

УДК 534.833:620.178.3

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГОСТИ И ДЕМПФИРОВАНИЯ УГЛЕПЛАСТИКА НА ОСНОВЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАТУХАЮЩИХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕСТ-ОБРАЗЦОВ

В. Н. Паймушин^{*,**}, В. А. Фирсов^{**}, И. Гюнал^{**}, В. М. Шишкин^{***}

* Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008 Казань, Россия

** Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А. Н. Туполева, 420111 Казань, Россия

*** Вятский государственный университет, 610000 Киров, Россия

E-mails: vprajmushin@mail.ru, vafirsov_49@mail.ru, igyunal@kai.ru, tism1@rambler.ru

Предложен теоретико-экспериментальный метод определения характеристик упругости и демпфирования материалов, основанный на анализе виброграмм затухающих изгибных колебаний тест-образцов с различной структурой. Показано, что при растяжении-сжатии и сдвиге углепластика, армированного углеродной тканью Porcher 3692, с полимерным связующим ЭДТ-69НМ по мере увеличения частоты его деформирования в диапазоне $0 \div 120$ Гц динамический модуль упругости существенно уменьшается. Путем минимизации невязки между экспериментальными и расчетными параметрами внутреннего демпфирования соответствующих тест-образцов определены амплитудные зависимости логарифмических декрементов колебаний указанного углепластика при растяжении-сжатии и сдвиге.

Ключевые слова: теоретико-экспериментальный метод, тест-образец, внутреннее демпфирование, аэродинамическое демпфирование, целевая функция.

DOI: 10.15372/PMTF20160417

Введение. Как известно, прочностные, жесткостные и демпфирующие свойства слоистых волокнистых композитных материалов с одинаковыми коэффициентами армирования и одинаковыми составляющими слоев могут существенно различаться, что приводит к необходимости идентификации данных свойств по результатам механических испытаний специально изготовленных тест-образцов. В настоящее время для экспериментального определения демпфирующих свойств материалов в диапазоне частот $50 \div 5000$ Гц используется международный стандарт ASTM E-756 [1], в соответствии с которым акустическим методом в резонансном режиме исследуется динамическое поведение консольно закрепленных тест-образцов с различной структурой. Однако указанный стандарт имеет ряд ограничений, значительно сужающих область его применения: 1) невозможность определения демпфирующих свойств материалов в диапазоне частот $0 \div 50$ Гц, соответствующем реальным условиям эксплуатации большинства конструкций; 2) невозможность установления зависимости демпфирующей способности материалов от амплитуды деформаций, так как

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-19-00667).

© Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Гюнал И., Шишкин В. М., 2016

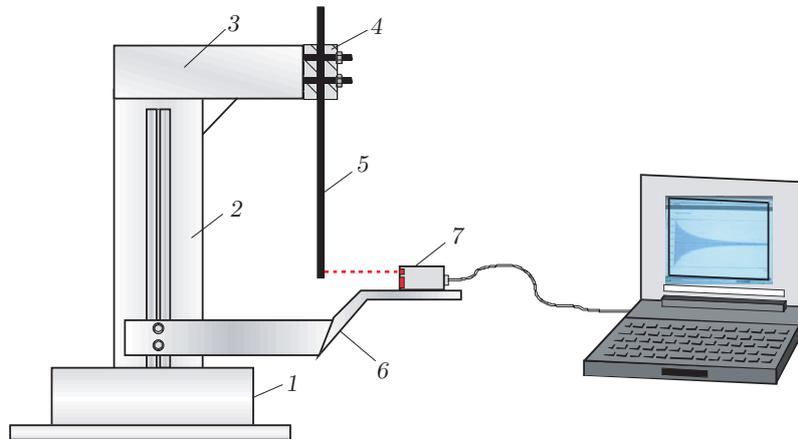


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1 — основание, 2 — стойка для крепления консоли, 3 — консоль, 4 — захват, 5 — тест-образец, 6 — подвижная платформа для крепления датчика перемещений, 7 — лазерный датчик перемещений

стандарт основан на измерениях и обработке значений амплитуды давления акустических волн, излучаемых тест-образцами при их колебаниях в резонансных режимах; 3) неучет демпфирования воздушной среды при колебаниях тест-образцов, что может привести к возникновению существенных погрешностей при определении демпфирующих свойств как материала, так и конструкции в целом [2].

Для определения упругих и демпфирующих свойств различных материалов в низкочастотном диапазоне динамических деформаций предложен теоретико-экспериментальный метод [2], в котором используется известная методика непосредственной обработки экспериментальных виброграмм изгибных затухающих колебаний консольно закрепленных тест-образцов (см., например, [3]). Разработан также алгоритм аппроксимации экспериментальных данных и определения частоты и логарифмического декремента колебаний в зависимости от амплитуды колебаний с точностью, достаточной для измерения амплитудных и частотных характеристик даже при амплитуде порядка 10^{-4} м [2].

