

УДК 532.516

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ, НАТЕКАЮЩЕЙ ПОД УГЛОМ НА СМАЗАННУЮ ПОВЕРХНОСТЬ, ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

Х. Махмуд, М. Саджид, Н. Али, Ф. Лабропулу*

Международный исламский университет, 44000 Исламабад, Пакистан

* Колледж Лютера Университета г. Реджайна, Реджайна, Канада

E-mails: khalidmeh2012@gmail.com, muhammad.sajid@iiu.edu.pk, nasir.ali@iiu.edu.pk,

Fotini.Labropulu@uregina.ca

Изучается стационарное двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости, натекающей под некоторым углом на пластину, покрытую тонким слоем жидкости со степенным законом вязкости, вблизи критической точки. В предположении непрерывности скорости и касательного напряжения на границе между жидкостью и смазочным веществом с использованием метода ячеек Келлера получено численное решение уравнений, описывающих рассматриваемое течение. Исследованы предельные случаи граничных условий прилипания и скольжения.

Ключевые слова: критическая точка, пограничный слой, метод ячеек Келлера, граничные условия скольжения.

DOI: 10.15372/PMTF20170205

Введение. Задача о двумерном течении жидкости вблизи критической точки является классической задачей гидродинамики. Существует две постановки данной задачи: поток жидкости натекает на стенку либо под углом, равным 90° , либо под углом, отличным от 90° . Для первого случая в работе [1] получено точное решение для ньютоновской жидкости. Задача о набегании ньютоновской жидкости на стенку под некоторым углом (второй случай) была независимо изучена в работах [2–4]. Рассматриваемое течение вблизи критической точки на плоской пластине с условием скольжения на границе исследовано в [5]. В работе [6] рассмотрено осесимметричное течение вблизи критической точки для случая вязкой жидкости. В [7] установлено, что в качестве граничных условий уравнений смазки Рейнольдса для тонкого слоя жидкости можно использовать условия, полученные Ф. Хоманном [6]. Задача о течении вблизи критической точки в случае набегания вязкой жидкости на другую вязкую жидкость на покоящейся стенке исследовалась в [8]. Граничные условия скольжения для вихревого течения жидкости, натекающей на стенку, покрытую смазочным веществом со степенным законом вязкости, вблизи критической точки впервые выведены в работе [9]. В [10] рассматривалась задача об осесимметричном течении жидкости, обтекающей покрытый смазочным веществом диск, вблизи критической точки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного центра теоретической физики им. Абдуса Салама (AS-ICTP).

© Махмуд Х., Саджид М., Али Н., Лабропулу Ф., 2017

В качестве такого вещества, так же как и в [9], рассматривалась жидкость со степенным законом вязкости. Результаты, полученные в [10], обобщены в работе [11] на случай граничных условий скольжения, выведенных в [12] методом молекулярной динамики.

Описанные выше течения, обтекающие смазанную поверхность, изучались для случая, когда жидкость набегаёт на поверхность под прямым углом. В работе [13] исследовано течение вблизи критической точки жидкости с квадратичным законом вязкости при условии скольжения, в случае когда жидкость натекает на стенку как под углом, равным 90° , так и под углом, отличным от 90° . В [14] рассматривалось натекание вязкоупругой жидкости при наличии теплопереноса.

В данной работе проведен анализ течения вблизи критической точки вязкой жидкости, натекающей под некоторым углом на плоскую пластину, покрытую слоем жидкости со степенным законом вязкости. Математическая модель представляет собой систему нелинейных уравнений в частных производных с нелинейными граничными условиями. Методом ячеек Келлера [15–22] численно получено решение рассматриваемой задачи.

1. Математическая формулировка задачи. Рассмотрим стационарное течение вблизи критической точки вязкой жидкости, натекающей под некоторым углом на бесконечную пластину, покрытую тонким слоем смазочного вещества со степенным законом вязкости. Ось x направлена вдоль потока, ось y — перпендикулярно пластине. Предполагается, что течение вне пограничного слоя представляет собой линейную суперпозицию безвихревого течения и равномерного сдвигового течения, параллельного стенке. Следуя [2, 3, 23, 24], компоненты вектора скорости представим в виде

$$u_e = ax + b(y - \bar{\beta}), \quad v_e = -a(y - \bar{\alpha}),$$

где $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ — размерные константы; $a > 0$; $b > 0$.

