многие свойства оператора «нормальная скорость» сохранятся. Таким образом, на плоскую постановку задачи можно смотреть как на модель-лоцман. 4. При постоянном σ задача об эволюции ограниченного объема жидкости в точной постановке изучена в [10] (см. цитируемую там литературу). В [11] при малом числе Марангони найдено асимптотически точное решение задачи о термокапиллярном разгоне сферической капли вязкой жидкости в другой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Изд-во АН СССР, 1954.
2. **Jonescu D. G.** La théorie des fonctions analytiques et l'hydrodynamique de liquides visqueux // Тр. междунар. симпоз. «Приложения теории функций в механике сплошной среды» (17—23 сент. 1963 г., Тбилиси)/Т. 2. Механика жидкости и газа, математические методы.— М.: Наука, 1965.
3. **Белоносов С. М., Черноус К. А.** Краевые задачи для уравнений Навье — Стокса.— М.: Наука, 1985.
4. **Антановский Л. К.** Комплексное представление решений уравнений Навье — Стокса // ДАН СССР.— 1981.— Т. 261, № 4.
5. **Антановский Л. К.** Точные решения задачи со свободной границей для системы Стокса // ДАН СССР.— 1983.— Т. 270, № 5.
6. **Антановский Л. К.** Изолированность решений одной задачи со свободной границей для системы Стокса // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1983.— Вып. 60.
7. **Антановский Л. К.** Методы теории функций комплексного переменного в гидромеханике вязкой жидкости со свободными границами.— Новосибирск, 1986.— Деп. в ВИНИТИ 28.03.86, № 2161—В.
8. **Антановский Л. К.** Краевые задачи со свободными границами для системы Стокса на плоскости // ДАН СССР.— 1986.— Т. 290, № 3.
9. **Налимов В. И.** Новая модель задачи Коши — Пуассона // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1972.— Вып. 12.
10. **Солонников В. А.** О неустановившемся движении конечной массы жидкости, ограниченной свободной поверхностью // Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР.— Л., 1986.— Т. 152.
11. **Антановский Л. К., Копбосынов Б. К.** Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 2.

Поступила 18/II 1987 г.

УДК 532.526

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ЛАМИНАРНЫХ СТРУЯХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

Г. И. Бурдэ

(*Пермь*)

Рассматривается истечение ламинарных струй не смешивающихся с окружающей средой жидкостей. Предполагается, что существует гладкая поверхность раздела истекающей и внешней жидкостей, обе жидкости считаются несжимаемыми, течение в струе и во внешней жидкости рассматривается в приближении пограничного слоя. В такой постановке эта задача решалась ранее с помощью приближенных методов: в [1—4] — с применением интегрального метода, в [5—7] — асимптотического метода, основанного на разложении по степеням $1/x$.

В настоящей работе для плоских и веерных свободных и полуограниченных струй указан класс точных решений, соответствующих случаю, когда отношение динамических вязкостей жидкостей обратно отношению их плотностей. Указанный класс решений распространяется и на слабозакрученные веерные струи.

1. Движение в истекающей и внешней жидкостях описывается уравнениями в приближении пограничного слоя (величины, относящиеся к истекающей жидкости, обозначаются индексом 1, к внешней жидкости — 2):

$$u_i\partial u_i/\partial x + v_i\partial u_i/\partial y = \nu_i\partial^2 u_i/\partial y^2, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^j u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(x^j v_i) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Здесь и далее $j = 0$ для плоских струй, $j = 1$ для веерных.

Условия непрерывности скоростей и напряжений на границе раздела $y = y_*(x)$ в том же приближении представляются в виде (вследствие симметрии задачи рассматривается только верхняя полуплоскость)

$$u_1 = u_2, \quad \mu_1 \partial u_1/\partial y = \mu_2 \partial u_2/\partial y \quad \text{при} \quad y = y_*(x). \tag{1.2}$$

Условия на оси струи и на бесконечности:

$$v_1 = 0,\ \partial u_1/\partial y = 0 \text{ (свободная струя) при } y = 0, \tag{1.3}$$
$$v_1 = 0,\ u_1 = 0 \text{ (полуограниченная струя) при } y = 0;$$

$$u_2 \to 0 \text{ при } y \to \infty. \tag{1.4}$$

Условие, выражающее закон сохранения массы истекающей жидкости:

$$\int_0^{y_*(x)} u_1 dy = q, \quad q = \frac{Q}{2\rho_1} \tag{1.5}$$

(Q — постоянная, равная расходу жидкости в струе). Интегральные соотношения, необходимые для получения нетривиального решения уравнений, записаны ниже непосредственно в переменных Мизеса, которые используются для получения решения.

