

где учтено, что на достаточном удалении x от границы ∂W операцию поверхностного интегрирования можно считать осреднением; здесь и ниже $\langle\cdot\rangle$, $\langle\cdot|x_2; x_1\rangle$ обозначают среднее и условное среднее по ансамблю X, когда в точках x_1, x_2 находятся включения $x_1 \neq x_2$, $G = \nabla\nabla U$. При $|x-y| \to \infty$ в (1.4) выражение в фигурных скобках стремится к нулю и интеграл абсолютно сходится во всей области интегрирования.

Для определения эффективного тензора упругости L^* и коэффициента «газового» расширения β^* в уравнении макросостояния

$$\langle\sigma\rangle = L^*(\langle\varepsilon\rangle - \beta^* q) \tag{1.5}$$

необходимо оценить тензоры B, β^*:

(1.6) $$\langle \varepsilon V \rangle = B \langle \varepsilon \rangle, \quad \langle \varepsilon \rangle = \beta^* q$$

при $p = 0$, $\sigma^0 \equiv \langle \sigma \rangle = L_0 \nabla u^0 \neq 0$ и $p \neq 0$, $\sigma^0 = 0$ соответственно, тогда

(1.7) $$L^* = L_0(I - B).$$

В (1.5) величина q пропорциональна текущему значению давления газа в порах, которое очевидным образом связано с заданной и легко определяемой экспериментально среднеобъемной концентрацией газа c в макрообласти W согласно законам Генри и Менделеева—Клапейрона

(1.8) $$p = c[(1 - \langle V \rangle)(1 + \langle \varepsilon_{ii} \rangle - \langle \varepsilon_{ii} V \rangle)\Gamma + \langle V \rangle (1 + \langle \varepsilon_{ii} V \rangle)\mu / RT]^{-1},$$

где в квадратных скобках первое слагаемое с константой Генри Γ описывает вклад средней концентрации растворенного в твердой фазе газа, а второе учитывает наличие в поровой фазе газа с молекулярным весом μ при температуре T; R — газовая постоянная. Формула (1.8) очевидным образом обобщается па смесь газов.

Таким образом, для получения (1.5) необходимо оценить среднюю деформацию поровой фазы $\langle \varepsilon V \rangle$ при действии приложенного внешнего напряжения σ^0 и давления газа, последнее в свою очередь зависит от $\langle \varepsilon_{ii} V \rangle$.

2. Эффективное поле. Фиксируем произвольную реализацию X и рассмотрим эффективное поле $\bar{\varepsilon}(x)$, $x \in v_k$, в котором находится включение v_k:

(2.1) $$\bar{\varepsilon}_k(x) = \langle \varepsilon \rangle - \int G(x - y)\{[L_0 \varepsilon(y) + q] V(y; x) - [L_0 \langle \varepsilon V \rangle + q \langle V \rangle]\} dy \; (V(y; x) = V(y) \setminus V_k(x)).$$

Поскольку поле X случайно, то $\bar{\varepsilon}_k(x)$ также случайно. Для нахождения среднего по ансамблю $X \langle \bar{\varepsilon}_k \rangle$ примем гипотезы: 1) поле $\bar{\varepsilon}_k$ однородно в окрестности включения v_k и зависит от размеров и ориентации v_k; 2) каждые $n(n > 1)$ включений $v_1, \ldots, v_n$ находятся в своем эффективном поле $\hat{\varepsilon}_{1,\ldots,n}$, не зависящем от свойств рассматриваемых включений.