Предполагается, что смазочная жидкость со степенным законом вязкости, имеющая постоянный расход Q , натекает на пластину из расположенного в начале координат точечного источника, образуя тонкий слой переменной толщины $H(x)$. Расход смазочного вещества вычисляется по формуле

$$Q = \int_0^{H(x)} U(x, y) dy,$$

где $U(x, y)$ — скорость жидкости со степенным законом вязкости вдоль оси x . В указанных предположениях стационарное двумерное течение вязкой жидкости определяется уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v, \quad (2)$$

где u , v — компоненты вектора скорости вдоль осей x и y соответственно; p — давление; ρ — плотность; $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость. Исключая давление из уравнений (2), получаем

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \nu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) = 0. \quad (3)$$

Выражение для трения или касательного напряжения стенки на поверхности пластины имеет вид

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{y=0}.$$

Для рассматриваемого течения сформулируем условия на границах раздела жидкость — твердое тело, жидкость — жидкость и вдали от пластины.

1. Условия на границе раздела жидкость — твердое тело. Из условия прилипания на поверхности следуют соотношения

$$U(x, 0) = 0, \quad V(x, 0) = 0. \quad (4)$$

Так как скорость жидкости со степенным законом вязкости вдоль оси y равна нулю, то

$$V(x, y) = 0, \quad y \in [0, H(x)]. \quad (5)$$

2. Условия на границе раздела жидкость — жидкость. На границе раздела между ньютоновской жидкостью и жидкостью со степенным законом вязкости скорость и касательное напряжение обеих жидкостей должны быть непрерывными. Поэтому на границе раздела $y = H(x)$ согласно [10] выполняется соотношение

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu_L \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (6)$$

где μ, μ_L — вязкости ньютоновской жидкости и жидкости со степенным законом вязкости соответственно. Полагая $\partial U/\partial x \ll \partial U/\partial y$, выражение для μ_L можно записать в виде

$$\mu_L = k \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{n-1}, \quad (7)$$

где k — эмпирическая константа; n — индекс режима течения смазочного вещества. Полагая, что компонента скорости $U(x, y)$ меняется по линейному закону от поверхности пластины $y = 0$ до границы раздела жидкостей $y = H(x)$, получаем

$$U(x, y) = \tilde{U}(x)y/H(x). \quad (8)$$

Здесь $\tilde{U}(x)$ — компонента вектора скорости на границе раздела жидкостей. Толщина слоя смазочного вещества $H(x)$ может быть выражена следующим образом:

$$H(x) = 2Q/\tilde{U}(x).$$

Подставляя уравнения (6)–(8) в (5), получаем условие скольжения на границе

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{k}{\mu} \left(\frac{1}{2Q} \right)^n u^{2n}. \quad (9)$$

Здесь использовано условие непрерывности горизонтальной компоненты скорости на границе раздела ($\tilde{U} = u$). Из условия непрерывности вертикальной компоненты скорости на границе раздела следует соотношение

$$v(x, H(x)) = V(x, H(x)).$$

С использованием (4) получаем

$$v(x, H(x)) = 0. \quad (10)$$

Полагая, что толщина слоя смазочного вещества мала, введем граничные условия (9), (10) на поверхности $y = 0$.

3. Граничные условия в набегающем потоке. Согласно [23] функции $u_e(x, y)$ и $v_e(x, y)$ имеют вид

$$u_e = ax + b(y - \bar{\beta}), \quad v_e = -a(y - \bar{\alpha}). \quad (11)$$

Для того чтобы записать систему уравнений в безразмерной форме, введем безразмерные переменные

$$\eta = y\sqrt{\alpha/\nu}, \quad u = axf'(\eta) + ag'(\eta), \quad v = -\sqrt{a\nu}f(\eta). \quad (12)$$

В этих переменных уравнения (3), (9)–(11) принимают вид

$$f^{IV} + f f''' + f' f'' - 2f' f'' = 0, \quad g^{IV} + f' g'' + f g''' - f' g'' - g' f'' = 0; \quad (13)$$

$$f(0) = 0, \quad f''(0) = \lambda (f'(0))^{2n}, \quad f'(\infty) = 1; \quad (14)$$

$$g(0) = 0, \quad g''(0) = 2n\lambda g'(0) (f'(0))^{2n-1}, \quad g''(\infty) = \gamma,$$

