3. **Maxwell J. C.** Treatise on electricity and magnetism. Vol. 1. London. Dover publ., 1954.
4. **Головин А. М., Чижов В. Е.** Об эффективной вязкости суспензий.— Вестник Московск. ун-та. Сер. матем., мех., 1978, № 1.
5. **Рид Р., Шервуд Т.** Свойства газов и жидкостей. М., ИЛ, 1964.
6. **Цедерберг В. Н.** Теплопроводность газов и жидкостей. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.
7. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М., Наука, 1967.
8. **Воинов О. В., Петров А. Г.** Об устойчивости малого тела в неоднородном потоке.— ДАН СССР, 1977, т. 237, № 6.
9. **Бурдуков А. П., Валукина Н. В., Накоряков В. Е.** Особенности течения газожидкостной смеси при малых числах Рейнольдса.— ПМТФ, 1975, № 4.

УДК 532.77

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ФАЗ В ПРОЦЕССЕ ФАЗОВОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ

Ю. А. Бычков, С. В. Иорданский

(Черноголовка)

Постановка вопроса об устойчивости плоской границы раздела двух фаз в процессе фазового превращения, насколько нам известно, начинается с работы [1], где исследовалось затвердевание одного из компонентов бинарного сплава. В данной работе в основном будет рассматриваться именно эта задача, хотя наши результаты, с известными оговорками, могут быть использованы для процесса кристаллизации из переохлажденной жидкости, если этот процесс описывается задачей Стефана в изотропном приближении [2].

Работа [1] страдает существенным недостатком, так как не учитывает уменьшения скорости фронта со временем и в силу этого не дает окончательного ответа об устойчивости плоской границы раздела. В настоящей работе получена картина развития искажений плоской границы раздела во времени в линейном приближении. Кроме этого, приведены результаты исследования устойчивости сферического роста зародышей новой фазы, полученные ранее [3]. Хотя работа [3] относилась к устойчивости электронно-дырочных капель в полупроводниках, ее результаты носят общий характер и могут быть использованы для описания перечисленных выше фазовых превращений.

1. Модель затвердевания бинарного сплава. Предполагается, что в матрице некоторого материала находятся частицы другого вещества (раствора), образуя сплав. Если теплообмен между обоими веществами достаточно эффективен, то можно считать температуру равной температуре матрицы T. Предполагается, что при некоторой концентрации частиц раствора они образуют другую модификацию путем фазового перехода первого рода. Предполагается, что природа этих двух фаз несущественна, так как задача рассматривается в изотропном приближении, т. е. фактически раствор считается пересыщенным паром, а новая более плотная фаза — сконденсировавшаяся жидкость. Обычно степень пересыщения $\delta n = n - n_T$ (n_T — плотность насыщенных паров, n — плотность пара) всегда мала по сравнению с плотностью конденсированной фазы N, что и будем предполагать в дальнейшем. После стадии образования критического зародыша, которая здесь не рассматривается, процесс фазового превращения будет заключаться в диффузии частиц раствора к поверхности конденсированной фазы с последующей конденсацией на этой поверхности. Таким образом, в паре должно быть выполнено уравнение диффузии частиц раствора по матрице

$$\partial n/\partial t = D\Delta n, \tag{1.1}$$

где D — коэффициент диффузии.

На границе раздела фаз должно выполняться условие

(1.2) $$n|_S = n_T(1 + 2\sigma/NRT),$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; R — радиус кривизны поверхности [4]. Таким образом, считаем конденсацию медленной и условия близкими к термодинамическому равновесию (более подробно этот вопрос исследован в работе [3]). Другое условие следует из закона сохранения массы