1. Экспериментальная установка для исследования изгибных затухающих колебаний тест-образцов. Для определения динамических характеристик упругости в диапазоне малых частот и амплитудной зависимости демпфирующих свойств материалов необходимо использовать тест-образцы значительной длины. С целью исключения статической составляющей прогиба динамические испытания таких образцов целесообразно осуществлять при их вертикальном расположении. Для реализации данной возможности проведена модернизация разработанной ранее экспериментальной установки [2], схема которой представлена на рис. 1. Установка состоит из основания и стойки, жестко соединенных между собой. На стойке неподвижно закреплена консоль с помощью захвата на конце. Защемление тест-образца осуществляется с помощью разнесенных жестких планок, соединенных с консолью болтовыми соединениями и исключающих поворот тест-образца в сечении заделки. На стойке установлена подвижная платформа для крепления лазерного датчика перемещений, которая может перемещаться вдоль стойки для измерения амплитуды колебаний конца тест-образца при изменении длины его колеблющейся части (стрелы вылета). В экспериментах используется триангуляционный лазерный датчик фирмы RIFTEK (RF603-X/100), обеспечивающий измерение амплитуды колебаний с точностью до 0,01 мм. Разработанное математическое обеспечение позволяет осуществлять до 2000

замеров прогибов в секунду, что обеспечивает высокую точность описания экспериментальных виброграмм затухающих колебаний исследуемых тест-образцов.

2. Идентификация упругих свойств углепластика. Наиболее достоверную информацию о характеристиках упругости материала можно получить с использованием динамического способа, основанного на измерении циклической частоты f затухающих колебаний тест-образцов и сравнении ее с расчетной частотой идеально упругого образца. Исследованы затухающие изгибные колебания серии тест-образцов, состоящих из шести слоев углеткани Porcher 3692 (связующее — ЭДТ-69НМ). Упругие свойства слоя в направлениях под углами, равными 0 и 90° , одинаковы и определяются соответственно модулями упругости $E_1 = E_2 = E$. Для определения величины E использовались вертикально расположенные тест-образцы шириной $b = 15,5$ мм и толщиной $h = 1,32$ мм с углами укладки слоев 0° относительно их продольной оси. Длина L колеблющейся части тест-образцов изменялась в диапазоне $100 \div 450$ мм, что соответствует диапазону измеренных частот $5,9 \div 112,5$ Гц.

Следует отметить, что при вертикальном расположении тест-образца на частоты собственных колебаний оказывает влияние сила тяжести, зависящая от длины образца. Для учета этого влияния получено решение задачи о свободных колебаниях вертикального идеально упругого консольного стержня с учетом силы тяжести

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho gh \frac{\partial}{\partial x} \left((L-x) \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.1)$$

с краевыми условиями

$$x = 0: \quad w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = L: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0,$$

где t — время; ρ — плотность материала; h , L — толщина и длина стержня соответственно; E — модуль упругости; g — ускорение свободного падения. С использованием приближенного решения уравнения (2.1) методом Бубнова — Галеркина можно построить формулу для учета влияния силы тяжести на частоту основной моды колебаний:

$$f/f_0 = \sqrt{1,008 + 0,126s}. \quad (2.2)$$

Здесь f , f_0 — частота данной моды с учетом и без учета силы тяжести соответственно; $s = 12\rho gL^3/(Eh^2)$. Частота f_0 определяется из решения уравнения (2.1) при $g = 0$:

$$f_0 = \frac{3,516}{2\pi} \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho}}. \quad (2.3)$$

Из выражений (2.2), (2.3) следует формула для идентификации динамического модуля упругости материала по экспериментально полученной частоте колебаний f вертикально расположенного тест-образца:

$$E_d = \left(38,0164f^2 - 1,5 \frac{g}{L} \right) \frac{\rho L^4}{h^2}. \quad (2.4)$$

Вычисленные по формуле (2.4) значения E_d для углепластика имеют некоторый разброс. Однако при этом наблюдается уменьшение значений E_d по мере увеличения частоты f , которое можно охарактеризовать следующей аппроксимацией:

$$E_d = 3,11 \cdot 10^3 e^{-2,34 \cdot 10^{-2}f} + 3,77 \cdot 10^4 e^{-3,56 \cdot 10^{-4}f}. \quad (2.5)$$

На рис. 2 приведены найденные по формуле (2.4) значения динамического модуля упругости E_d углепластика при частотах $f = 5,9 \div 112,5$ Гц и аппроксимационная зависимость (2.5), в соответствии с которой в отмеченном диапазоне частот f значения динамического модуля упругости E_d углепластика уменьшаются на 9,64 %.

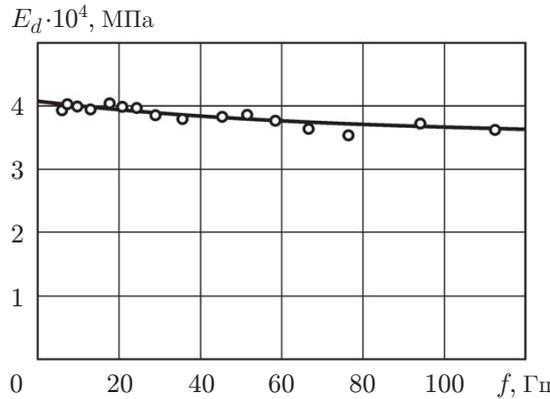


Рис. 2. Зависимость динамического модуля упругости от частоты колебаний: точки — расчет по формуле (2.4), линия — аппроксимационная зависимость (2.5)