где $\gamma = b/a$ — сдвиг в набегающем потоке; λ — параметр скольжения:

$$\lambda = \frac{k\sqrt{\nu}}{\mu} \frac{a^{2n} x^{2n-1}}{a^{3/2} (2Q)^n}. \quad (15)$$

Интегрируя один раз уравнения (13) с использованием условий в набегающем потоке, получаем

$$f''' - f'^2 + f f'' + 1 = 0; \quad (16)$$

$$g''' + f g'' - f' g' + \gamma(\alpha - \beta) = 0, \quad (17)$$

где $\alpha = \eta_\infty - f(\infty)$; β — свободный параметр. В предположении $g'(\eta) = \gamma h(\eta)$ уравнение (17) принимает вид

$$h'' + f h' - f' h + \alpha - \beta = 0. \quad (18)$$

Соответствующие граничные условия записываются следующим образом:

$$h'(0) = 2n\lambda h(0) (f'(0))^{2n-1}, \quad h'(\infty) = 1. \quad (19)$$

Заметим, что в силу (15) уравнения (16), (18) имеют автомодельное решение при $n = 1/2$. Решения при $n \neq 1/2$ являются неавтомодельными. Кроме того, параметр λ может быть представлен в виде соотношения между вязкостью L_{visc} и длиной L_{lub} слоя смазочного вещества

$$\lambda = \frac{\sqrt{\nu/\alpha}}{(\mu/k)\sqrt{2Q}} = \frac{L_{visc}}{L_{lub}}.$$

В случае если расход достаточно мал и смазочное вещество очень вязкое (значение k большое), длина слоя смазочного вещества L_{lub} мала и, следовательно, величина λ неограниченно увеличивается. В этом случае ($\lambda \rightarrow \infty$) стандартные условия прилипания $f'(0) = 0$ и $h(0) = 0$ следуют из (14), (19). Если значение L_{lub} становится бесконечно большим, то коэффициент λ стремится к нулю, и, следовательно, условия скольжения на границе имеют вид $f''(0) = 0$, $h'(0) = 0$.

Используя (12), выражение для безразмерного трения на поверхности пластины можно записать в виде

$$\tau_w = x f''(0) + g''(0) = x f''(0) + \gamma h'(0),$$

где значения $f''(0)$, $h'(0)$, а значит, и $g''(0)$ могут быть вычислены при решении уравнений (16), (18) с граничными условиями (14), (19) при различных значениях λ , β . Положение критической точки x_s на поверхности пластины определяется из условия $\tau_w = 0$. Тогда

$$x_s = -\frac{g''(0)}{f''(0)} = -\gamma \frac{h'(0)}{f''(0)}.$$

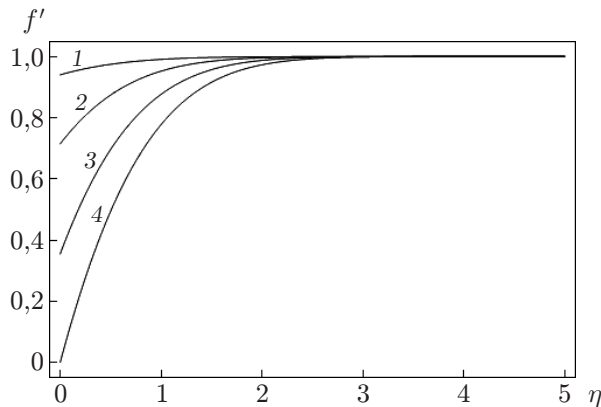


Рис. 1

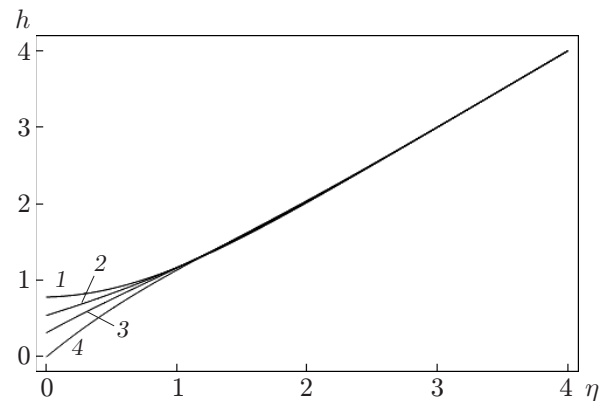


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость горизонтальной компоненты скорости от расстояния от пластины $f'(\eta)$ при различных значениях параметра скольжения λ :
 1 — $\lambda = 0,1$, 2 — $\lambda = 0,6$, 3 — $\lambda = 2,5$, 4 — $\lambda = \infty$