(1.3) $$D\partial n/\partial \mathbf{v}|_S = v_\mathbf{v} N,$$

где $v_\mathbf{v}$ — нормальная скорость перемещения фронта конденсации, задаваемого поверхностью $S(t)$. На больших расстояниях от фронта

$$n|_{r\to\infty} = n_\infty > n_T.$$

Случай образования твердой фазы из переохлажденной жидкости отличается от вышеприведенного тем, что при переходе считается постоянным давление (а не температура матрицы T), а температура, наоборот, меняется от некоторой T_∞, меньшей температуры плавления T_M в жидкости, до температуры плавления на поверхности

(1.2а) $$T|_S = T_M(1 - 2\sigma/Nq_T R),$$

где q_T — теплота фазового превращения. Поток тепла, подводимый к границе раздела, приводит к ее движению, причем

(1.3а) $$-c\chi\partial T/\partial \mathbf{v}|_S = v_\mathbf{v} q_T,$$

где c — теплоемкость; χ — температуропроводность жидкости. В жидкости должно выполняться уравнение теплопроводности

(1.1а) $$\partial T/\partial t = \chi\Delta T.$$

Легко видеть, что уравнения (1.1а)—(1.3а) отличаются от (1.1)—(1.3) только переобозначением и соответствуют задаче Стефана [2]. Мы будем использовать обозначения (1.1)—(1.3). Результаты нашего исследования могут быть применены к конденсации пара в воздухе, если последний рассматривать как матрицу, обеспечивающую постоянство температуры.

Рассмотрим движение плоского фронта конденсации или кристаллизации. Обычно стремление иметь такой плоский фронт связано с желанием получить хороший однородный кристалл. Из-за того что $\delta n/N \ll 1$, диффузия не успевает подводить нужное количество растворенного вещества так, чтобы обеспечить движение плоского фронта с постоянной скоростью (в отличие от предположения, сделанного в [1]). Однако существует автомодельное решение $n_0 = n_0(z/2\sqrt{Dt})$, где

(1.4) $$n_0(u) = n_\infty + A\int_\infty^u e^{-x^2}dx, \quad u = \frac{z}{2\sqrt{Dt}}.$$

Граница раздела для него дается уравнением $z_0 = 2u_0\sqrt{Dt}$, причем постоянные A и u_0 находятся из граничных условий (1.2), (1.3). В пределе малых $\delta n/N$ получим ($\delta n = n_\infty - n_T$)

(1.5) $$u_0 \simeq \delta n/\sqrt{\pi}N, \quad A \simeq 2\delta n/\sqrt{\pi}.$$

Изучим поведение малых возмущений решения (1.4), рассматривая пока одну компоненту Фурье и полагая

(1.6) $$n = n_0(u) + f_k(z, t)e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}},$$

где $f_k(z, t)$— малая величина, связанная с малым изменением поверхности раздела

(1.7) $$z_0' = 2u_0\sqrt{Dt} + \zeta_k(t)\, e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}},$$

векторы $\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\rho}$ лежат в плоскости x, y, параллельной невозмущенной границе раздела. Функция $f_k(z, t)$ удовлетворяет уравнению

(1.8) $$\partial f_k/\partial t = D(\partial^2 f_k/\partial z^2 - k^2 f_k).$$

Граничные условия (1.2), (1.3) после линеаризации примут вид

(1.9) $$f_k|_{z_0} + \zeta_k \frac{\partial n_0}{\partial z}\Big|_{z_0} = n_T\gamma k^2\zeta_k = \frac{N}{D}\cdot v_k\zeta_k;$$

(1.10) $$N\frac{d\zeta_k}{dt} = \frac{N}{D}\, v_0 v_k\zeta_k + D\zeta_k \frac{\partial^2 n_0}{\partial z^2}\Big|_{z_0} + D\frac{\partial f_k}{\partial z}\Big|_{z_0},$$

где $v_0 = dz_0/dt = u_0\sqrt{D/t}$; $v_k = (n_T/N)\gamma Dk^2$, $\gamma = \sigma/NT$.