Для определения динамического модуля упругости исследуемого углепластика при сдвиге использовались шестислойные тест-образцы с углами укладки слоев 45° относительно продольной оси тест-образца шириной $b = 15,5$ мм и толщиной $h = 1,32$ мм. Длина L рабочей части тест-образцов изменялась в диапазоне $100 \div 500$ мм, что соответствует диапазону измеренных частот $2,9 \div 66,4$ Гц. Предварительно по измеренным частотам колебаний f с помощью формулы (2.4) определялись динамические модули упругости $E_{x,d}$ пакета слоев вдоль продольной оси тест-образцов. Экспериментально полученные значения $E_{x,d}$ можно аппроксимировать выражением

$$E_{x,d} = 2,15 \cdot 10^3 e^{-1,60 \cdot 10^{-2} f} + 1,21 \cdot 10^4 e^{-2,43 \cdot 10^{-4} f}. \quad (2.6)$$

Для вычисления модуля упругости E_x пакета симметрично уложенных композитных слоев с помощью элементов D_{11} , D_{12} , D_{22} матрицы жесткости D данного пакета можно использовать формулу [4]

$$E_x = D_{11} - D_{12}^2 / D_{22}.$$

Матрица D определяется выражением

$$D = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^l H_k^T D_s H_k h_k.$$

Здесь h_k — толщина слоя k ; H_k — матрица, зависящая от угла укладки φ_k данного слоя; D_s — матрица жесткости в системе координат, связанной с осями ортотропии слоя:

$$H_k = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_k & \sin^2 \varphi_k & 0,5 \sin 2\varphi_k \\ \sin^2 \varphi_k & \cos^2 \varphi_k & -0,5 \sin 2\varphi_k \\ -\sin 2\varphi_k & \sin 2\varphi_k & \cos 2\varphi_k \end{bmatrix},$$

$$D_s = \begin{bmatrix} E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & \nu_{21} E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & 0 \\ \nu_{12} E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & E_2 / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты Пуассона ν_{12} и ν_{21} связаны зависимостью $\nu_{21} E_1 = \nu_{12} E_2$.

При углах укладки $\varphi_k = \pm 45^\circ$ элементы D_{11} , D_{12} , D_{22} матрицы D имеют вид

$$D_{11} = D_{22} = a + G_{12}, \quad D_{12} = a - G_{12},$$

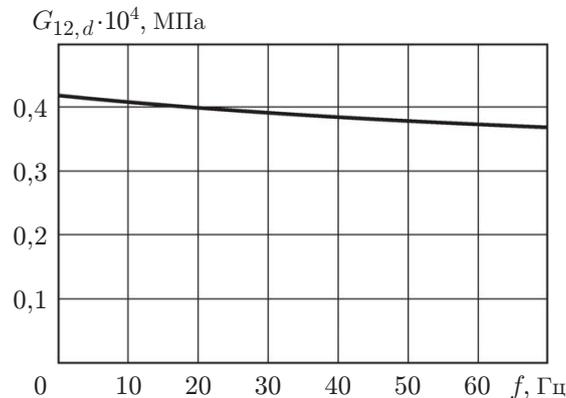


Рис. 3. Зависимость динамического модуля сдвига от частоты колебаний

где

$$a = (E_1 + E_2 + 2\nu_{12}E_2)/[4(1 - \nu_{12}\nu_{21})]. \quad (2.7)$$

В этом случае получаем выражение для E_x в виде

$$E_x = 4aG_{12}/(a + G_{12}),$$

откуда следует формула для вычисления модуля сдвига композитного слоя

$$G_{12} = aE_x/(4a - E_x).$$

Аналогичную формулу можно записать для динамического модуля сдвига $G_{12,d}$:

$$G_{12,d} = aE_{x,d}/(4a - E_{x,d}). \quad (2.8)$$

Величина a для исследуемого углепластика определяется выражением (2.7) при $E_1 = E_2 = E_d$ и $\nu_{21} = \nu_{12} = 0,163$. Таким образом, с помощью аппроксимаций (2.5), (2.6), построенных по экспериментально определенным частотам и динамическим модулям E_d , $E_{x,d}$ исследуемого углепластика, получена формула (2.8), представляющая собой аналитическую зависимость $G_{12,d}(f)$. При этом, как и в случае зависимости $E_d(f)$, наблюдается значительное уменьшение получаемого динамического модуля сдвига $G_{12,d}$ при увеличении частоты колебаний f тест-образца (рис. 3).

3. Идентификация демпфирующих свойств углепластика. Демпфирующие свойства исследуемого углепластика при деформировании его под углами 0 и 90° одинаковы и определяются логарифмическим декрементом колебаний (ЛДК) δ , зависящим от амплитуды деформации ε_0 . Для идентификации зависимости $\delta(\varepsilon_0)$ используются тест-образцы с углами укладки слоев, равными 0° . Демпфирующие свойства тест-образца определяются ЛДК δ , зависящим от амплитуды колебаний A его свободного конца. На данную зависимость существенное влияние оказывает внешнее аэродинамическое демпфирование, которое нужно исключать из экспериментально определяемой величины ЛДК при вычислении параметра внутреннего демпфирования тест-образца, необходимого для идентификации зависимости $\delta(\varepsilon_0)$:

$$\delta^*(A) = \delta(A) - \delta_a(A).$$

Аэродинамическую составляющую демпфирования $\delta_a(A)$ можно получить с использованием теоретико-экспериментального метода [5] при исследовании изгибных затухающих колебаний дюралюминиевых тест-образцов, в которых, как известно [6], внутреннее трение

