2. **Казаков М. В.** Применение поверхностно-активных веществ при тушении пожаров.— М.: Стройиздат, 1977.
3. **Гельфанд Ф. М.** Предупреждение аварий при взрывных работах в угольных шахтах.— М.: Недра, 1974.
4. **Гельфанд Б. Е., Губанов А. В., Тимофеев Е. И.** Особенности распространения ударных волн в пенах // ФГВ.— 1981.— № 4.
5. **Кузнецов Н. М., Тимофеев В. И., Губанов А. В.** Анализ распространения ударных волн в термодинамически равновесной пене // ФГВ.— 1986.— № 5.
6. **Кудинов В. М., Гельфанд Б. Е., Губанов А. В., Паламарчук Б. И.** Ударные волны в газожидкостных средах пенистой структуры // ПМ.— 1977.— Т. 13, № 3.
7. **Borisov A. A., Gelfand B. E., Kudinov V. M. et al.** Shock waves in water foams // Acta Astron.— 1978.— V. 5, N 4.
8. **Kudinov V. M., Palamarchuk B. I., Vakhnenko V. A. et al.** Relaxation phenomena in a foamy structure // Progr. in Astron. and Aeron.— 1983.— V. 87.— P. 96.
9. **Паламарчук Б. И., Малахов А. Т.** Влияние релаксационных процессов на затухание ударной волны в водных пенах // Сб. докл. IV Междунар. симп. по обработке матер. взрывом.— Готвальдов, 1979.
10. **Krasinski J. S., Khosla A., Ramesh V.** Dispersion of shock waves in liquid foams of high dryness fraction // Arch. Mech.— 1978.— V. 30, N 4—5.
11. **Patz G., Smeets G.** Pressure increase in twophase media behind air shock waves and by shock waves acceleration pistons // Proc. 15th Intern. Symp. on Shock Tubes and Shock Waves, Berkeley, Calif., 1985.
12. **Weaver P. M., Pratt N. H.** An experimental investigation of the mechanisms of shock waves-aquelus foam interaction // Proc. 15th Intern. Symp. on Shock tubes and Shock Waves, Berkeley, Calif., 1985.
13. **Канн К. Б.** Капиллярная гидродинамика пен.— Новосибирск: Наука, 1989.
14. **Умнов А. Е., Голик А. Е., Палеев Д. Ю., Шевцов Н. Р.** Предупреждение и локализация взрывов в подземных условиях.— М.: Недра, 1990.
15. **Ikui J., Matsuo K., Yamamoto Y.** Fast-acting valves for use in shock tubes // Bull. of the JSME.— 1977.— V. 20, N 141.
16. **Curzon F. L., Phillips M. G.** Low attenuation shock tube. Driving mechanism and diaphragm characteristics // Canad. J. Phys.— 1971.— V. 49, N 15.

г. Москва *Поступила 4/VII 1990 г., в окончательном варианте — 4/XII 1990 г.*

УДК 517.958 : 532.5

А. А. Коробкин

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ НАД УСТУПОМ

В приближении Буссинеска решается плоская линейная задача о движении слабо стратифицированной идеальной жидкости в полигональной области. Движение жидкости вызвано колебаниями по заданному закону участков границы. Задачи такого типа изучались для вертикальных барьеров в канале в [1, 2]. В настоящей работе исследуются области течения специального вида — инвариантные относительно растяжения в одном из направлений (канал с уступом, барьер конечной толщины и т. д.). Предлагается способ решения таких задач в квадратурах.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоское неустановившееся движение экспоненциально стратифицированной жидкости, заполняющей область Ω. Первоначально жидкость покоится, граница области течения состоит из отрезков горизонтальных $\partial\Omega_H$ и вертикальных $\partial\Omega_v$ прямых, причем все вертикальные участки границы лежат на одной прямой L. Выбираем декартову систему координат x, y таким образом, что ось y направлена по прямой L в сторону, противоположную направлению ускорения свободного падения $\mathbf{g}$. Обозначим части прямой L, лежащие в Ω, через L_Ω; ясно, что $L_\Omega = \partial\Omega_v \cup \Gamma$, где точки Γ являются внутренними точками области течения. Движение жидкости вызвано колебаниями по заданному закону участков $\partial\Omega_v$, участки $\partial\Omega_H$ остаются во все время движения неподвижными. Требуется описать движение жидкости при следующих предположениях: 1) амплитуда колебаний участков $\partial\Omega_v$ мала по сравнению с характерным линейным размером задачи D; 2) вертикальный размер, на котором плотность жидкости меняется существенно, намного больше D; 3) справедливо приближение Буссинеска.