Рис. 2. Зависимость сдвиговой компоненты скорости от расстояния от пластины $h(\eta)$ при $\beta = 0$ и различных значениях λ :
 1 — $\lambda = 0,05$, 2 — $\lambda = 1$, 3 — $\lambda = 3$, 4 — $\lambda = \infty$

2. Результаты численных расчетов. В результате численного решения уравнений (16), (18) с граничными условиями (14), (19) с помощью неявной конечно-разностной схемы ячеек Келлера [15–22] вычислены значения f' , f'' , h , h' при различных значениях λ и β .

На рис. 1 представлена зависимость горизонтальной компоненты скорости f' от расстояния от пластины при различных значениях λ . Видно, что значения f' увеличиваются с увеличением параметра скольжения на поверхности. Следовательно, при наличии смазочного вещества скорость течения жидкости на поверхности увеличивается.

На рис. 2 показана зависимость сдвиговой компоненты скорости h от расстояния от пластины при $\beta = 0$ и различных значениях λ . Видно, что с увеличением λ вблизи поверхности ($\eta = 0$) значение h уменьшается. При $0 \leq \eta \leq 1$ величина h зависит от λ , при $\eta > 1$ она не зависит от λ , но зависит от η . На рис. 3 приведена зависимость $h(\eta)$ при различных значениях λ , β . Видно, что при $\beta \leq 0$ с уменьшением параметра λ сдвиговая компонента скорости h увеличивается, а при $\beta > 0$ — уменьшается. На рис. 4 показана зависимость $h(\eta)$ при различных значениях β , λ . Видно, что с увеличением β сдвиговая компонента скорости h уменьшается.

На рис. 5 представлена зависимость $f'(\eta)$ при $\lambda = 2$ и различных значениях индекса режима течения n . Из рис. 5 следует, что значение f' увеличивается с увеличением n . Зависимость $h(\eta)$ при $\lambda = 2$ и различных значениях n , β приведена на рис. 6. Видно, что при $\beta \leq 0$ значение h увеличивается с ростом n , а при $\beta > 0$ — уменьшается.

На рис. 7 показаны линии тока при различных параметрах течения. Из рис. 7, а, б следует, что при увеличении β критическая точка движется вправо вдоль оси x . На рис. 7, в–е видно, что при уменьшении λ при $\gamma < 3$ критическая точка движется вправо вдоль оси x , а при $\gamma \geq 3$ — влево.

Значения $f''(0)$, α и $h'(0)$, вычисленные в данной работе и работе [14], представлены в табл. 1. В табл. 2 приведены значения $f''(0)$ и α при различных значениях λ . Из табл. 2 следует, что с ростом λ значения $f''(0)$ и α увеличиваются. В табл. 3 представлены значения $h'(0)$ при различных значениях λ и β . Из табл. 3 следует, что с увеличением λ при

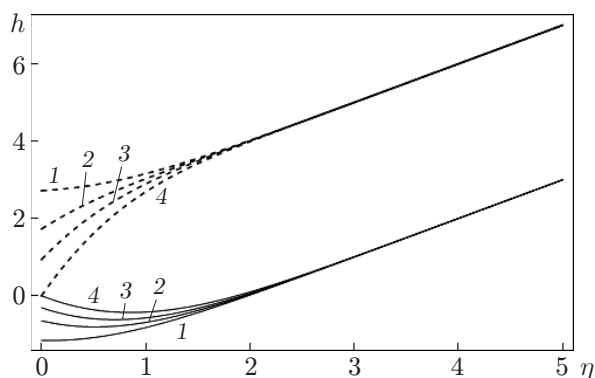


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость сдвиговой компоненты скорости от расстояния от пластины $h(\eta)$ при различных значениях λ и параметра β :

сплошные линии — $\beta = 2$, штриховые — $\beta = -2$; 1 — $\lambda = 0,05$, 2 — $\lambda = 1$, 3 — $\lambda = 3$, 4 — $\lambda = \infty$