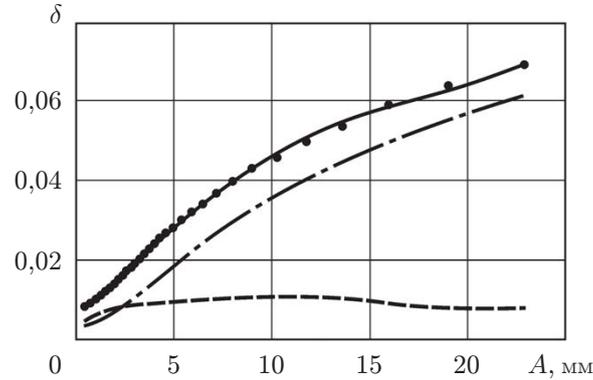


Рис. 4. Зависимость логарифмического декремента колебаний от амплитуды колебаний для тест-образца длиной $L = 200$ мм:

точки — экспериментальная зависимость, сплошная линия — аппроксимация экспериментальной зависимости степенным полиномом (3.1), штрихпунктирная — аэродинамическая составляющая ЛДК, штриховая — внутреннее демпфирование аппроксимации (3.1)

не зависит от амплитуды колебаний A . На основе этого исследования получена формула для определения составляющей $\delta_a(A)$ тест-образцов, изготовленных из любого материала:

$$\delta_a(A) = \frac{\rho_a}{\rho} \frac{b}{h} \left(\frac{6,140}{\sqrt{\mu}} + \frac{25,928\kappa^{2,074}}{1 + 5,534\kappa^{1,641}} \right), \quad \mu = \frac{b^2 f}{\nu}, \quad \kappa = \frac{A}{b}.$$

Здесь ρ_a, ρ — плотность воздуха ($\rho_a = 1,29$ кг/м³) и плотность материала соответственно; $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$ м²/с — кинематическая вязкость воздуха. Исследуемый углепластик имеет плотность $\rho = 1320$ кг/м³.

Экспериментально ЛДК $\delta(A)$ тест-образцов обычно определяются при различных амплитудах колебаний A_j , что приводит, во-первых, к увеличению времени идентификации зависимости $\delta(\varepsilon_0)$ и необходимости учета всех амплитуд A_j , во-вторых, к снижению точности определения данной зависимости вследствие разброса значений $\delta(A_j)$. Поэтому экспериментальную зависимость $\delta(A)$ необходимо аппроксимировать некоторой функцией. Проведенные численные эксперименты показали, что для этой цели можно использовать степенной полином

$$\delta(A) = c_0 + c_1\kappa + c_2\kappa^2 + c_3\kappa^3 + c_4\kappa^4. \tag{3.1}$$

На рис. 4 приведены экспериментальная зависимость $\delta(A)$ (точки), ее аппроксимация степенным полиномом (3.1) (сплошная линия), аэродинамическая составляющая ЛДК $\delta_a(A)$ (штрихпунктирная линия) и величина внутреннего демпфирования $\delta^*(A)$ (штриховая линия), найденная с использованием аппроксимации (3.1), для тест-образца длиной $L = 200$ мм. Численные эксперименты показали, что возрастание зависимости $\delta^*(A)$ на начальной стадии и последующее ее убывание характерны для всех использованных тест-образцов в диапазоне длин $L = 100 \div 450$ мм. Поэтому для получения корректной зависимости $\delta(\varepsilon_0)$ целесообразно использовать начальный диапазон значений амплитуды A , соответствующий возрастанию зависимости $\delta^*(A)$.

Для представления зависимости $\delta(\varepsilon_0)$ предлагается использовать степенную функцию

$$\delta(\varepsilon_0) = \alpha\varepsilon_0^\beta. \tag{3.2}$$

Идентификация зависимости $\delta(\varepsilon_0)$ состоит в нахождении параметров α и β функции (3.2) по имеющейся зависимости $\delta^*(A)$, так чтобы выполнялось условие

$$F(\alpha, \beta) = \|\delta^* - \delta\| = \min, \tag{3.3}$$

где $F(\alpha, \beta)$ — целевая функция, неявно зависящая от параметров α и β ; δ^* , δ — векторы, содержащие соответственно экспериментальные и расчетные ЛДК тест-образца при амплитудах колебаний A_j ; $\|\delta^* - \delta\|$ — норма Евклида вектора $\delta^* - \delta$. Для нахождения минимума функции $F(\alpha, \beta)$ следует использовать прямые методы нулевого порядка [7] (симплекс-метод, метод конфигураций Хука — Дживса, метод Розенброка). Более предпочтительным является метод конфигураций Хука — Дживса.