Перейдем к переменным Мизеса [8]: $\xi = x$, $\eta = \psi(x, y)$, где ψ — функция тока, определенная соотношениями $x^j u = \partial\psi/\partial y$, $x^j v = -\partial\psi/\partial x$. Вместо (1.1)—(1.5) имеем эквивалентную систему равенств в переменных ξ, η:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi} = \nu_i \xi^{2j} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(u_i \frac{\partial u_i}{\partial \eta}\right); \tag{1.6}$$

$$u_1 = u_2,\ \mu_1 \partial u_1/\partial \eta = \mu_2 \partial u_2/\partial \eta \text{ при } \eta = q; \tag{1.7}$$

$$\partial u_1/\partial \eta = 0 \text{ (свободная струя) при } \eta = 0, \tag{1.8}$$
$$u_1 = 0 \text{ (полуограниченная струя) при } \eta = 0.$$

Здесь q — постоянное значение функции тока, отвечающее границе раздела жидкостей и определенное в (1.5).

Для преобразования решения к исходным переменным используются соотношения

$$y = x^{-j} \int_0^{\eta} \frac{dz}{u_1(x, z)} \quad \text{при} \quad \eta \leqslant q, \tag{1.9}$$
$$y = x^{-j}\left[\int_0^{q} \frac{dz}{u_1(x, z)} + \int_q^{\eta} \frac{dz}{u_2(x, z)}\right] \quad \text{при} \quad \eta > q.$$

2. Рассмотрим свободные струи. Интегральное условие, обеспечивающее существование нетривиального решения и выражающее закон сохранения импульса, получается путем домножения (1.6) на ρ_i и интегрированием по η: от 0 до q при $i = 1$ и от q до η_∞ при $i = 2$ ($\eta_\infty(\xi)$ — значение функции тока, соответствующее $y \to \infty$ и определенное из (1.4)). После интегрирования по частям с учетом условий (1.7) приходим к соотношению

$$\rho_1 \int_0^{q} u_1 d\eta + \rho_2 \int_q^{\eta_\infty(\xi)} u_2 d\eta = \frac{J}{2} \tag{2.1}$$

(J — постоянная, равная импульсу струи).

Будем искать автомодельное решение уравнений (1.6) в виде

$$u_i = \xi^m f_i(\varphi_i) \quad (\varphi_i = (\eta + b_i)/\xi^n). \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (1.6), находим

$$m f_i - n\varphi_i f_i' = \nu_i (f_i f_i')' \quad (m = 2n - (2j + 1)). \tag{2.3}$$

Для свободной струи $n = -m$, решения уравнений (2.3) и выражения для u_i имеют вид

$$(2.4)\qquad f_i = C_i - \alpha(6\nu_i)^{-1}\varphi_i^2 \quad (\alpha = 2j+1),\quad u_i = C_i\xi^{-\alpha/3} - \alpha(6\nu_i)^{-1}\xi^{-\alpha}(\eta + b_i)^2.$$

Постоянные C_1, C_2, b_1, b_2 определяются из условий (1.7), (1.8), (2.1). Из (1.8) следует $b_1 = 0$, из (1.7)

$$(2.5)\qquad C_1 = C_2,\ q^2/\nu_1 = (q + b_2)^2/\nu_2;$$

$$(2.6)\qquad \mu_1 q/\nu_1 = \mu_2(q + b_2)/\nu_2.$$

Условия (2.5), (2.6) совместны, если выполняется соотношение

$$(2.7)\qquad \mu_2^2/\mu_1^2 = \nu_2/\nu_1 \quad \text{или} \quad \mu_2/\mu_1 = \rho_1/\rho_2.$$