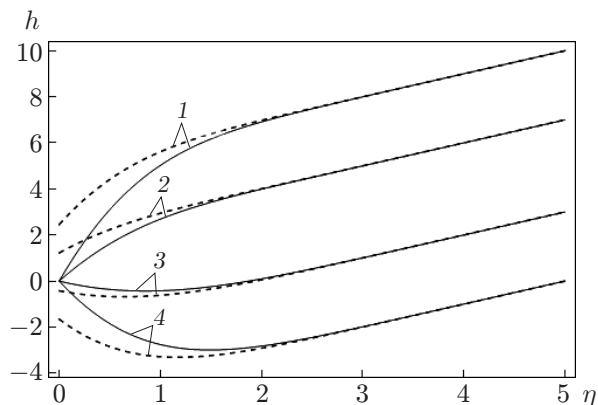


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость сдвиговой компоненты скорости от расстояния от пластины $h(\eta)$ при различных значениях β и параметра скольжения λ :

сплошные линии — $\lambda = \infty$, штриховые — $\lambda = 2$; 1 — $\beta = -5$, 2 — $\beta = -2$, 3 — $\beta = 2$, 4 — $\beta = 5$

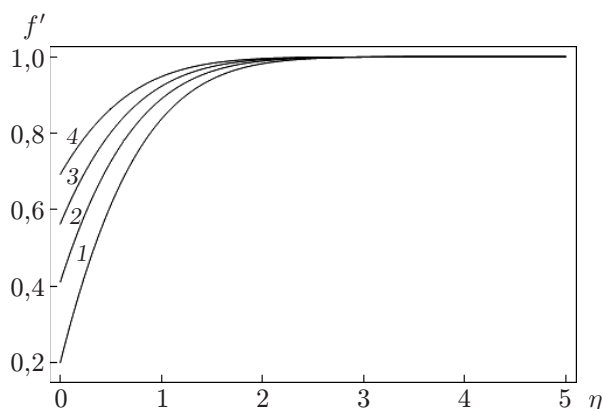


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость горизонтальной компоненты скорости от расстояния от пластины $f'(\eta)$ при $\lambda = 2$ и различных значениях n :

1 — $n = 0,2$, 2 — $n = 0,5$, 3 — $n = 1$, 4 — $n = 2$

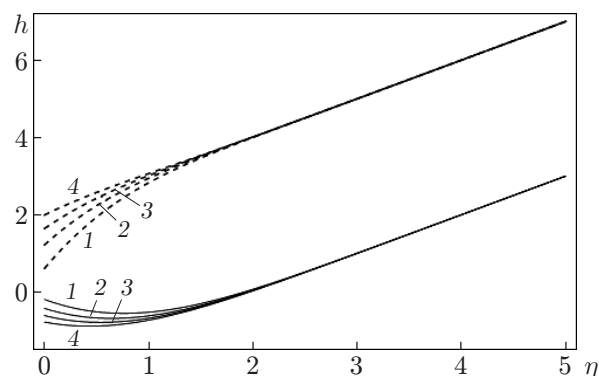


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость сдвиговой компоненты скорости от расстояния от пластины $h(\eta)$ при $\lambda = 2$ и различных значениях β , n :

сплошные линии — $\beta = 2$, штриховые — $\beta = -2$; 1 — $n = 0,2$, 2 — $n = 0,5$, 3 — $n = 1$, 4 — $n = 2$