Для определения параметров α и β функции (3.2) данным методом необходимо многократно решать прямую задачу вычисления компонент вектора δ при известных значениях данных параметров. Для решения указанной задачи предлагается использовать метод конечных элементов. Поскольку длина L тест-образца существенно больше его ширины b , можно использовать расчетную модель, составленную из балочных конечных элементов. Затухающие колебания конечно-элементной модели вертикально расположенного тест-образца описываются системой дифференциальных уравнений

$$M\ddot{\mathbf{r}} + C\dot{\mathbf{r}} + (K + K_g)\mathbf{r} = 0 \quad (3.4)$$

с начальными условиями $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_s$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = 0$, где M , C , K , \mathbf{r} — матрица масс, матрица демпфирования, матрица жесткости и вектор узловых перемещений отмеченной модели соответственно; K_g — матрица геометрической жесткости, учитывающая влияние силы тяжести тест-образца на частоту f ; \mathbf{r}_s — вектор узловых перемещений \mathbf{r} при начальном отклонении w_s свободного конца тест-образца от положения равновесия. Точка означает дифференцирование по времени t . Матрицы M , K , K_g формируются из соответствующих матриц $M^{(e)}$, $K^{(e)}$, $K_g^{(e)}$ конечных элементов [8].

Матрица $C^{(e)}$ зависит от модели неупругого деформирования материала. При одноосном напряженном состоянии простейшая из таких зависимостей, наиболее часто используемая на практике, соответствует известной модели Фойгта — Томпсона — Кельвина [9]

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad (3.5)$$

где σ , ε , $\dot{\varepsilon}$ — нормальное напряжение, относительная деформация и скорость ее изменения во времени t соответственно; E , η — модуль упругости и коэффициент вязкости материала, связанный с логарифмическим декрементом колебаний $\delta(\varepsilon_0)$ зависимостью

$$\eta = E\delta(\varepsilon_0)/(\pi\omega), \quad (3.6)$$

ω — круговая частота деформирования материала. В случае зависимости упругих свойств материала от частоты ω модуль E необходимо заменить динамическим модулем упругости E_d . С учетом такой замены и зависимости (3.6) модель (3.5) принимает вид

$$\sigma = E_d\varepsilon + E_d\delta(\varepsilon_0)\dot{\varepsilon}/(\pi\omega). \quad (3.7)$$

На основе представления (3.2) и выражения (3.7) построена матрица демпфирования балочного конечного элемента, пропорциональная его матрице жесткости $K^{(e)}$:

$$C^{(e)} = \frac{3\alpha(\chi_0 h/2)^\beta}{\pi\omega(\beta + 3)} K^{(e)}. \quad (3.8)$$

Здесь χ_0 — амплитуда кривизны деформированной оси в середине элемента.

Для решения системы (3.4) необходимо использовать шаговые методы интегрирования, пересчитывая матрицы $C^{(e)}$ конечных элементов в каждом цикле колебаний в соответствии с достигнутыми в них значениями χ_0 . Поэтому шаг интегрирования Δt , необходимый для получения данных значений, должен быть достаточно малым (100 ÷ 120 шагов в одном цикле колебаний), а число решений системы (3.4) при поиске параметров α и β зависимости (3.2) прямыми методами может составлять несколько тысяч. Это приводит к

неприемлемому времени вычисления и накоплению погрешности счета. Однако измерения амплитуды колебаний A тест-образца проводятся не с момента начального отклонения от положения равновесия w_s , а через определенный промежуток времени, в течение которого заканчивается переход от статической формы изгиба к колебаниям по низшей моде \mathbf{F}_1 . Это позволяет перейти от системы (3.4) к уравнению относительно обобщенной координаты $q_1(t)$ данной моды

$$m\ddot{q}_1(t) + c\dot{q}_1(t) + (k + k_g)q_1(t) = 0 \quad (3.9)$$

с начальными условиями

$$q_1(0) = A_{\max}/F_w, \quad \dot{q}_1(0) = 0.$$

Здесь $m = \mathbf{F}_1^T M \mathbf{F}_1$, $c = \mathbf{F}_1^T C \mathbf{F}_1$, $k = \mathbf{F}_1^T K \mathbf{F}_1$, $k_g = \mathbf{F}_1^T K_g \mathbf{F}_1$ — модальные параметры тест-образца; A_{\max} — максимальная амплитуда на рассматриваемом участке зависимости $\delta^*(A)$; F_w — компонента моды \mathbf{F}_1 , соответствующая прогибу w свободного конца тест-образца.

Уравнение (3.9) можно представить в виде

$$\ddot{q}_1(t) + 2n\dot{q}_1(t) + \omega^2 q_1(t) = 0, \quad (3.10)$$

где $n = c/(2m)$; $\omega^2 = (k + k_g)/m$. Коэффициент затухания n неявно зависит от параметров α , β зависимости (3.2) через матрицы $C^{(e)}$ демпфирования конечных элементов и должен пересчитываться в каждом цикле колебаний i в соответствии с достигнутой амплитудой колебаний A_i тест-образца. При этом значение данного коэффициента между амплитудами A_i и A_{i+1} можно считать постоянным и равным значению n_i при амплитуде колебаний A_i . Это позволяет использовать известное аналитическое решение для огибающей $A(\tau)$ в текущем цикле колебаний

$$A(\tau) = A_i e^{-n_i \tau} \quad (0 \leq \tau \leq T), \quad (3.11)$$

где τ — локальное время; T — период колебаний.

