

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, В. М. Мызников

(Пермь)

В плоском горизонтальном слое жидкости при наличии продольного градиента температуры возникает стационарное плоскопараллельное конвективное течение, изученное в [1]. В данной работе исследуется устойчивость этого течения относительно малых возмущений. Для решения спектральной амплитудной задачи и определения границы устойчивости применяется метод Галеркина в варианте, который ранее использовался для исследования устойчивости конвективных течений в вертикальном и наклонном слоях при наличии поперечной разности температур или внутренних источников тепла (см. [2]). Горизонтальное плоскопараллельное течение оказывается неустойчивым относительно двух критических мод возмущений. При малых числах Прандтля неустойчивость имеет гидродинамическую природу и связана с развитием вихрей на границе встречных потоков. При умеренных и больших числах Прандтля неустойчивость имеет рэлеевскую природу и обусловлена температурной стратификацией, возникающей в стационарном течении.

1. Стационарное течение. Рассмотрим плоский горизонтальный слой жидкости, ограниченный твердыми плоскостями $x = \pm h$. На обеих плоскостях задана температура, линейно меняющаяся с координатой

$$(1.1) \quad T_0 = Az$$

В достаточно длинном слое возникает плоскопараллельное стационарное течение следующей структуры:

$$(1.2) \quad v_x = v_y = 0, \quad v_z = v_0(x), \\ T_0 = Az + \tau_0(x), \quad p = p_0(x, z)$$

Распределения скорости, температуры и давления в стационарном режиме находятся из уравнений

$$(1.3) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} = g\beta(Az + \tau_0), \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial z} = \nu v_0'', \quad A v_0 = \chi \tau_0''$$

Здесь ρ — средняя плотность, g — ускорение силы тяжести, ν , χ , β — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения. На границах слоя имеем

$$(1.4) \quad v_0 = 0, \quad \tau_0 = 0 \quad (x = \pm h)$$

Кроме того, предполагается выполненным условие замкнутости потока

$$(1.5) \quad \int_{-h}^h v_0 dx = 0$$

Из (1.3) с граничными условиями (1.4) и (1.5) определяется стационарное течение [1]

$$(1.6) \quad v_0 = \frac{g\beta Ah^3}{6\nu} \left[\left(\frac{x}{h} \right)^3 - \left(\frac{x}{h} \right) \right],$$

$$\tau_0 = \frac{g\beta A^2 h^5}{360\nu\chi} \left[3 \left(\frac{x}{h} \right)^5 - 10 \left(\frac{x}{h} \right)^3 + 7 \left(\frac{x}{h} \right) \right]$$

$$p_0 = \rho g \beta \left[Axz + \int \tau_0 dx \right]$$

Течение состоит из двух встречных горизонтальных потоков. Распределение скорости по форме оказывается таким же, как в случае вертикального слоя, границы которого поддерживаются при разных температурах. Можно ожидать, что при достаточно большой интенсивности движения (т. е. при достаточно большом градиенте A) будет возникать неустойчивость гидродинамического типа.

Из распределения температуры следует, что хотя при данном z отсутствует поперечная разность температур между границами слоя, течение приводит к формированию в жидкости двух слоев, внутри которых имеется потенциально неустойчивая стратификация температуры. Эти слои расположены вблизи верхней и нижней ограничивающих плоскостей. При достаточно большой вертикальной разности температур в этих слоях (она пропорциональна A^2) можно ожидать возникновения неустойчивости рэлеевского типа.

2. Уравнения для возмущений. Метод решения. Для изучения устойчивости стационарного режима (1.6) рассмотрим возмущенное течение $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$, $T_0 + T$, $p_0 + p$, где $\mathbf{v}$, T , p — малые возмущения плоскопараллельного течения. Введем следующие единицы измерения расстояния, времени, скорости, температуры и давления: h , h^2/ν , $g\beta Ah^3/\nu$, Ah и $\rho g\beta Ah^2$. Уравнения для малых возмущений в безразмерной форме имеют вид

$$(2.1) \quad \partial \mathbf{v} / \partial t + G[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}] = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + T\boldsymbol{\gamma}$$

$$(2.2) \quad \partial T / \partial t + G[\mathbf{v}\nabla T_0 + \mathbf{v}_0\nabla T] = P^{-1}\Delta T$$

$$(2.3) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Здесь $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх, $G = g\beta Ah^4/\nu^2$, $P = \nu/\chi$ — числа Грасгофа и Прандтля, а $\mathbf{v}_0$ и T_0 — безразмерные невозмущенные профили скорости и температуры

$$(2.4) \quad v_0 = 1/6 (x^3 - x), \quad T_0 = z + GP\tau_0,$$

$$\tau_0 = 1/360 (3x^5 - 10x^3 + 7x)$$

Возмущения удовлетворяют однородным граничным условиям

$$(2.5) \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = 0 \quad (x = \pm 1)$$