Из уравнений (1.8)—(1.10) можно получить интегральное выражение, связывающее величину f_k с ее значением f_{k0} на границе $z = z_0(t)$ и величиной $\zeta_k(t)$, если использовать преобразование Фурье по переменной z:

(1.11) $$f_k(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D}}\int_0^t \frac{e^{-Dk^2(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(z - z_0(\tau))^2}{4D(t-\tau)}\right] \times$$
$$\times \left[f_{k0}(\tau)\frac{z - z_0(\tau)}{2(t-\tau)} - N\frac{d\zeta_k(\tau)}{d\tau}\right] d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-D(k^2+q^2)t + iqz]\, f_q|_{t=0}\, dq.$$

Последнее слагаемое можно опустить, так как оно быстро стремится к нулю и не связано с существованием движущейся границы.

Уравнение (1.11) можно превратить в интегральное уравнение для определения смещения фронта ζ_k, если перейти в нем к пределу $z \to z_0(t)$. При этом нужно соблюдать известную осторожность, так как в первом члене в квадратных скобках знаменатель обращается в нуль как $(t-\tau)^{3/2}$ и сходимость возникает за счет множителя $\exp\left[-\frac{z - z_0(\tau))^2}{4D(t-\tau)}\right]$. При малых $\delta z = z - z_0(t)$ это будет существенно только вблизи $t = \tau$, и можно поэтому сингулярную часть этого члена записать приближенно как

$$\frac{f_{k0}(t)}{4\sqrt{\pi D}} \lim_{\delta z\to 0} \delta z \int_0^t \frac{\exp\left[-\frac{(\delta z)^2}{4D(t-\tau)}\right]}{(t-\tau)^{3/2}}\, d\tau \simeq \frac{f_{k0}(t)}{2}.$$

Отсюда получим окончательно при $z = z_0(t)$

(1.12) $$f_{k0}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi D}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-Dk^2(t-\tau) - \frac{(z_0(t) - z_0(\tau))^2}{4D(t-\tau)}\right] \times$$
$$\times \left[f_{k0}(\tau)\frac{z_0(t) - z_0(\tau)}{2(t-\tau)} - N\frac{d\zeta_k(\tau)}{d\tau}\right].$$

Выражая величину $f_{k0}(t)$ через $\zeta_k(t)$ согласно (1.9), получим отсюда интегральное уравнение для $\zeta_k(t)$. Возможно, однако, произвести некоторые упрощения, связанные с малостью величины $\delta n/N$ и соответственно u_0 и z_0. Для этого заметим, что

$$\frac{[z_0(t) - z_0(\tau)]^2}{4D(t-\tau)} = u_0^2\frac{\sqrt{t} - \sqrt{\tau}}{\sqrt{t} + \sqrt{\tau}} \leqslant u_0^2 \ll 1.$$

Поэтому можно опустить соответствующую экспоненту. Используя также граничное условие (1.9), получим окончательно

$$(1.13)\qquad [v_k - v_0(t)]\,\zeta_k(t) = \sqrt{\frac{D}{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-Dk^2(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau\times$$
$$\times\left\{[v_k - v_0(\tau)]\frac{u_0\zeta_k(\tau)}{\sqrt{D}(\sqrt{t}+\sqrt{\tau})} - \frac{d\zeta_k(\tau)}{d\tau}\right\}.$$

Исследуем только поведение $\zeta_k(t)$ при больших временах, причем не будем интересоваться тем, как связана произвольная постоянная, входящая в эту асимптотику с исходными начальными данными (включая $f_k(t = 0)$).