Расчетный ЛДК тест-образца при амплитуде A_i связан с коэффициентом n_i известной зависимостью $\delta_i = n_i T$ [10]. Подставляя в эту зависимость $n_i = c_i/(2m)$, $T = 2\pi/\omega$, получаем

$$\delta_i = c_i \pi / (m\omega). \quad (3.12)$$

С помощью выражений (3.11), (3.12) можно построить алгоритм для получения амплитуд колебаний и соответствующих им расчетных ЛДК тест-образца, не используя процедуру шагового интегрирования уравнения (3.10):

$$A_{i+1} = A_i e^{-n_i T}, \quad \delta_{i+1} = \frac{c_{i+1} \pi}{m\omega}. \quad (3.13)$$

Адекватность алгоритма (3.13) подтверждается решением прямой задачи, состоящей в определении зависимости $\delta^*(A)$ при известных параметрах α и β функции (3.2).

Естественно полагать, что демпфирующие характеристики материала, полученные с использованием тест-образцов различной длины, должны иметь некоторый разброс. Поэтому идентификацию зависимости (3.2) необходимо проводить по параметрам внутреннего демпфирования $\delta^*(A)$ нескольких тест-образцов, выполняя осреднение полученных результатов.

Для определения параметров α и β зависимости (3.2) методом конфигураций Хука — Дживса необходимо знать координаты α_0 , β_0 начальной точки. Их можно определить по амплитуде деформации ε_0 в окрестности заделки при амплитуде колебаний A ($\varepsilon_0 = 1,758Ah/L^2$), а также по зависимости (3.2) и аппроксимации

$$\delta^*(A) = c(A/b)^d. \quad (3.14)$$

Таблица 1

Параметры тест-образцов с углами укладки слоев, равными 0°

| L , мм | c | d | α | β | $F(\alpha, \beta)$ | N |
|----------|--------|--------|----------|---------|--------------------|--------|
| 140 | 0,0216 | 0,3219 | 0,1987 | 0,3188 | 0,000 051 9 | 27 480 |
| 160 | 0,0163 | 0,3383 | 0,1888 | 0,3368 | 0,000 028 3 | 20 365 |
| 180 | 0,0147 | 0,2835 | 0,1195 | 0,2817 | 0,000 035 9 | 315 |
| 200 | 0,0126 | 0,2748 | 0,1046 | 0,2749 | 0,000 002 0 | 120 |
| 220 | 0,0152 | 0,3602 | 0,2617 | 0,3588 | 0,000 027 8 | 21 930 |
| 240 | 0,0123 | 0,2602 | 0,1019 | 0,2601 | 0,000 002 0 | 110 |
| 260 | 0,0126 | 0,4293 | 0,4330 | 0,4274 | 0,000 024 8 | 42 240 |

В результате получаем $\alpha_0 = c(L^2/(1,758hb))^d$, $\beta_0 = d$. Проведенные численные эксперименты показали, что аппроксимацию (3.14) можно использовать не только для вычисления α_0 , β_0 , но и для идентификации зависимости $\delta(\varepsilon_0)$.

В табл. 1 приведены длины L семи тест-образцов с углами укладки слоев, равными 0° , параметры c и d аппроксимации (3.14) для данных тест-образцов, найденные параметры α и β зависимости (3.2), соответствующие им значения целевой функции $F(\alpha, \beta)$, а также число N исследованных точек в пространстве поиска (α, β) . Все тест-образцы моделировались 20 конечными элементами.

Параметры α и β определялись следующим образом: сначала шаг поиска по каждому параметру составлял 0,001; после достижения минимума целевой функции шаг последовательно уменьшался в 10 раз до получения окончательных значений искомых параметров α и β . По найденным параметрам α и β построена осредненная зависимость $\delta(\varepsilon_0)$ в диапазоне $4,29 \cdot 10^{-5} \leq \varepsilon_0 \leq 6,80 \cdot 10^{-4}$, который включает значения ε_0 для всех семи тест-образцов:

$$\delta(\varepsilon_0) = 0,1810\varepsilon_0^{0,3248}. \quad (3.15)$$

Следует отметить, что значения параметра β в табл. 1 близки к его начальным значениям $\beta_0 = d$ для всех рассмотренных тест-образцов, а параметр α в зависимости $\delta(\varepsilon_0) = \alpha\varepsilon_0^\beta$ всегда больше его начального значения α_0 . Это позволяет рассматривать одномерную задачу, полагая $\beta = \beta_0$ и увеличивая параметр α от начального значения α_0 . Кроме того, из выражения (3.8) следует, что расчетные параметры внутреннего демпфирования тест-образца, а следовательно, и целевая функция (3.3) должны линейно зависеть от параметра α (достоверность данного утверждения подтверждается результатами проведенных численных экспериментов).

Отмеченные особенности позволяют выполнить линейную экстраполяцию по точкам α_0 и α_1 до значения α , соответствующего $F = 0$:

$$\alpha = \frac{F(\alpha_0)\alpha_1 - F(\alpha_1)\alpha_0}{F(\alpha_0) - F(\alpha_1)}. \quad (3.16)$$

Учитывая, что α может превышать α_0 весьма несущественно, значение α_1 следует выбирать в интервале $(1,01 \div 1,05)\alpha_0$. На основе (3.16) построена осредненная по тем же семи тест-образцам амплитудная зависимость ЛДК углепластика при растяжении-сжатии в диапазоне $4,3 \cdot 10^{-5} \leq \varepsilon_0 \leq 6,8 \cdot 10^{-4}$:

$$\delta(\varepsilon_0) = 0,1833\varepsilon_0^{0,3263}. \quad (3.17)$$

На рис. 5 приведены зависимости $\delta(\varepsilon_0)$, построенные по выражениям (3.15) (сплошная линия) и (3.17) (точки). Видно, что эти зависимости практически совпадают.