Сделанные предположения позволяют использовать линейную теорию движения слабо стратифицированной жидкости. В безразмерных переменных функция тока $\psi(x, y, t)$ (t — время) удовлетворяет соотношениям [3]

$$
\begin{gathered}
\Delta\psi_{tt} + \psi_{xx} = 0 \text{ в } \Omega,\\
\psi = 0 \text{ на } \partial\Omega_H,\ \psi = f(x, t) \text{ на } \partial\Omega_v,\\
\psi = \psi_t = 0 \text{ при } t = -0,\\
\psi \to 0 \text{ при } x^2 + y^2 \to \infty.
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Решение начально-краевой задачи (1.1) будем искать в классе функций, описывающих движение жидкости с конечной кинетической энергией. Это условие включает в себя ограничения на поведение решения вблизи заострений границы и на бесконечности. Предполагаем, что при $t > 0$ функция $f(x, t)$ абсолютно интегрируемая по t при любом y.

Область Ω можно представить как объединение полуполос конечной (или бесконечной) глубины, вертикальные границы которых лежат на прямой L. Поставленную задачу можно решить для каждой такой полуполосы отдельно, например, с помощью метода разделения переменных, если известно значение функции тока на ее вертикальной границе (на горизонтальных границах полуполос $\psi = 0$). Поэтому задача будет решена в основном, если функция $\psi(0, y, t)$ определена на участках Γ.

2. Метод решения. Доопределим искомую функцию тока ψ и известную функцию f при $t < 0$ так, что $\psi = 0$, $f = 0$ при отрицательных временах, и применим к соотношениям (1.1) преобразование Фурье по t. Получим

$$
\begin{gathered}
(1 - \omega^2)\,\psi^F_{xx} - \omega^2\psi^F_{yy} = 0 \quad \text{в } \Omega,\\
\psi^F = 0 \text{ на } \partial\Omega_H,\ \psi^F = F(y, \omega) \text{ на } \partial\Omega_v.
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Здесь

$$
\psi^F(x, y, \omega) = \int\limits_0^\infty \psi(x, y, t)\, e^{-i\omega t}dt; \quad F(y, \omega) = \int\limits_0^\infty f(y, t)\, e^{-i\omega t}dt.
$$

Соотношения (2.1) следует рассматривать отдельно при $|\omega| > 1$ (эллиптический случай) и $|\omega| < 1$ (гиперболический). В первом случае сделаем замену переменных $x = (1 - \omega^{-2})^{1/2}x_1$, $y = y_1$ и искомой функции $\psi^F(x_1(1 - \omega^{-2})^{1/2}, y_1, \omega) = \Psi(x_1, y_1, \omega)$. Замечательным свойством указанных областей является их инвариантность относительно такого типа растяжения.

Функция Ψ есть решение ($|\omega| > 1$) задачи Дирихле

$$
\Delta\Psi = 0 \text{ в } \Omega,\ \Psi = 0 \text{ на } \partial\Omega_H,\ \Psi = F(y_1, \omega) \text{ на } \partial\Omega_v
$$

и может быть построена в квадратурах с помощью конформного отображения Ω на некоторую каноническую область. Так как область Ω полигональная, то такое отображение всегда можно построить с помощью интеграла Шварца — Кристоффеля [4], если Ω — односвязная область. Неодносвязность Ω означает, что в жидкости находятся плавающие вертикальные пластины нулевой толщины, закрепленные вдоль линии L. Ниже ограничимся односвязными областями течения, однако важное свойство независимости конформного отображения от параметра ω справедливо и в общем случае.