В интеграле (1.13) имеется множитель $e^{-Dk^2(t-\tau)}$, который показывает, что существенные значения $t - \tau \sim 1/Dk^2$. Пренебрегая в правой части (1.13) величиной ζ_k и вынося $d\zeta_k/d\tau$ из-под знака интеграла при значении $\tau = t$, получим, что асимптотика $\zeta_k(t \to \infty)$ определяется уравнением

$$[v_0(t) - v_k]\,\zeta_k(t) = \frac{d\zeta_k(t)}{dt}\sqrt{\frac{D}{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-Dk^2(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau,$$

и, учитывая быструю сходимость интеграла, можно положить верхний предел интеграла равным бесконечности. В результате получим

$$(1.14)\qquad \zeta_k(t) = B_k \exp\left[\int_0^t k(v_0(\tau) - v_k)\,d\tau\right].$$

Видно, что отдельная компонента Фурье всегда устойчива—поверхностное натяжение стабилизирует рост возмущения, так как для больших времен $v_0 \sim 1/\sqrt{t} \ll v_k$. Однако при фиксированном времени t показатель экспоненты в (1.14) положителен при

$$(1.15)\qquad 2u_0\sqrt{Dt} > \frac{n_T}{N}\gamma k^2 Dt,$$

т. е. при

$$(1.16)\qquad k^2 < \frac{2u_0 N}{n_T\gamma\sqrt{Dt}} = k_c^2(t).$$

Таким образом, при $t \to \infty$ опасность представляют сколь угодно малые k. Проверим теперь справедливость сделанных приближений. Прежде всего при интегрировании в (1.13)

$$\frac{t-\tau}{t} \sim \frac{1}{k_c^2 Dt} \sim \frac{n_T\gamma}{Nu_0\sqrt{Dt}} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Видно также, что так как в характерной области интегрирования $t - \tau \ll t$, то в правой части (1.13) можно действительно пренебречь членом с ζ_k, а член с $d\zeta_k/d\tau$ вынести за знак интегрирования.

Отметим здесь, что выражение для $\zeta_k(t)$ в форме (1.14) может быть получено из следующих элементарных соображений. Из-за малости величины $\delta n/N$ движение границы происходит медленно и применимо приближение квазистационарности

$$(1.17)\qquad \partial f_k/\partial t \ll k^2 D f_k,$$

т. е. вместо уравнения (1.8) имеем

$$\partial^2 f_k/\partial z^2 = k^2 f_k.$$

Очевидно, что для затухающего по z решения

$$\partial f_k/\partial z = -kf_k$$

и условие (1.10) с учетом (1.9) переходит в

$$\frac{d\zeta_k(t)}{dt} = k(v_0 - v_k)\zeta_k - \frac{u_0}{D}(v_0 - v_k)\zeta_k. \tag{1.18}$$

Далее учтем, что при $k \sim k_c$ первый член в правой части (1.18) $\sim t^{-3/4}$, а второй порядка $(\delta n)^2/Nt$, откуда получаем снова при $t \to \infty$ $\zeta_k(t)$ в виде (1.14). Используя полученный результат, можно проверить выполнение условия квазистационарности (1.17).

Таким образом, окончательно получаем следующее выражение для смещения границы раздела:

$$\zeta(\rho, t) = \int B_k e^{ik\rho} \exp\left[\int_0^t k(v_0(\tau) - v_k)\,d\tau\right]\frac{d^2k}{(2\pi)^2}, \tag{1.19}$$

где ρ — вектор, параллельный границе раздела фаз. Так как при больших временах существенны малые k, то при значении B_k, не имеющем особенностей в этой области k, получим

$$\zeta(\rho, t) \sim B_0 \int_0^\infty J_0(k\rho)\, e^{\varphi(k,t)} k\,dk, \tag{1.20}$$

где $\varphi(k, t) = k\left(2u_0\sqrt{Dt} - \frac{n_T}{N}\gamma k^2 Dt\right)$. Вычисляя интеграл по k при больших t методом перевала, получим окончательно

$$\zeta(\rho, t) \sim \frac{B_0}{\gamma^{3/4}(Dt)^{5/8}}\left(\frac{N^2\delta n}{n_T^3}\right)^{1/4} \exp\left[\alpha\left(\frac{Dt}{\gamma^2}\right)^{1/4}\right] J_0\left(\frac{\beta\rho}{(\gamma^2 Dt)^{1/4}}\right), \tag{1.21}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\left[\frac{32(\delta n)^3}{27\sqrt{\pi n_T}N^2}\right]^{1/2}; \quad \beta = \left(\frac{2\delta n}{3\sqrt{\pi n_T}}\right)^{1/2};$$