Демпфирующие свойства углепластика при сдвиге определяются ЛДК δ_{12} , зависящим от угла сдвига $\gamma_{12,0}$. Для идентификации зависимости $\delta_{12}(\gamma_{12,0})$ используются параметры

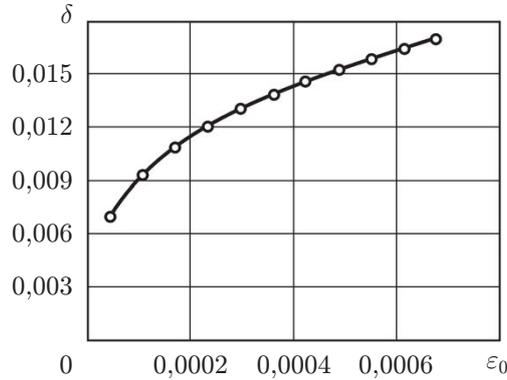


Рис. 5. Зависимость логарифмического декремента колебаний от деформации: линия — расчет по формуле (3.15), точки — расчет по формуле (3.17)

внутреннего демпфирования $\delta^*(A)$ тест-образцов с углами укладки слоев, равными 45° . Зависимость $\delta(\varepsilon_0)$ при растяжении-сжатии углепластика считается известной и определяется выражением (3.15). Зависимость $\delta_{12}(\gamma_{12,0})$ представляется в виде степенной функции

$$\delta_{12}(\gamma_{12,0}) = \xi \gamma_{12,0}^\theta. \tag{3.18}$$

Модель неупругого динамического деформирования углепластика при сдвиге можно представить в виде, аналогичном (3.7):

$$\tau_{12} = G_{12,d} \gamma_{12} + G_{12,d} \delta_{12}(\gamma_{12,0}) \dot{\gamma}_{12} / (\pi \omega). \tag{3.19}$$

Для пакета ортогонально-армированных композитных слоев с углами укладки, равными 45° , справедливы преобразования

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 0,5(1 - \nu_{xy})\varepsilon_x, \quad \gamma_{12} = (1 + \nu_{xy})\varepsilon_x, \tag{3.20}$$

где ε_x — относительная деформация пакета в направлении продольной оси тест-образца; ν_{xy} — коэффициент Пуассона (для рассматриваемого углепластика $\nu_{xy} = 0,831$). С помощью моделей деформирования (3.7), (3.19), а также представлений (3.2), (3.18) и преобразований (3.20) можно построить матрицу демпфирования многослойного балочного конечного элемента с углами укладки слоев, равными $\pm 45^\circ$:

$$C^{(e)} = 3 \left[\frac{\alpha(1 - \nu_{xy})^{2+\beta}}{2(\beta + 3)} \frac{E_d}{E_{x,d}} \left(\frac{\chi_0 h}{4} \right)^\beta + \frac{\xi(1 + \nu_{xy})^{2+\theta}}{\theta + 3} \frac{G_{12,d}}{E_{x,d}} \left(\frac{\chi_0 h}{2} \right)^\theta \right] \frac{K^{(e)}}{\pi \omega}. \tag{3.21}$$

Матрица $C^{(e)}$, определяемая выражением (3.21), получена при условии $E_{1,d} = E_{2,d} = E_d$.

Алгоритм поиска параметров ξ и θ зависимости (3.18) остается таким же, как и при определении параметров α , β зависимости (3.2). В качестве координат начальной точки можно выбрать значения $\xi_0 = c$, $\theta_0 = d$. В табл. 2 приведены длины L семи тест-образцов с углами укладки слоев, равными 45° , параметры c и d аппроксимации (3.14) для данных тест-образцов, найденные параметры ξ и θ зависимости (3.18), соответствующие им значения целевой функции $F(\xi, \theta)$, а также число N исследованных точек. Все тест-образцы моделировались 20 конечными элементами. По найденным параметрам ξ и θ построена осредненная зависимость $\delta_{12}(\gamma_{12,0})$ в диапазоне $1,72 \cdot 10^{-4} \leq \gamma_{12,0} \leq 1,73 \cdot 10^{-3}$, который включает значения $\gamma_{12,0}$ для всех семи тест-образцов:

$$\delta_{12}(\gamma_{12,0}) = 0,0985 \gamma_{12,0}^{0,1498}. \tag{3.22}$$

Таблица 2

Параметры тест-образцов с углами укладки слоев, равными 45°

| L , мм | c | d | ξ | θ | $F(\xi, \theta)$ | N |
|----------|--------|--------|--------|----------|------------------|--------|
| 140 | 0,0430 | 0,2035 | 0,1578 | 0,2012 | 0,000 090 1 | 15 395 |
| 160 | 0,0334 | 0,1468 | 0,0902 | 0,1458 | 0,000 015 6 | 320 |
| 180 | 0,0357 | 0,1897 | 0,1381 | 0,1872 | 0,000 085 2 | 4415 |
| 200 | 0,0295 | 0,1082 | 0,0627 | 0,1081 | 0,000 082 9 | 225 |
| 220 | 0,0279 | 0,0849 | 0,0557 | 0,0848 | 0,000 066 2 | 180 |
| 240 | 0,0372 | 0,1636 | 0,1272 | 0,1606 | 0,000 109 1 | 9875 |
| 260 | 0,0281 | 0,1381 | 0,0833 | 0,1380 | 0,000 045 4 | 315 |