Пусть аналитическая функция $z = z(\zeta)$ ($z = x_1 + iy_1$, $\zeta = \xi + i\eta$) осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости $\eta > 0$ на область Ω с сохранением направления обхода границы. При этом $x_1 = x_1(\xi, \eta)$, $y_1 = y_1(\xi, \eta)$. Введем новые функции

$$
W(\xi, \eta, \omega) = \Psi[x_1(\xi, \eta), y_1(\xi, \eta), \omega],\ W_0(\xi, \omega) = F[y_1(\xi, 0), \omega]
$$

и заметим, что W есть решение задачи

$$\Delta W = 0\ (\eta > 0),\ W = W_0(\xi,\ \omega)\ (\eta = 0,\ \xi \in \Gamma_v);$$
$$W = 0\ (\eta = 0,\ \xi \in R^1 \backslash \Gamma_v)$$

(Γ_v — прообраз участков границы $\partial\Omega_v$ при конформном отображении). Если $\partial\Omega_v$ состоит из более чем одного участка, то Γ_v — несвязное множество. В любом случае [5]

$$W(\xi, \eta, \omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma_v} W_0(\xi_1, \omega) \frac{\eta d\xi_1}{(\xi - \xi_1)^2 + \eta^2}.$$

Обратное отображение $\zeta = \zeta(z)$, $\xi = \xi(x_1,\ y_1)$, $\eta = \eta(x_1,\ y_1)$ позволяет записать последнюю формулу относительно функции Ψ:

$$\Psi(x_1, y_1, \omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\partial\Omega_v} F(y_2, \omega) \frac{\eta(x_1, y_1)\, \xi_{y_1}(0, y_2)\, dy_2}{[\xi(x_1, y_1) - \xi(0, y_2)]^2 + \eta^2(x_1, y_1)}.$$

Но функцию Ψ нам достаточно знать при $x_1 = 0$, $y_1 \in \Gamma$, что соответствует в исходной задаче участкам Γ. Введем обозначения $\lambda(y) = \xi(0,\ y)$, $\nu(y) = \eta(0,\ y)$, получим

$$\Psi(0, y_1, \omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\partial\Omega_v} F(y_2, \omega) \frac{\nu(y_1)\lambda'(y_2)\, dy_2}{[\lambda(y_1) - \lambda(y_2)]^2 + \nu^2(y_1)} \quad (y_1 \in \Gamma). \tag{2.2}$$

Напомним, что участки Γ и $\partial\Omega_v$ не пересекаются, поэтому подынтегральная функция может иметь особенности только в граничных точках Γ.

Предположим, что $\Psi(0,\ y_1,\ \omega)$ известна для всех значений параметра ω, тогда

$$\psi(0, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(0, y, \omega)\, e^{i\omega t} d\omega.$$

Но по построению $\psi(0,\ y,\ t) \equiv 0$ при $t < 0$, что возможно, если $\Psi(0,\ y,\ \omega)$ может быть аналитически продолжена в область $\operatorname{Im}\omega < 0$, причем это продолжение не имеет особых точек. Аналитическое продолжение $\Psi(0,\ y,\ \omega)$ эквивалентно в силу (2.2) аналитическому продолжению функции $F(y,\ \omega)$. Но эта функция аналитическая при $\operatorname{Im}\omega < 0$ по построению. Следовательно, формула (2.2) определяет аналитическую при $\operatorname{Im}\omega < 0$ функцию $\Psi(0,\ y,\ \omega)$. При этом $\Psi(0,\ y,\ \omega)$ для $\operatorname{Im}\omega = 0$, $|\operatorname{Re}\omega| < 1$ есть предел аналитической функции (2.2) при $\operatorname{Im}\omega \to -0$, причем предельный переход является непрерывным. Тем самым формула (2.2) определяет $\Psi(0,\ y,\ \omega)$ при $\omega \in R^1$. Применение обратного преобразования Фурье окончательно решает задачу

$$\psi(0, y, t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\partial\Omega_v} f(\alpha, t) \frac{\nu(y)\, \lambda'(\alpha)\, d\alpha}{[\lambda(y) - \lambda(\alpha)]^2 + \nu^2(y)} \quad (y \in \Gamma). \tag{2.3}$$

Таким образом, значение функции тока на участках Γ точно такое же, как и без учета стратификации.