При выполнении (2.7) постоянная b_2 определяется из (2.5) и выражения для u_i представляются в виде (далее в этом пункте индекс у C опускаем)

$$(2.8)\qquad u_1 = C\xi^{-\alpha/3} - \alpha(6\nu_1)^{-1}\xi^{-\alpha}\eta^2,\ u_2 = C\xi^{-\alpha/3} - \alpha(6\nu_2)^{-1}\xi^{-\alpha}[\eta + q(\lambda - 1)]^2\ (\lambda = \mu_2/\mu_1).$$

Для вычисления постоянной C возьмем интегральное условие (2.1), где функция $\eta_\infty(\xi)$, определяемая из (1.4), (2.8), имеет вид $\eta_\infty = q(1-\lambda) + (\sqrt{6C\nu_2/\alpha})\xi^{\alpha/3}$. Используя в (2.1) это выражение, формулы (2.8) и соотношение (2.7), после ряда преобразований находим

$$(2.9)\qquad C = \left(3\alpha J^2/32\nu_2\rho_2^2\right)^{1/3}.$$

Равенства (2.8), (2.9) дают решение задачи в переменных Мизеса. Для перехода к переменным x, y используем (1.9).

Из первой формулы (1.9), полагая $\eta = q$, получим выражение для полуширины струи:

$$(2.10)\qquad y_*(x) = \frac{k}{2C}x^{(j+2)/3}\ln\frac{kx^{\alpha/3}+q}{kx^{\alpha/3}-q},\quad k = \sqrt{\frac{6C\nu_1}{\alpha}}.$$

Для истекающей жидкости ($y < y_*(x)$) найдем $y(x, \eta)$ из первой формулы (2.9) и, обращая полученное соотношение, имеем

$$(2.11)\qquad \eta_1 = kx^{\alpha/3}\frac{\exp(\zeta)-1}{\exp(\zeta)+1},\quad \zeta = \sqrt{\frac{2C\alpha}{3\nu_1}}\frac{y}{x^{(j+2)/3}}.$$

Выражение для $u_1(x, y)$ находится подстановкой (2.11) в (2.8) либо с применением соотношения $x^j u = \partial\eta/\partial y$:

$$(2.12)\qquad u_1 = 4Cx^{-\alpha/3}\exp(\zeta)(\exp(\zeta)+1)^{-2}.$$

Аналогичным образом, используя вторые формулы у (1.9) и (2.8), получим при $y > y_*(x)$

$$(2.13)\qquad \eta_2 = \sqrt{\frac{6C\nu_2}{\alpha}}x^{\alpha/3}\frac{\Phi(x)\exp(\zeta/\lambda)-1}{\Phi(x)\exp(\zeta/\lambda)+1} + q(1-\lambda),$$

$$u_2 = 4Cx^{-\alpha/3}\frac{\Phi(x)\exp(\zeta/\lambda)}{[\Phi(x)\exp(\zeta/\lambda)+1]^2},\quad \Phi(x) = \left(\frac{kx^{\alpha/3}+q}{kx^{\alpha/3}-q}\right)^{(\lambda-1)/\lambda}.$$

Выражения для второй компоненты скорости можно найти из (2.11), (2.13) с помощью соотношения $v = -x^{-j}\partial\eta/\partial x$. Формулы (2.9)—(2.13) дают решение задачи (1.1)—(1.5) при условии (2.7), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Асимптотическая форма решения при $x \gg 1$ может быть сопоставлена с результатами [5] для $j = 0$ (плоская струя); соответствующие выражения совпадают при условии (2.7).

3. Рассмотрим полуограниченные струи. Интегральное условие, обеспечивающее нетривиальность решения, получим, предполагая выполненным соотношение (2.7). Домножим (1.6) при $i = 1$ на $\rho_1^2\eta$, при $i = 2$ — на $\rho_2^2(\eta + b_2)$ (b_2 определено соотношением (2.6)), проинтегрируем в соответствующих пределах и сложим полученные равенства. После интегрирования по частям с учетом (1.7) и соотношений $\rho_1^2\nu_1 = \rho_2^2\nu_2$, $\mu_2 q = \mu_1(q + b_2)$, следующих из (2.6), (2.7), имеем интегральное условие в форме

$$\rho_1^2\int\limits_0^q \eta u_1 d\eta + \rho_2^2\int\limits_q^{\eta_\infty(\xi)}(\eta + b_2)\,u_2 d\eta = \frac{E}{2} \quad (E\text{ — постоянная}). \tag{3.1}$$