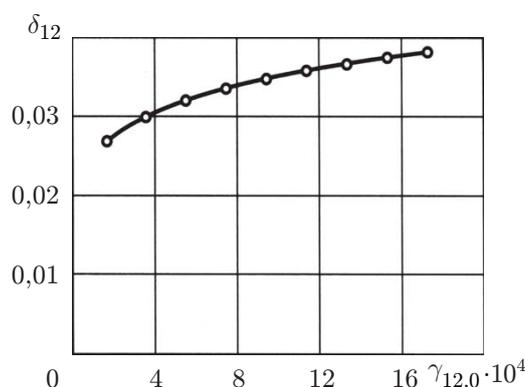


Рис. 6. Зависимость логарифмического декремента колебаний от угла сдвига: линия — расчет по формуле (3.22), точки — расчет по формуле (3.23)

Из табл. 2 следует, что полученные значения параметра θ зависимости (3.18) при сдвиге несущественно отличаются от его начальных значений $\theta_0 = d$. Это позволяет искать только параметр ξ указанной зависимости при $\theta = d$. Данный факт объясняется тем, что при значении коэффициента Пуассона $\nu_{xy} = 0,831$ отношение первого слагаемого в квадратных скобках в формуле (3.21) ко второму составляет величину порядка $10^{-2} \div 10^{-3}$. Это значит, что параметры внутреннего демпфирования тест-образцов с углами укладки слоев, равными 45° , в основном определяются демпфирующими свойствами углепластика при сдвиге. Кроме того, проведенные численные эксперименты показали, что в этом случае целевая функция F практически линейно зависит от параметра ξ . Это позволяет выполнить линейную экстраполяцию

$$\xi = \frac{F(\xi_0)\xi_1 - F(\xi_1)\xi_0}{F(\xi_0) - F(\xi_1)},$$

на основе которой получается осредненная зависимость

$$\delta_{12}(\gamma_{12,0}) = 0,0996\gamma_{12,0}^{0,1512} \quad (3.23)$$

в диапазоне $1,72 \cdot 10^{-4} \leq \gamma_{12,0} \leq 1,73 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 6 представлены зависимости $\delta_{12}(\gamma_{12,0})$, построенные по выражениям (3.22) (сплошная линия) и (3.23) (точки). Видно, что эти зависимости практически совпадают. Из рис. 6 следует, что характеристики демпфирования исследуемого углепластика при сдвиге значительно превышают аналогичные характеристики при его растяжении-сжатии (см. рис. 5). Это обусловлено тем, что при малых значениях ЛДК углепластика при растяжении-сжатии параметры внутреннего демпфирования тест-образцов с углами

укладки слоев, равными 45° , больше, чем у тест-образцов такой же длины, составленных из слоев с углами укладки, равными 0° .

Заключение. В работе показана возможность идентификации динамических модулей упругости и характеристик демпфирования углепластика при растяжении-сжатии и сдвиге на основе исследования затухающих изгибных колебаний многослойных тест-образцов. Установлено, что при увеличении частоты деформирования в диапазоне, соответствующем частоте колебаний большинства конструкций, указанные модули упругости углепластика значительно уменьшаются. Рассмотрена возможность существенного упрощения идентификации амплитудных зависимостей характеристик демпфирования углепластика и других композиционных материалов за счет выполнения экстраполяции по одному из параметров, определяющих демпфирующие свойства материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **ASTM E756-04.** Standard test method for measuring vibration-damping properties of materials. S. 1.: ASTM Intern., 2010.
2. **Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Гюнал И., Егоров А. Г.** Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 1. Экспериментальные основы // Механика композит. материалов. 2014. Т. 50, № 2. С. 185–198.
3. **Пановко Я. Г.** Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960.
4. **Алфутов Н. А.** Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. М.: Машиностроение, 1984.
5. **Егоров А. Г., Камалутдинов А. М., Паймушин В. Н., Фирсов В. А.** Теоретико-экспериментальный метод определения коэффициента аэродинамического сопротивления гармонически колеблющейся пластины // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 2. С. 96–104.
6. **Adams R. D.** The damping characteristics of certain steels, cast Irons and other metals // J. Sound Vibrat. 1972. V. 23, N 2. P. 199–216.
7. **Шуп Т.** Решение инженерных задач на ЭВМ. М.: Мир, 1982.
8. **Клаф Р.** Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. М.: Стройиздат, 1979.
9. **Хильчевский В. В.** Рассеяние энергии при колебаниях тонкостенных элементов конструкций / В. В. Хильчевский, В. Г. Дубенец. Киев: Вища шк., 1977.
10. **Филиппов А. П.** Колебания механических систем. Киев: Наук. думка, 1965.

Поступила в редакцию 26/V 2015 г.