3. Установившийся режим. Формула (2.3) остается в силе, если $f(y,\ t)$ не убывает с ростом t. В частности, при $f(y,\ t) = a(y)e^{i\omega_0 t}$ находим $\psi(0,\ y,\ t) = A(y)e^{i\omega_0 t}$, где $A(y) = a(y)$ при $y \in \partial\Omega_v$ и

$$A(y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\partial\Omega_v} a(\alpha) \frac{\nu(y)\lambda'(\alpha)\, d\alpha}{[\lambda(y) - \lambda(\alpha)]^2 + \nu^2(y)} \quad (y \in \Gamma). \tag{3.1}$$

Последнее замечание дает ответ на вопрос о способе решения задач о генерации и распространении периодических внутренних волн в присутствии препятствий специального вида. А именно: если на вертикальных твердых границах заданы амплитуда колебаний $a(y)$ и частота колебаний ω_0, то по формуле (3.1) определяется амплитуда колебаний на участках Γ. После этого в полуполосах, объединение которых дает область течения Ω, решается либо задача Дирихле для эллиптического уравнения (если $|\omega_0| > 1$), либо краевая задача для гиперболического уравнения ($|\omega_0| < 1$). Они решаются методом интегральных преобразований или методом разделения переменных. Заметим, что решения стационарных задач получены как пределы решений нестационарных начально-краевых задач при больших временах.

Частный случай областей указанного класса — односвязные области, симметричные относительно прямой L. Например, Ω есть прямолинейная полоса с вертикальным барьером на дне. По отношению к предлагаемому способу этот случай является вырожденным, так как для симметричных областей рассматриваемая линейная задача может быть модифицирована и сведена к задачам со смешанными краевыми условиями в каждой полуполосе [1].

4. **Примеры.** В качестве примера определим функцию $A(y)$ согласно формуле (3.1) в задаче о периодических внутренних волнах над уступом. Область течения Ω есть вся плоскость (x, y) без четвертого квадранта, т. е. $\partial\Omega_H = \{y = 0,\ x > 0\}$, $\partial\Omega_v = \{x = 0,\ y < 0\}$, $\Gamma = \{x = 0,\ y > 0\}$, $L = L_\Omega = \{x = 0,\ -\infty < y < +\infty\}$. Конформное отображение $\zeta(z)$ области течения на верхнюю полуплоскость имеет простой вид $\zeta(z) = z^{2/3}$, $0 < \arg z < 3\pi/2$. Соответственно $\lambda(y) = y^{2/3}/2$ $(y > 0)$ и $\lambda(y) = -y^{2/3}$ $(y < 0)$, $\nu(y) = \sqrt{3}y^{2/3}/2$ $(y > 0)$. Пусть $a(y) = \delta(y + 1)$, $\delta(y)$ — дельта-функция Дирака (расстояние от источника возмущений до края уступа принимается за характерный линейный размер D). Формула (3.1) дает распределение амплитуд периодических колебаний на Γ:

$$A_1(y) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \frac{y^{2/3}}{y^{4/3} + y^{2/3} + 1} \quad (y > 0).$$

Видно, что функция тока непрерывна на L, а поле скоростей имеет особенность вблизи края уступа вида $O(r^{-1/3})$, где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $r \to 0$, и квадратично интегрируемо при $y \to +\infty$, $x = 0$.

Рассмотрим ту же задачу, когда Ω есть плоскость (x, y) с вертикальным барьером $\partial\Omega_v = \{x = \pm 0,\ y < 0\}$. Тогда $\partial\Omega_H = \varnothing$, $\Gamma = \{x = 0,\ y > 0\}$. Конформное отображение Ω на верхнюю полуплоскость имеет вид $\zeta(z) = e^{i\pi/4}z^{1/2}$, $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$. В данной задаче $\partial\Omega_v$ состоит из двух частей, отвечающих двум сторонам пластины, поэтому $\lambda(y) = \sqrt{-y}$ при $x = +0$, $y < 0$ и $\lambda(y) = -\sqrt{-y}$ при $x = -0$, $y < 0$, $\lambda(y) = 0$ при $y > 0$, $\nu(y) = \sqrt{y}$ при $y > 0$. Формула (3.1) дает

$$A(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} a^-(\alpha) \frac{\sqrt{y}}{2} \frac{d\alpha}{\sqrt{-\alpha}\,(y - \alpha)} + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{-\infty} a^+(\alpha) \left(-\frac{\sqrt{y}}{2}\right) \frac{d\alpha}{\sqrt{-\alpha}\,(y - \alpha)}$$
$$(y > 0)$$