Рассмотрим плоские возмущения. В этом случае отличны от нуля компоненты скорости v_x , v_z и все величины не зависят от координаты y . Вводя «нормальные» возмущения функции тока и температуры

$$(2.6) \quad \psi = \varphi(x) \exp(-\lambda t + ikz), \quad T = \theta(x) \exp(-\lambda t + ikz),$$

получим для амплитуд φ и θ спектральную задачу

$$(2.7) \quad \Delta \Delta \varphi - ikG(v_0 \Delta \varphi - v_0'' \varphi) - ik\theta = -\lambda \Delta \varphi$$

$$(\Delta \equiv d^2/dx^2 - k^2)$$

$$(2.8) \quad P^{-1} \Delta \theta - ikG(v_0 \theta - GP\tau_0' \varphi) - G\varphi' = -\lambda \theta$$

$$(2.9) \quad \varphi = \varphi' = 0, \quad \theta = 0 \quad (x = \pm 1)$$

Собственным числом краевой задачи (2.7)–(2.9) является декремент λ , зависящий от параметров G и P и волнового числа k .

Отметим отличия краевой задачи (2.7)–(2.9) от задачи, получающейся при исследовании устойчивости стационарного конвективного течения между вертикальными плоскостями, нагретыми до разной температуры [2]. Одно из этих отличий состоит в том, что в уравнении теплопроводности (2.8) присутствует новый член $-G\varphi'$, описывающий конвективный перенос тепла в поле продольного невозмущенного градиента температуры. Другое отличие составляет форма члена с подъемной силой в уравнении движения (2.7); в рассматриваемом случае подъемная сила перпендикулярна плоскостям. Отличие заключается также в более сложном распределении по сечению невозмущенной температуры.

Как и в случае течения между параллельными плоскостями, нагретыми до разной температуры [3–6], для решения амплитудной задачи применим метод Галеркина. Амплитуды φ и θ представим в виде разложений

$$(2.10) \quad \varphi = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n, \quad \theta = \sum_{m=0}^{M-1} b_m \theta_m$$

В качестве базисных функций φ_n и θ_m использовались нормированные амплитуды возмущений в неподвижном слое жидкости, являющиеся собственными функциями краевых задач

$$(2.11) \quad \Delta \Delta \varphi_n = -\mu_n \Delta \varphi_n, \quad \varphi_n(\pm 1) = \varphi_n'(\pm 1) = 0$$

$$P^{-1} \Delta \theta_m = -\nu_m \theta_m, \quad \theta_m(\pm 1) = 0$$

Аппроксимации (2.10) содержали по 10–20 функций в разложениях φ и θ . Стандартная процедура приводит к системе линейных однородных уравнений для коэффициентов a_n , b_m , из условия разрешимости которой находятся характеристические декременты $\lambda = \lambda(G, P, k)$.

3. Спектры возмущений и граница устойчивости. В зависимости от значения числа Прандтля неустойчивость течения обуславливается двумя качественно разными механизмами.

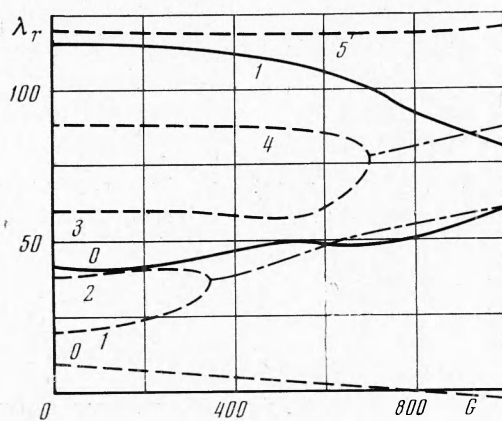
При малых значениях числа Прандтля, как и в предельном случае $P \rightarrow 0$, неустойчивость связана с гидродинамическими возмущениями монотонного типа. На фиг. 1 представлен пример спектра декрементов для фиксированных значений $P = 0.1$, $k = 1.3$. Изображены вещественные части декрементов λ_r в зависимости от числа Грасгофа. Штриховые линии относятся к ветвям гидродинамического типа (μ -уровни), сплошные линии — к тепловым ветвям (ν -уровни). Штрихпунктиром обозначены общие вещественные части комплексно-сопряженных декрементов, образовавшихся в результате слияния пары вещественных уровней.