По однородному полю $\bar{\varepsilon}_k(x)$ (2.1) однозначно определяются деформации k-го включения

(2.2) $$\varepsilon^+ = A_k(\bar{\varepsilon}_k + P_k q), \quad A_k = (I - P_k L_0)^{-1},$$

где $P_k = -\int G(x - y) V_k(y) dy (x \in v_k)$ не зависит от x и размеров v_k [5]. Предельное извне значение тензора деформаций в матрице вблизи границы эллипсоида в точке $x_0 \in \partial v_k$ с единичным вектором внешней нормали n к ∂v_k определяется формулой

(2.3) $$\varepsilon^-(n) = (I - K_k(n) L_0) A_k \bar{\varepsilon}_k + (P_k - K_k(n)) A_k q.$$

Здесь $K_k(n)$ — скачок $P_k(x)$ в точке $x_0 \in \partial v_k$ при переходе через ∂v_k по направлению n, известный для изотропной матрицы [6].
Из (1.1), (1.2) с учетом гипотезы 1 найдем

(2.4) $$\bar{\varepsilon}_k(x) = \langle \varepsilon \rangle - \int G(x - y)\{A(y)[L_0 \bar{\varepsilon}(y) + q] V(y; x) - [L_0 \langle A \bar{\varepsilon} V \rangle + \langle AV \rangle q]\} dy.$$

3. Оценка бинарного взаимодействия включений. В (2.4) необходимо оценить значение $\bar{\varepsilon}(y)$ в окрестности включений $v_m \ni y$ при условии, что в точке x находится включение v_k. Будем считать, что в макрообласти W есть только два включения:

(3.1) $$\varepsilon_k(x) = \varepsilon^0 - \int G(x - y)[L_0 \varepsilon(y) + q](V_k(y) + V_m(y)) dy.$$

Уравнение (3.1) решим методом последовательных приближений с учетом гипотезы 1 и нулевого приближения $\varepsilon_0(x) = 0$, $x \in v_k$:

(3.2) $$(L_0 \varepsilon(x) + \bar{q}) v_k = -R_k J_{km} \varepsilon^0 + F_k + R_k T_{km}, \quad x \in v_k,$$

$$S(x_k - x_m)(L_0\varepsilon(x) + q)\bar{v}_m = -J_{km}\varepsilon^0 + \varepsilon^0 + T_{km}, \quad x \in v_m,$$

$$S(x_k - x_m) = (\bar{v}_k\bar{v}_m)^{-1} \int\int V_k(x) V_m(y) G(x-y)\, dxdy,$$

$$R_m = -A_m L_0 \bar{v}_m, \quad F_m = A_m q \bar{v}_m, \quad \bar{v}_m = \operatorname{mes} v_m;$$

(3.3)
$$J_{km} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{1} (SR_mSR_k)^i (SR_m)^j,$$

$$T_{km} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{1} (SR_mSR_k)^i (SR_m)^j S(F_m)^j (F_k)^l,$$

$k = 1, 2$, $m = 3 - k$, $l = |1 - j|$. В дальнейшем понадобится оценка $\langle\langle J_{km}\rangle\rangle_{km}$, $\langle\langle T_{km}\rangle\rangle_{km}$, где $\langle\langle\cdot\rangle\rangle_{km}$ — операция осреднения по ориентациям ω_k, ω_m и положениям x_m на сфере радиуса $|r| = |x_k - x_m|$ с центром в χ_k.

4. Оценка L^*, β^*. Опишем структуру композита бинарной функцией распределения $\varphi(v_m|v_k)$ — вероятности расположения включения v_m в области v_m при фиксированном включении v_k. Вследствие того что включения не пересекаются, примем

(4.1)
$$\varphi(v_m \mid v_k) = \psi(\omega_m)\left(1 - V'_{km}\right) f_{km}(|r|)(\operatorname{mes} W)^{-1},$$

где из условия нормировки $\langle\psi(\omega_m)\rangle = 1$, $f_{km}(|r|) = n_\nu$, если $v_m \in X_\nu$ (n_ν — счетная концентрация включений ν-го размера пор X_ν); V'_{km} — характеристическая функция шара с центром x_k и радиусом $a_{km} = \min\limits_i a_m^i + \max\limits_i a_k^i$. Осредним (2.4) на множестве $X(\cdot|v_k)$ с помощью (4.1):

(4.2)
$$\langle\bar{\varepsilon}_k\rangle = \langle\varepsilon\rangle - \int G(x-y)\,\{\langle A(y)\,[L_0\bar{\varepsilon}(y) + q]\,V(y;\ x) \mid y;\ x\rangle - [\langle R\bar{\varepsilon}\rangle + \langle F\rangle]\}\,dy.$$