($a^-(y)$, $a^+(y)$ — амплитуды колебаний левой и правой сторон барьера). Отсюда

$$A(y) = \frac{\sqrt{y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} [a^+(\alpha) + a^-(\alpha)] \frac{d\alpha}{\sqrt{|\alpha|}\,(y - \alpha)} \qquad (y > 0).$$

Видно, что $A(y) \equiv 0$ при $a^+(\alpha) = -a^-(\alpha)$, т. е. когда меняется толщина барьера при колебаниях. Чтобы иметь возможность сравнить функции $A(y)$ в двух рассмотренных примерах, полагаем $a^-(y) = \delta(y + 1)$, $a^+(y) = 0$, тогда

$$A_B(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{y}}{y + 1}.$$

Индекс B показывает, что функция $A_B(y)$ соответствует задаче с вертикальным барьером. Она обладает теми же свойствами, что и $A_1(y)$ в примере с уступом. Обе эти функции достигают своих максимальных значений при $y = 1$, т. е. в точке, отстоящей от верхнего края препятствия на таком же расстоянии, что и источник, причем $A_1(1) = (3^{3/2}\pi)^{-1}$, $A_B(1) = (4\pi)^{-1}$. Кроме того, при $y > 0$ $0 < A_1(y) < A^B(y)$, что устанавливается непосредственной проверкой.

Для уступа и барьера движение жидкости в левой части области течения ($x < 0$) описывается одной и той же краевой задачей, за исключением значений функции тока при $x = 0$, $y > 0$. Полученные неравенства позволяют ожидать, что при одинаковой интенсивности источника возмущений амплитуды внутренних волн для барьера будут больше, чем для уступа. Наличие горизонтальных границ приводит к уменьшению амплитуды внутренних волн.

5. Дифракция вынужденных внутренних волн на уступе. Рассмотрим модельную начально-краевую задачу

$$\Delta\psi_{tt} + \psi_{xx} = \delta'(y)a(x - x_0)H(t)\sin(\omega_0 t) \text{ в } \Omega, \tag{5.1}$$
$$\psi = 0 \text{ на } \partial\Omega,\ \psi = \psi_t = 0 \text{ при } t = -0,$$

которая в приближении Буссинеска описывает распространение вынужденных внутренних волн над уступом. Здесь Ω — вся плоскость (x, y) без четвертого квадранта $(x > 0,\ y < 0)$; $H(t)$ — функция Хевисайда ($H(t) = 1$ при $t \geqslant 0$ и $H(t) = 0$ при $t < 0$); $a(x)$ — гладкая финитная функция ($a(x) \equiv 0$ при $|x| \geqslant c > 0$, $-x_0 > c$). Внутренние волны генерируются диполями, распределенными на интервале $y = 0$, $x_0 - c < x < x_0 + c$ с плотностью $a(x - x_0)$. Генератор волн начинает действовать в момент $t = 0$, его интенсивность изменяется периодически с частотой ω_0 ($0 < \omega_0 < 1$). Требуется построить главный член асимптотики решения задачи (5.1) при больших временах.

В том случае, когда область, занятая жидкостью, есть вся плоскость ($\Omega = R^2$), решение задачи (5.1) обозначим через $\psi^{(1)}(x, y, t)$. Ясно, что при $t > 0$

$$\psi^{(1)}(x, y, t) = \psi_c^{(1)}(x, y)\sin(\omega_0 t) + \psi_H^{(1)}(x, y, t), \tag{5.2}$$

где $\psi_c^{(1)}(x, y)$ описывает периодический режим движения жидкости и удовлетворяет неоднородному гиперболическому уравнению

$$(1 - \omega_0^2)\frac{\partial^2\psi_c^{(1)}}{\partial x^2} - \omega_0^2\frac{\partial^2\psi_c^{(1)}}{\partial y^2} = a(x - x_0)\,\delta'(y), \tag{5.3}$$