$J_0(y)$— функция Бесселя нулевого порядка. Разумеется, выбор начала координат в базовой плоскости произволен. В общем случае форма поверхности должна состоять из случайно расположенных возмущений подобного вида.

Таким образом, плоская граница раздела фаз оказывается неустойчивой и при больших временах возмущение растет не по простому экспоненциальному закону, а как экспонента от $t^{1/4}$. Отметим, что пространственный масштаб возмущения в плоскости границы раздела в момент времени, когда возмущения становятся значительными, $\rho \sim r_{кр} n_T/\delta n$, где $r_{кр} = 2\sigma/T\delta n$ — так называемый критический радиус зародыша [4].

2. Неустойчивость сферического роста зародышей. Эта задача, рассматривавшаяся в [3], несколько проще предыдущей и в основе ее решения лежит также малость $\delta n/N$, т. е. сравнительно медленное движение границы раздела фаз по сравнению с процессом диффузии. Сферический рост зародыша описывается уравнением диффузии

$$\partial n/\partial t = D\Delta n, \tag{2.1}$$

в котором из-за медленности движения границы можно пренебречь $\partial n/\partial t$, так что ($\delta n = n_\infty - n_T$)

$$n_0 = n_\infty - \frac{\delta n}{r} R(t), \tag{2.2}$$

где $R(t)$ — радиус зародыша и использовано граничное условие $n|_S = n_\infty - \delta n$. С учетом граничных условий получим

$$dR(t)/dt = D\delta n/NR. \tag{2.3}$$

Так как скорость диффузии на расстоянии порядка R есть $v_D \sim D/R$, то действительно отношение

$$\frac{1}{v_D}\frac{dR}{dt} \sim \frac{\delta n}{N} \ll 1.$$

При отклонении формы зародыша от сферической для плотности пара и радиуса капли положим

$$n = n_0(r) + f(\Omega, t, r), \quad R' = R(t) + \zeta(\Omega, t).$$

Пренебрегая временной производной от f в уравнении диффузии (2.1), получим

$$f = \sum_{l,m} A_{lm} Y_{lm}(\Omega)\, r^{-l-1}, \tag{2.4}$$

где $Y_{lm}(\Omega)$ — сферические гармоники. Линеаризуя граничные условия по величине ζ, получим

$$\zeta_{lm}\frac{\partial n_0}{\partial r}\bigg|_R + A_{lm} = \frac{n_T\gamma(l-1)(l+2)}{R^2(t)}\zeta_{lm}; \tag{2.5}$$

$$N\frac{d\zeta_{lm}}{dt} = D\zeta_{lm}\frac{\partial^2 n_0}{\partial r^2}\bigg|_R - D\frac{(l+1)}{R^{l+2}}A_{lm}, \tag{2.6}$$

причем

$$\zeta(\Omega) = \sum_{l,m} \zeta_{lm}(t)\, Y_{lm}(\Omega).$$

Окончательно имеем

$$\frac{1}{\zeta_{lm}}\frac{d\zeta_{lm}}{dt} = \frac{(l-1)}{R^2}D\frac{\delta n}{N} - \frac{n_T\gamma D(l^2-1)(l+2)}{NR^3}. \tag{2.7}$$

Для того чтобы судить о неустойчивости, нужно сравнить рост отклонения ζ с ростом самой капли $R(t)$, описываемым уравнением (2.3). Поэтому инкремент, характеризующий неустойчивость, будет

$$\lambda_l = \frac{d}{dt}\ln\frac{\zeta(t)}{R(t)} = \frac{D(l-2)\delta n}{R^2 N} - \frac{n_T\gamma D(l^2-1)(l+2)}{NR^3}. \tag{2.8}$$