Для вычисления условных моментов в (4.2) воспользуемся гипотезой 2 с $n = 2$ и допущением $\hat{\varepsilon}_{12} = \hat{\varepsilon} = \text{const}$. Осредним (4.2) по значениям ω_k и a_{km}, тогда с учетом (3.2) и $\hat{\varepsilon}_k = \hat{\varepsilon}$ получим

(4.3)
$$\langle\hat{\varepsilon}\rangle = D\Big(\langle\varepsilon\rangle - \int \langle\langle(T_{km} - SF_m - G(y)F_mV'_{km}(y))\,f_{km}\rangle\rangle_{km}\,dy\Big),$$

$$D = \Big(I - \int \langle\langle\big(J_{km} - I - SR_m - G(y)R_mV'_{km}(y)\big)\,f_{km}\rangle\rangle_{km}dy\Big)^{-1}.$$

Из (2.2) и (4.3) находим среднюю деформацию поровой фазы

(4.4)
$$\langle\varepsilon V\rangle = D\langle AV\rangle[\langle\varepsilon\rangle + L_0^{-1}q] - L_0^{-1}\langle V\rangle q.$$

Подставляя (4.4) в (1.6), (1.7), (2.3), определим

(4.5)
$$L^* = L_0(I - D\langle AV\rangle), \quad \beta^* = (L^*)^{-1} - L_0^{-1},$$

$$\langle\varepsilon^-(n)\rangle = \Big\{(I - K_k(n)L_0)A_k\langle\varepsilon\rangle + (P_k - K_k(n))A_kq - \int\langle\langle(T_{km} - SF_m - G(y)F_mV'_{km}(y))\,f_{km}\rangle\rangle_{km}dy\Big\}D.$$

Давление p при известных L^*, β^* определяется из совместного решения уравнений (1.5), (1.8), (4.4), (4.5).

5. Пример. Рассмотрим равномерное распределение ориентаций ω_k, когда тензоры $\langle\langle R\rangle\rangle_{km}$, $\langle\langle J_{km}\rangle\rangle_{km}$ оказываются изотропными. Кроме того, для упрощения выкладок примем точечное приближение включений $S(|r|) = G(|r|)$ [4, 6], асимптотически точное при $|r| \to \infty$. Тогда для включений одного размера, используя первые члены ряда, имеем

$$\langle\langle J_{12} - I - SR_2\rangle\rangle_{12} = \langle\langle SR_2SR_1\rangle\rangle_{12} = (3J_{12}^1, 2J_{12}^2),$$

$$\langle\langle T_{12} - SF_2\rangle\rangle_{12} = \langle\langle SR_2SF_1\rangle\rangle_{12} = (3T_{12}^1, 2T_{12}^2),$$

$$3J_{12}^1 = 2\xi^2 (3\bar{k}_1)(2\bar{\mu}_2)|r|^{-6},$$

$$2J_{12}^2 = \frac{2}{5}\left[\xi^2 (3\bar{k}_1)(2\bar{\mu}_2) + (2\bar{\mu}_1)(2\bar{\mu}_2)\left(7\gamma^2 - \frac{\eta^2}{4} + 2\xi\eta\right)\right]|r|^{-6},$$

$$\xi = (3k_0 + 4\mu_0)^{-1}, \quad \eta = (3\mu_0)^{-1}, \quad \gamma = -(3k_0 + 4\mu_0)(3\mu_0(3k_0 + 4\mu_0))^{-1},$$

где для изотропного тензора B_{ijkl}

$$B = (3B^1, 2B^2) = 3B^1N_1 + 2B^2N_2; \quad N_1 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl};$$

$$N_2 = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right);$$

$$\langle A_i\rangle L_0 \prod_{j=1}^{3} a_i^j = (3\bar{k}_i, 2\bar{\mu}_i); \quad \langle A\rangle = \int A\psi(\omega)\,d\omega; \quad L_0 = (3k_0, 2\mu_0).$$

Для получения выражений $3T_{12}^1$, $2T_{12}^2$ нужно в зависимостях $3J_{12}^1$, $2J_{12}^2$ соответственно заменить $(\bar{3}k_i, \bar{2}\mu_i)$ на $(3t_i^1, 2t_i^2) = \langle A_i\rangle q \prod_{j=1}^{3} a_i^j$.