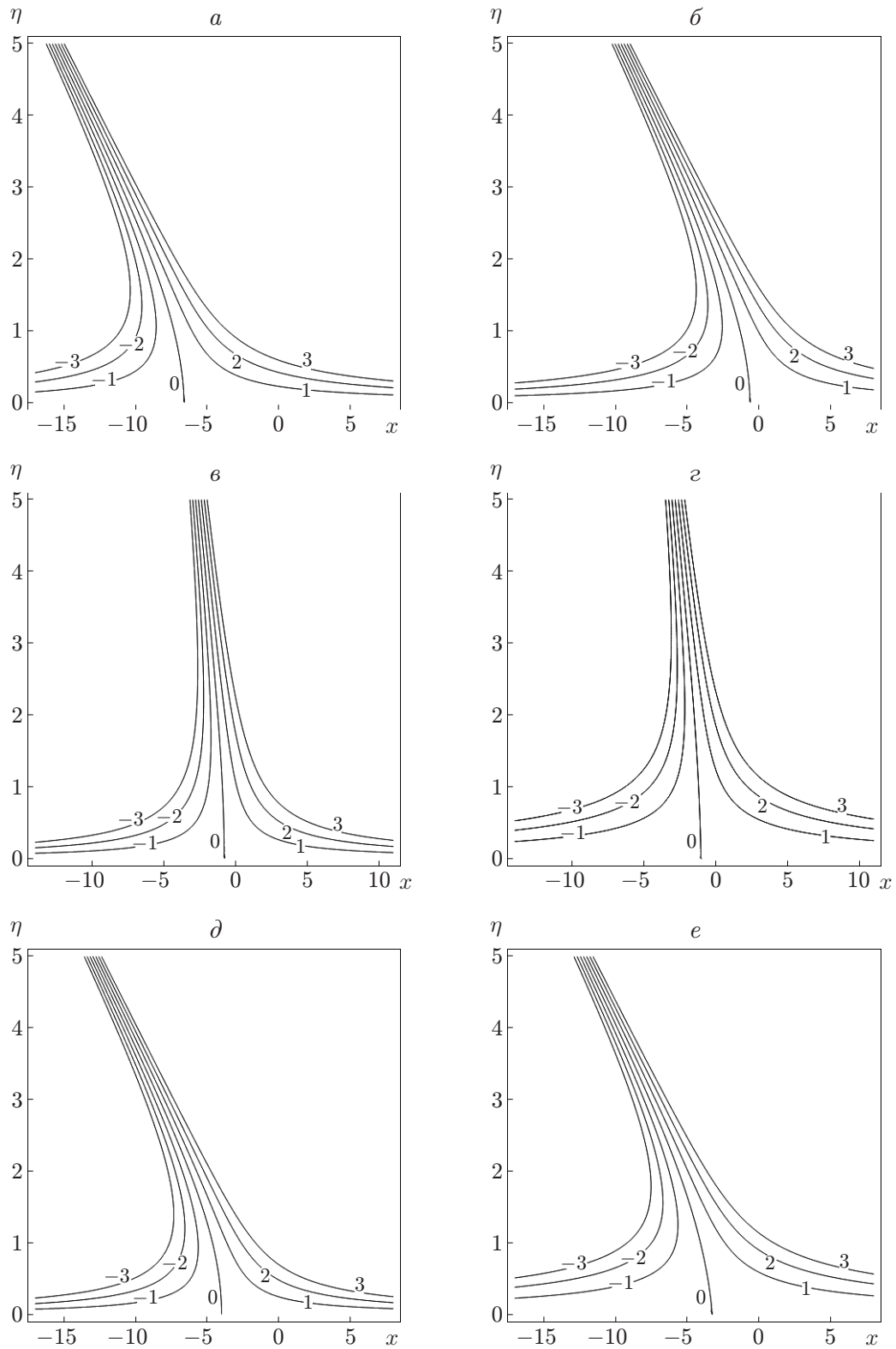


Рис. 7. Линии тока в окрестности критической точки при различных значениях параметров течения:

a — $x_s = -6,624$, $\lambda = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = 5$, *б* — $x_s = -0,6242$, $\lambda = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$, *в* — $x_s = -0,7994$, $\lambda = 0,01$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, *г* — $x_s = -1,0480$, $\lambda = 5$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, *д* — $x_s = -3,984$, $\lambda = 0,01$, $\beta = 0$, $\gamma = 5$, *е* — $x_s = -3,288$, $\lambda = 5$, $\beta = 0$, $\gamma = 5$

Таблица 1

Значения $f''(0)$, α , $h'(0)$ при $\lambda = \infty$

| Источник | $f''(0)$ | α | $h'(0)$ | | |
|---------------|-----------|-----------|-------------|-------------|--------------|
| | | | $\beta = 0$ | $\beta = 5$ | $\beta = -5$ |
| Данная работа | 1,232 598 | 0,647 903 | 1,406 564 | -4,756 416 | 7,569 314 |
| Работа [14] | 1,232 590 | 0,647 900 | 1,406 370 | -4,756 560 | 7,569 310 |

Таблица 2

Значения $f''(0)$ и α при различных значениях λ

| λ | $f''(0)$ | α | λ | $f''(0)$ | α |
|-----------|-----------|-------------|-----------|-----------|-------------|
| 0,01 | 0,009 938 | 0,003 320 0 | 3,00 | 0,934 338 | 0,415 182 9 |
| 0,05 | 0,048 472 | 0,016 336 2 | 5,00 | 1,042 591 | 0,488 053 2 |
| 0,10 | 0,094 036 | 0,032 030 1 | 10,00 | 1,134 289 | 0,558 749 0 |
| 0,50 | 0,375 887 | 0,137 577 6 | 20,00 | 1,182 886 | 0,600 718 3 |
| 1,00 | 0,593 464 | 0,231 814 2 | 100,00 | 1,222 604 | 0,638 018 4 |
| 1,50 | 0,729 920 | 0,298 747 7 | 500,00 | 1,230 598 | 0,645 907 2 |
| 2,00 | 0,821 483 | 0,348 092 6 | ∞ | 1,232 598 | 0,647 902 5 |