Из этой формулы видно, что с ростом зародыша возмущения со все большими l теряют устойчивость, так как при больших радиусах поверхностное натяжение становится неэффективным. Однако впервые неустойчивость возникает для $R = R_c$ при $l = 3$, причем

$$R_c = 40\gamma n_T/\delta n. \tag{2.9}$$

Можно показать, что

$$\zeta \sim \zeta_0[R(t)/R_c]^{l-1}, \tag{2.10}$$

где ζ_0 порядка начального возмущения, которое неизвестно. Так как степень быстро растет с ростом l, а возмущения, нарушающие сферическую форму, всегда имеются в реальных условиях, то можно считать, что характерный масштаб образующихся капелек должен быть $R \sim R_c$ (см. также [5]).

В заключение отметим, что основной механизм рассмотренной выше неустойчивости состоит в том, что выдвинутые вперед участки фронта получают больший диффузионный поток и в силу этого растут быстрее.

Таким образом, показано, что как плоский фронт новой фазы, так и сферический рост отдельного зародыша являются неустойчивыми. В случае плоского участка фронта конечных размеров можно добиться устойчивости и соответственно выпадения однородной новой фазы, если выбрать эти размеры достаточно малыми при заданном градиенте (обрезая малые k).

Данная постановка задачи является весьма общей и может быть применена к достаточно широкому кругу процессов, связанных с образованием новой фазы (в пренебрежении анизотропией) при фазовых переходах первого рода, сюда, например, относятся: рост кристаллов, переход жидкость — пар. В частности, рассмотренный механизм позволяет объяснить малые размеры электронно-дырочных капель, образующихся в полупроводниках [3].

Авторы выражают благодарность А. М. Косевичу, обратившему их внимание на эту задачу.

Поступила 3 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sekerka R. F.** Application of the time dependent theory of interface stability to an isothermal phase transformations.— J. Phys. Chem. Solids, 1967, vol. 28, N 6.
2. **Карслоу Т., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1959.
3. **Бычков Ю. А., Иорданский С. В., Рашба Э. И.** Неустойчивость и движение электронно-дырочных капель.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, вып. 4(10).
4. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Статистическая физика. Ч. 1. М., Наука, 1976.
5. **Mullins W. W., Sekerka R. F.** Morphological stability of a particle growing by diffusion or heat flow.— J. Appl. Phys., 1963, vol. 34, p. 323.

УДК 534.222.2

ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ УДАРНЫХ ВОЛН ПРИ ПОДВОДНЫХ ВЗРЫВАХ СПИРАЛЬНЫХ ЗАРЯДОВ

В. К. Кедринский

(*Новосибирск*)

Как известно, взрывные источники звука на протяжении многих лет привлекают внимание исследователей в качестве основного элемента различного рода гидролокационных устройств, предназначенных для создания квазитональных большой длительности и акустической мощности направленных излучений (посылок). Диапазон их довольно широк и включает искровые разрядные генераторы [1], конденсированные жидкие [2] и твердые ВВ [3—5], газовые взрывчатые смеси [6—8] и эффекты генерации ударных волн схлопывающимися полостями [9, 10]. Сравнение интегральных энергетических параметров излучений некоторых взрывных источников звука в воде приведено в [11], спектральные характеристики экспериментально исследованы в [12—16].

Естественно, что взрывные источники обладают достаточной мощностью и их излучение регистрируется на больших расстояниях. Однако этого качества оказывается недостаточно для широкого круга задач геофизических исследований, акустической навигации, а также научных исследований процессов распространения ударных волн в океане. Возникают такие проблемы, как направленность и относительно большая длительность сигнала, что, вообще говоря, нетривиаль-