Автомодельное решение в форме (2.2) определяется уравнением (2.3) при соотношении, навязываемом условием (3.1): $2n = -m$, откуда $m = -\alpha/2$, $n = \alpha/4$. Решение уравнения (2.3):

$$f_i = C_i\varphi_i^{1/2} - \alpha\,(6\nu_i)^{-1}\varphi_i^2.$$

Условия на границе раздела (1.7) приводят к соотношениям ($b_1 = 0$ вследствие (1.8)) $C_1q^{1/2} = C_2(q + b_2)^{1/2}$, $q^2/\nu_1 = (q + b_2)^2/\nu_2$, $\mu_1C_1q^{-1/2} = \mu_2C_2(q + b_2)^{-1/2}$, $\mu_1q/\nu_1 = \mu_2(q + b_2)/\nu_2$, которые совместны при (2.7). Выражения для u_1, u_2 имеют вид

$$u_1 = C_2\sqrt{\lambda}\,\xi^{-5/8\alpha}\eta^{1/2} - \alpha(6\nu_1)^{-1}\xi^{-\alpha}\eta^2, \tag{3.2}$$

$$u_2 = C_2\xi^{-5/8\alpha}(\eta + b_2)^{1/2} - \alpha\,(6\nu_2)^{-1}\,\xi^{-\alpha}(\eta + b_2)^2, \quad b_2 = q\,(\lambda - 1),$$

$$C_2 = \left(10E/3\rho_2^2\right)^{3/8}(\alpha/6\nu_2)^{5/8}$$

(формула для C_2 получена из условия (3.1)).

Используя (1.9), (3.2) для преобразования решения к исходным переменным, получим выражения

$$y_*(x) = \frac{A}{3C_2\sqrt{\lambda}}\,x^{(2j+3)/4}\left[\ln\frac{F^2 + F + 1}{(F - 1)^2} + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2F + 1}{\sqrt{3}}\right],$$

$$y \leqslant y_*\colon\ \eta_1 = A^2x^{\alpha/4}z^2, \quad u_1 = C_2\sqrt{\lambda}\,Ax^{-\alpha/2}z\,(1 - z^3),$$

$$y = \frac{2A}{C_2\sqrt{\lambda}}\,x^{(2j+3)/4}\int\limits_0^z\frac{dt}{1 - t^3};$$

$$y > y_*\colon\ \eta_2 = \lambda A^2x^{\alpha/4}s^2 + q\,(1 - \lambda), \quad u_2 = C_2\sqrt{\lambda}\,Ax^{-\alpha/2}s\,(1 - s^3),$$

$$y = \frac{2A}{C_2\sqrt{\lambda}}\,x^{(2j+3)/4}\left[\int\limits_0^{F(x)}\frac{dt}{1 - t^3} + \lambda\int\limits_{F(x)}^{s}\frac{dt}{1 - t^3}\right], \quad F = \left(\sqrt{q}/A\right)x^{-\alpha/8},$$

$$A = (6\nu_1C_2\sqrt{\lambda}/\alpha)^{1/3},$$

которые задают зависимости $\eta_i(x, y)$ и $u_i(x, y)$ в параметрической форме.

4. Рассмотрим закрученные веерные струи. В приближении «слабой закрутки» уравнения для азимутальной компоненты скорости w_i отщепляются, а интегральные условия (2.1), (3.1) сохраняют свой прежний вид. Эти условия необходимо дополнить интегральным соотношением, обеспечивающим однозначность решения уравнений для азимутальной компоненты. Запишем уравнения для w_i и граничные условия к ним в переменных Мизеса:

$$\frac{\partial w_i}{\partial\xi} + \frac{w_i}{\xi} = \nu_i\xi^2\frac{\partial}{\partial\eta}\left(u_i\frac{\partial w_i}{\partial\eta}\right); \tag{4.1}$$