В точках слияния вещественных ветвей образуются пары колебательных возмущений. Их фазовая скорость (в единицах максимальной скорости невозмущенного потока) связана с мнимой частью декремента λ_i соотношением $c = 9\sqrt{3} \lambda_i / kG$. С ростом G фазовая скорость монотонно увеличивается; при $G = 1000$, например, фазовая скорость колебательных возмущений, образовавшихся в результате слияния вещественных уровней μ_1 и μ_2 , имеет значение $c \approx 0.5$.

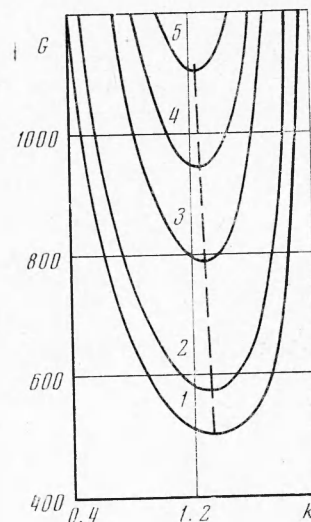
Нижний уровень μ_0 , оставаясь вещественным, меняет знак при критическом числе Грасгофа; течение становится неустойчивым относительно возмущения, обладающего нулевой фазовой скоростью. Меняя параметр k , можно получить нейтральную кривую устойчивости $G(k)$. На фиг. 2 представлено семейство нейтральных кривых монотонной неустойчивости

для некоторых значений P (кривые 1, 2, 3, 4, 5 относятся соответственно к значениям $P = 0.01, 0.05, 0.1, 0.125, 0.15$). При $P = 0$ (см. [3, 4]) минимальное критическое число Грасгофа $G_m = 495$. С ростом P , как видно, устойчивость повышается. Критическое волновое число k_m при этом незначительно уменьшается.

Численное исследование формы нейтральных возмущений при малых P показывает, что суммарное движение, образующееся в результате наложения возмущения на основное течение, представляет собой периодическую вдоль оси z систему неподвижных вихрей на границе встречных потоков.



Фиг. 1



Фиг. 2

Эффект стабилизации с увеличением P связан с тем, что при конечных P в слое имеется устойчивая стратификация по температуре в центральной части канала. Подогрев сверху затрудняет развитие вихрей. Аналогичный эффект стабилизации отмечен при исследовании устойчивости течения Пуазейля в горизонтальном канале, подогреваемом сверху [7, 8].

Качественно иную природу имеет неустойчивость течения, наступающая при умеренных и больших числах Прандтля. Пример спектра декрементов приведен на фиг. 3 ($P = 10, k = 4$). Неустойчивость имеет колебательный характер и порождается комплексно-сопряженной парой декрементов, образующейся при слиянии тепловых уровней v_0 и v_1 . В критической точке возникает пара растущих возмущений, отличающихся знаком фазовой скорости. Возмущение с фазовой скоростью $c < 0$ распространяется в виде волны вдоль верхнего (относительно более нагретого) потока, а возмущение с $c > 0$ сносится нижним (холодным) потоком.

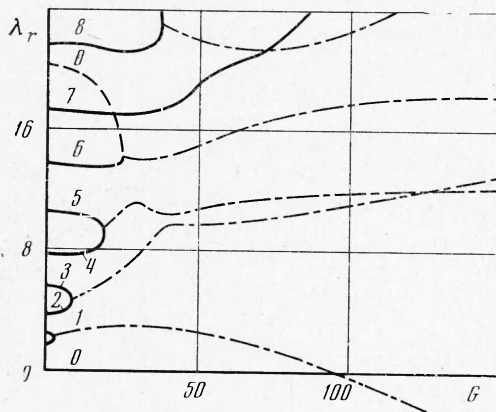
Нейтральные кривые $G(k)$ приведены на фиг. 4; кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствуют числам Прандтля $P = 1.5, 3, 5, 10, 25, 50$. Наиболее «опасными» являются коротковолновые возмущения с $k_m \approx 4$. Минимальное критическое число Грасгофа G_m с ростом P монотонно уменьшается, и при больших P имеет место асимптотическая зависимость