а $\psi_H^{(1)}(x, y, t)$ описывает нестационарную поправку, обусловленную несогласованностью периодического решения (первое слагаемое в (5.2)) с начальными условиями. Причем $\psi_H^{(1)}(x, y, t) \to 0$ при $t \to \infty$. Решение уравнения (5.3) дается формулой Даламбера и имеет вид

$$\psi_c^{(1)}(x, y) = -\frac{1}{2\omega_0^2}\left[a\left(x - x_0 + \frac{\sqrt{1-\omega_0^2}}{\omega_0}y\right) + a\left(x - x_0 - \frac{\sqrt{1-\omega_0^2}}{\omega_0}y\right)\right].$$

Носитель гладкой функции $\psi_c^{(1)}(x, y)$ состоит из двух пересекающихся полос

$$S^{\pm} = \left\{x, y \,\middle|\, \left|x - x_0 \pm \frac{\sqrt{1-\omega_0^2}}{\omega_0}y\right| < c\right\},$$

из них только полоса S^+ пересекает границу исходной области Ω. Это пересечение происходит по участку

$$S_\Omega^+ = \left\{x, y \,\middle|\, x = 0,\ \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\omega_0^2}}(x_0 - c) < y < \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\omega_0^2}}(x_0 + c)\right\},$$

на котором

$$\psi_c^{(1)}(x, y) = -\frac{1}{2\omega_0^2} a\left(\frac{\sqrt{1-\omega_0^2}}{\omega_0} y - x_0\right).$$

Решение исходной задачи представим как

$$\psi(x, y, t) = \psi_c^{(1)}(x, y)\sin\omega_0 t + \psi_\Gamma(x, y, t) + \psi_I(x, y, t), \tag{5.4}$$

где $\psi_\Gamma(x, y, t)$ обеспечивает выполнение граничных, а $\psi_I(x, y, t)$ — начальных условий. Начально-краевые задачи для этих поправочных функций запишутся в форме

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\psi_\Gamma + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\Gamma = 0 \text{ в } \Omega, \tag{5.5}$$

$$\psi_\Gamma = \frac{1}{2\omega_0^2} a\left(\frac{\sqrt{1-\omega_0^2}}{\omega_0} y - x_0\right)\sin(\omega_0 t) \text{ при } x = 0,\ y < 0,$$

$$\psi_\Gamma = 0 \quad \text{при } x > 0,\ \ y = 0, \quad \psi_\Gamma = \frac{\partial}{\partial t}\psi_\Gamma = 0 \text{ при } t = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\psi_I + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_I = 0 \text{ в } \Omega,\ \psi_I = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

$$\psi_I = 0,\ \frac{\partial\psi_I}{\partial t} = -\omega_0\psi_c^{(1)}(x, y) \text{ при } t = 0.$$

В каждой точке области, занятой жидкостью, $\psi_I(x, y, t) \to 0$ при $t \to \infty$, поэтому главный член асимптотики решения задачи (5.1) при больших временах определяется первыми двумя слагаемыми в представлении (5.4). Начально-краевая задача для $\psi_\Gamma(x, y, t)$ имеет вид (1.1), поэтому ее можно решить методом, изложенным в пп. **2**, **3**. В частности, при больших временах асимптотика решения задачи (5.5) представляется как

$$\psi_\Gamma(x, y, t) = \psi_\Gamma^{(c)}(x, y)\sin(\omega_0 t) + o(1),$$

где $\psi_\Gamma^{(c)}(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\Gamma^{(c)} = \frac{\omega_0^2}{1-\omega_0^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi_\Gamma^{(c)}, \tag{5.6}$$

решение которого строится отдельно в левой части области течения ($x < 0$, $-\infty < y < +\infty$) и в правой ($x > 0$, $y > 0$). Причем на границе левой части области ($x = -0$) требуется выполнение граничных условий

(5.7)

$$\psi_\Gamma^{(c)} = \frac{1}{2\omega_0^2} a\left(\frac{\sqrt{1-\omega_0^2}}{\omega_0} y - x_0\right) (x = -0, y < 0),\ \psi_\Gamma^{(c)} = A(y)\ (x = -0, y > 0),$$