(4.2) $\quad w_1 = w_2$, $\mu_1\partial w_1/\partial\eta = \mu_2\partial w_2/\partial\eta$ при $\eta = q$, $\partial w_1/\partial\eta = 0$ (свободная струя) при $\eta = 0$, $w_1 = 0$ (полуограниченная струя) при $\eta = 0$,

$$w_2 = 0 \text{ при } \eta = \eta_\infty.$$

Для вывода интегрального соотношения домножим (4.1) на ρ_i для свободной струи и на $\rho_i^2(\eta + b_i)$ для полуограниченной, затем проинтегрируем в соответствующих пределах и сложим. В дальнейших преобразованиях используем условия (4.2), а для полуограниченной струи еще и соотношения (2.6), (2.7), а также дополнительное предположение $w_i(\xi, \eta) = \sigma(\xi) u_i(\xi, \eta)$, справедливость которого подтверждается видом найденного решения. В итоге $\rho_1 \xi \int\limits_0^q w_1 d\eta + \rho_2 \xi \int\limits_q^{\eta_\infty(\xi)} w_2 d\eta = L$ (свободная струя),

$$\rho_1^2 \xi \int\limits_0^q \eta w_1 d\eta + \rho_2^2 \xi \int\limits_q^{\eta_\infty(\xi)} (\eta + b_2) w_2 d\eta = M \text{ (полуограниченная струя).}$$

Решения уравнений (4.1) ищутся в виде $w_i = \xi^l G_i(\varphi_i)$, $\varphi_i = (\eta + b_i)/\xi^n$. Опуская подробности вычислений, выпишем окончательные выражения для азимутальной компоненты скорости: $w_i = (2L/J) x^{-1} \times u_i(x, y)$ (свободная струя), $w_i = (2M/E) x^{-1} u_i(x, y)$ (полуограниченная струя).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Генкин А. Л., Кукес В. И., Ярин Л. П.** О распространении струи несмешивающихся жидкостей // Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики. — Алма-Ата: Наука, 1973.— Вып. 9.
2. **Yu H., Scheele G. F.** Laminar jet contraction and velocity distribution in immiscible liquid-liquid systems // Intern. J. Multiphase Flow.— 1975.— V. 2, N 2.
3. **Penchev I. P., Radev S. P., Rakadjiev R. K.** Velocity profile relaxation of jet in a liquid-liquid system // Теор. и прикл. механика: 3-й Национ. конг., Варна, 1977.— София: Болг. Акад. науките, 1977.— Кн. 1.
4. **Anwar M. M., Bright A. et al.** Laminar liquid jets in immiscible liquid systems // Trans. Inst. Chem. Engng.— 1982.— V. 60, N 5.
5. **Елисеев В. И.** Истечение ламинарных струй несмешивающихся несжимаемых жидкостей // Гидроаэромеханика и теория упругости.— Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1976.— Вып. 21.
6. **Елисеев В. И.** Асимптотическое решение задачи об истечении тяжелых ламинарных струй несмешивающихся жидкостей // ПМТФ.— 1977.— № 2.
7. **Елисеев В. И., Сухих Л. И., Флеер Л. А.** Асимптотический метод решения задачи об истечении радиальных ламинарных струй несмешивающихся жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1980.— № 3.
8. **Лойцянский Л. Г.** Ламинарный пограничный слой.— М.: Физматгиз, 1962.

Поступила 27/II 1987 г.

УДК 532

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКИХ ТЕЛ, ОБТЕКАЕМЫХ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. П. Михайлов

(*Новосибирск*)

При обтекании упругих покрытий тел потоком жидкости представляют интерес режимы, когда за счет энергии потока возбуждаются и (или) поддерживаются незатухающие колебания в материале покрытия. Изучение таких гидроупругих колебаний важно как для расчета на прочность конструкций, так и для решения проблемы уменьшения сопротивления обтекаемых тел. По последней проблеме проведены многочисленные в основном экспериментальные исследования. В ряде теоретических работ (см., например, [1, 2]) направление изучения, учитывающее взаимодействие вихревых структур потока с поверхностными волнами обтекаемого упругого тела, представляется наиболее перспективным.

Современная вычислительная методика и техника в принципе позволяют ставить и решать задачи о гидроупругих колебаниях в достаточно полной (нелинейной) постановке. Однако это приводит к громоздким и дорогим численным исследованиям амплитудных и энергетических параметров. Линейная постановка задачи дает возможность продвинуть аналитическое изучение вплоть до получения так называемых «критических параметров» задачи. Так, в [3] рассматривается критическая скорость несжимаемого потока, обтекающего упругое полупространство.