Таблица 3

Значения $h'(0)$ при $\gamma = 1$ и различных значениях λ , β

| λ | $h'(0)$ | | |
|-----------|-------------|--------------|--------------|
| | $\beta = 0$ | $\beta = 5$ | $\beta = -5$ |
| 0,01 | 0,007 944 3 | -0,041 744 0 | 0,057 632 5 |
| 0,05 | 0,039 040 7 | -0,203 318 7 | 0,281 400 0 |
| 0,10 | 0,076 426 0 | -0,393 751 8 | 0,546 603 9 |
| 0,50 | 0,324 473 4 | -1,554 961 5 | 2,203 908 4 |
| 1,00 | 0,540 231 8 | -2,427 088 9 | 3,507 552 3 |
| 2,00 | 0,797 685 6 | -3,309 728 6 | 4,905 099 9 |
| 3,00 | 0,941 254 1 | -3,730 432 3 | 5,612 940 4 |
| 5,00 | 1,092 650 9 | -4,120 302 8 | 6,305 604 7 |
| 10,00 | 1,234 692 4 | -4,436 747 1 | 6,906 131 9 |
| 20,00 | 1,182 885 7 | -4,597 783 1 | 7,231 061 7 |
| 100,00 | 1,387 923 5 | -4,725 088 8 | 7,500 935 8 |
| 500,00 | 1,402 809 3 | -4,750 172 1 | 7,555 790 6 |
| ∞ | 1,406 563 8 | -4,756 416 7 | 7,569 544 2 |

Таблица 4

Значения x_s при различных значениях λ , β , γ

| γ | λ | x_s | | |
|----------|-----------|--------------|-------------|-------------|
| | | $\beta = -3$ | $\beta = 0$ | $\beta = 3$ |
| -5 | 0,5 | 0,4906 | 3,4906 | 6,4906 |
| | 5,0 | -0,6882 | 2,3118 | 5,3118 |
| -1 | 0,5 | -2,4119 | 0,5881 | 3,5881 |
| | 5,0 | -2,9281 | 0,0719 | 3,0719 |
| 1 | 0,5 | -3,8632 | -0,8632 | 2,1368 |
| | 5,0 | -4,0480 | -1,0480 | 1,9520 |
| 2 | 0,5 | -4,5889 | -1,5889 | 1,4111 |
| | 5,0 | -4,6080 | -1,6080 | 1,3920 |
| 3 | 0,5 | -5,3145 | -2,3145 | 0,6855 |
| | 5,0 | -5,1679 | -2,1679 | 0,8321 |
| 5 | 0,5 | -6,7658 | -3,7658 | -0,7658 |
| | 5,0 | -6,2879 | -3,2879 | -0,2879 |
| 10 | 0,5 | -10,3940 | -7,3940 | -4,3940 |
| | 5,0 | -9,0877 | -6,0877 | -3,0877 |

$\beta \leq 0$ значения $h'(0)$ увеличиваются, при $\beta > 0$ — уменьшаются. Значения координаты критических точек при различных значениях параметров γ , λ , β приведены в табл. 4. Результаты расчетов, представленные в табл. 1–4, согласуются с результатами, приведенными на рис. 7.

В предельном случае (когда реализуются условия прилипания на поверхности) значения $f''(0)$ и $h'(0)$, полученные в данной работе, хорошо согласуются с соответствующими значениями, полученными в работах [13, 14].