Например, для сфероидальных пор $(a^1 = a^2 = a \gg a^3)$ и $f(|r|) = n$

$$3t_1/p = \bar{k}/k_0 = \frac{4(1-\nu^2)}{3\pi(1-2\nu)}(a)^3, \quad \bar{\mu}/\mu_0 = \frac{8}{15\pi}\frac{(1-\nu)(5-\nu)}{(2-\nu)}(a)^3, \quad \nu = \frac{3k_0 - 2\mu_0}{2(3k_0+\mu_0)}.$$

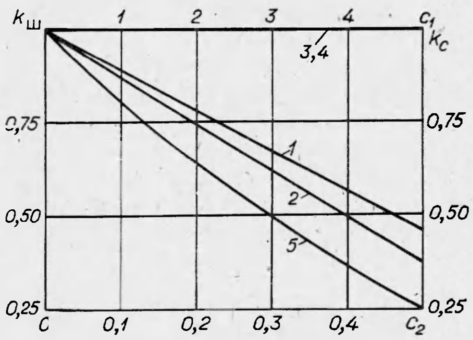
Для шаровых включений $(a^1 = a^2 = a^3 = a)$

$$3t_1/p = \bar{k}/k_0 = \frac{3k_0 + 4\mu_0}{4\mu_0}(a)^3, \quad \bar{\mu}/\mu_0 = \frac{5(3k_0 + 4\mu_0)}{9k_0 + 8\mu_0}(a)^3.$$

В случае несжимаемого материала $(\nu = 1/2,\ \beta^* = 1/L^*)$

$$(5.1)\quad 3k^* = \frac{3\mu_0}{c_1}\left(1 - \frac{16}{15\pi^2}c_1\right), \quad 3k^* = \frac{4\mu_0}{c_2}\left(1 - \frac{29}{24}c_2\right), \quad c_i = \frac{4}{3}\pi(a)^3 n$$

для плоских сфероидальных и шаровых пор; значения c_i в приведенных формулах имеют разный физический смысл. На рисунке представлены нормированные значения $k_c = k^*c_1/\mu_0$, $k_ш = 3k^*c_2/4\mu_0$ для плоских сфероидальных и шаровых включений, рассчитанных по формулам (5.1) — кривые *1*, *2*; *3*, *4* — значения k_c, $k_ш$, рассчитанные с учетом лишь двух членов в разложении (3.3), как принято в [4]; *5* — расчетные значения $k_ш$ по методу [2].



Заметим, что для несжимаемой матрицы $(\nu = 1/2)$ и плоских сфероидальных пор, согласно [2, 7], $k^* = k_0$ для любой концентрации c_1, что говорит о неправомерности теорий [2, 7] в рассматриваемом предельном случае ν.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.
2. **Хорошун Л. П.** К теории насыщенных пористых сред.— ПМ, 1976, т. 12, № 12.
3. **Cleary M. P.** Elastic and dynamic response regimes of fluid-impregnated solid with diverse microstructures.— Int. J. Solids Struct., 1978, v. 14, p. 795.
4. **Канаун С. К.** Метод эффективного поля в линейных задачах статики композитной среды.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4.
5. **Кунин П. А., Соснина Э. Г.** Концентрация напряжений на эллипсоидальной неоднородности в анизотропной среде.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
6. **Левин В. М.** О термоупругих напряжениях в композитных средах.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 3.
7. **Budiansky B., O'Connel R. J.** Elastic moduly of cracked solid.— Int. J. Solids Struct., 1976, v. 12, p. 81.

Поступила 17/VI 1985 г.