а на границе правой — условий

$$\psi_\Gamma^{(c)} = A(y) \quad (x = +0, y > 0), \quad \psi_\Gamma^{(c)} = 0 \quad (x > 0, y = 0).$$

Здесь

$$A(y) = -\frac{n_0^2 y^{2/3}}{2\sqrt{3}\pi\omega_0^2}\int_{-c}^{c}\frac{a(\sigma)\, d\sigma}{(\sigma + x_0)^{1/3}\{n_0^4(\sigma + x_0)^{4/3} + n_0^2(\sigma + x_0)^{2/3} y^{2/3} + y^{4/3}\}};$$

$$n_0 = \omega_0^{1/3}/(1-\omega_0^2)^{1/6}.$$

Если расстояние от генератора внутренних волн до уступа велико или размер носителя функции $a(x)$ мал, т. е. величина $c/|x_0|$ намного меньше единицы, то справедлива простая асимптотическая формула

$$A(y) = \left(2\sqrt{3}\pi\omega_0^2|x_0|\right)^{-1}\frac{\zeta^2}{\zeta^4+\zeta^2+1}\int_{-c}^{c}a(\sigma)\,d\sigma+\ldots,\ \zeta=\left[y\sqrt{1-\omega_0^2}/\omega_0|x_0|\right]^{1/3}.$$

Отсюда следует, что $A(y) = O(|x_0|^{-1})$ при $|x_0| \to \infty$. Решение краевой задачи (5.6), (5.7) можно записать в квадратурах с помощью метода интегральных преобразований. Способ однозначного выделения решения этой задачи указан в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Габов С. А., Крутицкий П. А.** О нестационарной задаче Ларсена // ЖВММФ.— 1987.— Т. 2, № 8.
2. **Крутицкий П. А.** Малые нестационарные колебания вертикальных пластин в канале со стратифицированной жидкостью //ЖВММФ.— 1988.— Т. 28, № 12.
3. **Габов С. А., Свешников А. Г.** Задачи динамики стратифицированных жидкостей.— М.: Наука, 1986.
4. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного.— М.: ГИФМЛ, 1958.
5. **Свешников А. Г., Тихонов А. Н.** Теория функций комплексной переменной.— М.: Наука, 1970.

г. Новосибирск *Поступила 20/II 1991 г.*

УДК 536.25

А. Е. Индейкина, Ю. С. Рязанцев, В. М. Шевцова

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ФОРМУ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ДВИЖЕНИИ В ЖИДКОСТИ

Влиянию капиллярных сил на равновесие и движение жидкости в условиях, близких к невесомости, посвящено большое число работ. Следует отметить, что и при нормальной гравитации, когда удельная поверхность жидкости велика, капиллярные силы могут стать определяющими. Многообразие капиллярных явлений в значительной степени обусловлено зависимостью поверхностного натяжения от температуры и концентрации поверхностно-активных веществ.

В последние годы появилось значительное количество работ [1—3], в которых рассматривается аномальная зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры:

$$\sigma_1 = \sigma_{01} + \alpha_1(T' - T^*)^2,\ \sigma_{01} = \text{const},\ \alpha_1 = \text{const}. \tag{1}$$

Этому предшествовала серия экспериментов [4, 5], выявивших наличие данной зависимости $\sigma = \sigma_1(T')$ для широкого класса веществ, например: для водных растворов высокомолекулярных спиртов, некоторых бинарных металлических сплавов, нематических жидких кристаллов.

В данной работе теоретически рассматривается нестационарная термокапиллярная (ТК) и термогравитационная (ТГ) конвекция в тонком слое вязкой несжимаемой жидкости для нелинейной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры по закону (1). Проводится сравнение возникающего течения с характеристиками движения, когда коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры по линейному закону

$$\sigma_2 = \sigma_{20} - \alpha_2 T',\ \sigma_{20} = \text{const},\ \alpha_2 = \text{const},\ \alpha_2 > 0. \tag{2}$$

Постановка задачи. В начальный момент времени через поверхность внутрь жидкости толщиной H, занимающей круглую цилиндрическую