Заключение. В работе исследована задача о стационарном течении вблизи критической точки вязкой жидкости, натекающей под некоторым углом на пластину, покрытую жидкостью со степенным законом вязкости. С помощью численного метода ячеек Келлера решены уравнения, описывающие течения, при $n = 1/2$ и $n \neq 1/2$. Исследовано влияние параметров β и λ на характеристики течения при различных условиях включая условия прилипания и условия полного скольжения. Установлено, что при больших значениях параметра скольжения увеличивается скорость течения и уменьшается влияние набегающего потока на течение в окрестности критической точки. Установлено, что положение критической точки зависит от параметров течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hiemenz K.** Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // *Dinglers Polytech. J.* 1911. Bd 326. S. 321–324.
2. **Stuart J. T.** The viscous flow near a stagnation-point when the external flow has uniform vorticity // *J. Aerospace Sci.* 1959. V. 26. P. 124–125.
3. **Tamada K. J.** Two-dimensional stagnation-point flow impinging obliquely on a plane wall // *J. Phys. Soc. Japan.* 1979. V. 46. P. 310–311.
4. **Dorrepal J. M.** An exact solution of the Navier — Stokes equation which describes non-orthogonal stagnation-point flow in two dimensions // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 163. P. 141–147.
5. **Wang C. Y.** Stagnation flows with slip: Exact solution of the Navier — Stokes equations // *Z. angew. Math. Phys.* 2003. Bd 54. S. 184–189.
6. **Homann F.** Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Stromung um den Zylinder und um die Kugel // *Z. angew. Math. Mech.* 1936. Bd 16. S. 153–164.
7. **Yeckel A., Strong L., Middleman S.** Viscous film flow in the stagnation region of the jet impinging on planar surface // *AIChE J.* 1994. V. 40. P. 1611–1617.
8. **Blyth M. G., Pozrikidis C.** Stagnation-point flow against a liquid film on a plane wall // *Acta Mech.* 2005. V. 180. P. 203–219.
9. **Andersson H. I., Rousselet M.** Slip flow over a lubricated rotating disc // *Intern. J. Heat Fluid Flow.* 2006. V. 27. P. 329–335.
10. **Santra B., Dandapat B. S., Andersson H. I.** Axisymmetric stagnation-point flow over a lubricated surface // *Acta Mech.* 2007. V. 194. P. 1–10.
11. **Sajid M., Mahmood K., Abbas Z.** Axisymmetric stagnation-point flow with a general slip boundary condition over a lubricated surface // *Chinese Phys. Lett.* 2012. V. 29. 024702.
12. **Thompson P. A., Troian S. M.** A general boundary condition for liquid flow at solid surfaces // *Nature.* 1997. V. 389. P. 360–362.
13. **Labropulu F., Li D.** Stagnation-point flow of a second-grade fluid with slip // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2008. V. 43. P. 941–947.
14. **Li D., Labropulu F., Pop I.** Oblique stagnation-point flow of a viscoelastic fluid with heat transfer // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2009. V. 44. P. 1024–1030.

15. **Na T. Y.** Computational methods in engineering boundary value problem. N. Y.: Acad. Press, 1979.
16. **Cebeci T.** Physical and computational aspects of convective heat transfer / T. Cebeci, P. Bradshaw. N. Y.: Springer-Verlag, 1984.
17. **Keller H. B., Cebeci T.** Accurate numerical methods for boundary layer flows. 2. Two dimensional turbulent flows // AIAA J. 1972. V. 10. P. 1193–1199.
18. **Bradshaw P.** Engineering calculation methods for turbulent flows / P. Bradshaw, T. Cebeci, J. H. Whitelaw. L.: Acad. Press, 1981.
19. **Keller H. B.** A new difference scheme for parabolic problems // Numerical solution of partial differential equations. N. Y.: Academic, 1970. V. 2. P. 327–350.
20. **Ahmad K., Nazar R.** Unsteady MHD mixed convection stagnation-point flow of a viscoelastic fluid on a vertical surface // J. Quality Measurement Anal. 2010. V. 6, N 2. P. 105–117.
21. **Ibrahim W., Shanker B.** Unsteady MHD flow and heat transfer due to stretching sheet in the presence of heat source or sink // Comput. Fluids. 2012. V. 70. P. 21–28.
22. **Sarif N. M., Salleh M. Z., Nazar R.** Numerical solution of flow and heat transfer over a stretching sheet with Newtonian heating using the Keller box method // Procedia Engng. 2013. V. 53. P. 542–554.
23. **Weidman P. D., Putkaradze V.** Axisymmetric stagnation flow obliquely impinging on a circular cylinder // Eur. J. Mech. B. 2003. V. 22. P. 123–131.
24. **Tooke R. M., Blyth M. G.** A note on oblique stagnation-point flow // Phys. Fluids. 2008. V. 20. 033101.

Поступила в редакцию 5/VIII 2015 г.