$$(3.1) \quad G_m = 964 / P$$

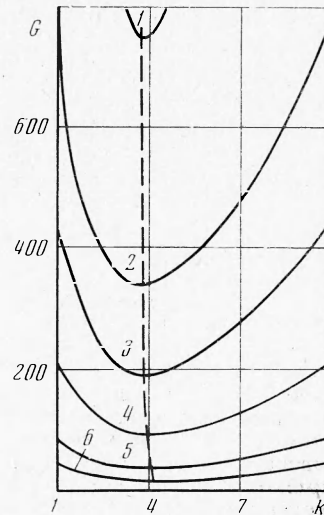
В этой области чисел Прандтля граница устойчивости определяется критическим числом Рэлея $R_m = G_m P = 964$.

Нейтральные критические возмущения имеют колебательный характер. Их фазовая скорость c_m (на минимуме нейтральной кривой) слабо зависит от R . При увеличении R от 0.6 до 50 c_m монотонно возрастает от 0.67 до 0.86.

Возмущения, обуславливающие неустойчивость обсуждаемого типа, имеют ячеистую структуру и характеризуются определенной локализацией в потоке. Возмущения с отрицательной фазовой скоростью локализованы



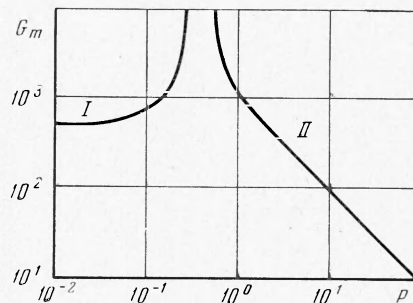
Фиг. 3



Фиг. 4

в верхней части слоя, где расположена область неустойчивой температурной стратификации. Эти возмущения приводят к формированию волн, распространяющихся вдоль верхнего потока; нижний поток практически не возмущается. Возмущения с положительной фазовой скоростью представляют собой ячейки, сосредоточенные в нижнем слое неустойчивой стратификации, и их наложение на основной поток дает волны, распространяющиеся вдоль нижнего потока.

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что при больших значениях числа Прандтля R неустойчивость связана с наличием в потоке потенциально неустойчивых зон распределения температуры. Возникающие в этих зонах ячеистые возмущения сносятся основным потоком. Кризис потока определяется критическим числом Рэлея (3.1). Для характеристики течения наряду с числом Рэлея R , определенным по продольному градиенту, можно ввести также число Рэлея R_* , определенное по поперечной разности температур на границах (верхнего или нижнего) неустойчиво стратифицированного слоя и его толщине. Из формы невозмущенного профиля температуры (1.6) видно, что связь между этими числами Рэлея такова: $R_* = \text{const } R^2$. Формула (3.1) означает, что критическим параметром является R_* , а это служит характерным признаком рэлеевской неустойчивости. Типична локализация возмущений в одном из неустойчиво



Фиг. 5

стратифицированных слоев. С этим связана характерная длина волны возникающих ячеек ($k_m \approx 4$), которая оказывается порядка толщины стратифицированного слоя.

Сводные результаты, касающиеся границ устойчивости, представлены на фиг. 5. Кривая I дает зависимость минимального критического числа Грасгофа G_m от числа Прандтля P для монотонных возмущений гидродинамической природы. Кривая II относится к рэлеевскому механизму неустойчивости.

Приведенные результаты относятся к случаю плоских возмущений. В рассматриваемой задаче отсутствуют преобразования, позволяющие свести пространственную задачу к плоской (в отличие от случая слоя с поперечной разностью температур, где такие преобразования имеются; см. [9]). Вопрос о поведении пространственных возмущений требует отдельного рассмотрения.

Поступила 4 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирх Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости. ПМТФ, 1966, № 3.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
3. Бирх Р. В. О малых возмущениях плоскопараллельного течения с кубическим профилем скорости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
4. Рудаков Р. Н. Спектр возмущений и устойчивость конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
5. Бирх Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. Гидродинамическая и тепловая неустойчивость стационарного конвективного движения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
6. Бирх Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. Устойчивость стационарного конвективного движения жидкости с продольным градиентом температуры. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
7. Gage K. S., Reid W. H. The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt. 1.
8. Gage K. S. The effect of stable thermal stratification on the stability of viscous parallel flows. J. Fluid Mech., 1971, vol. 47, pt. 1.
9. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного движения относительно пространственных возмущений. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.