УДК 532.6

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ ВДОЛЬ НЕВРАЩАЮЩЕГОСЯ СЖИМАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

А. Мехмуд, Г. Д. Табассум, М. Усман*, А. Дар**

Международный исламский университет, 44000 Исламабад, Пакистан
* Виртуальный университет Пакистана, Лахор, Пакистан
** Университет г. Котли штата Азад Джамму и Кашмир, Котли, Пакистан
E-mails: ahmerqau@yahoo.co.uk, imgdastgir@gmail.com,
muhammadusman@vu.edu.pk, amanullahdar@hotmail.com

Приведены результаты исследования задачи о нестационарном течении жидкости вдоль мгновенно растягивающегося (сжимающегося) невращающегося диска бесконечного радиуса. Скорость поверхности сжимающегося диска выбрана таким образом, чтобы задача допускала существование точного автомодельного решения. Исходная задача сводится к начальной задаче, численное решение которой строится с использованием метода стрельбы и метода Ньютона — Рафсона. Проведено детальное исследование существования и единственности решения.

Ключевые слова: сжимающийся диск, нестационарный поток, неединственность, численное решение.

DOI: 10.15372/PMTF20220506

Введение. В работе [1] изучена классическая задача механики жидкости — задача о пограничном слое в потоке над свободно вращающимся диском. При этом использовалось преобразование подобия для сведения уравнений Навье — Стокса к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В [2] с использованием результатов работы [1] решена задача о внезапно начинающемся движении жидкости из состояния покоя. Задача о течении жидкости между неподвижным и вращающимся дисками решена в [3]. Исследованию течения вблизи вращающегося диска посвящено большое количество работ, в то время как движение жидкости вблизи невращающегося диска изучено недостаточно.

Единственность решения уравнений, описывающих течение жидкости вблизи сжимающихся поверхностей, также изучалась во многих работах. Неединственность решения задачи о пограничном слое жидкости вблизи движущихся поверхностей впервые была обнаружена для сжимающихся поверхностей. Поэтому большинство работ в этой области посвящено изучению течения вблизи сжимающихся поверхностей. В настоящее время широко распространено мнение, что неединственность решения характерна для задачи о движении жидкости только вблизи сжимающихся поверхностей, в то время как решение задачи о движении жидкости вблизи растягивающихся поверхностей единственно (см., например, [4–8]). В работах [9–12] показано, что существование нескольких решений имеет

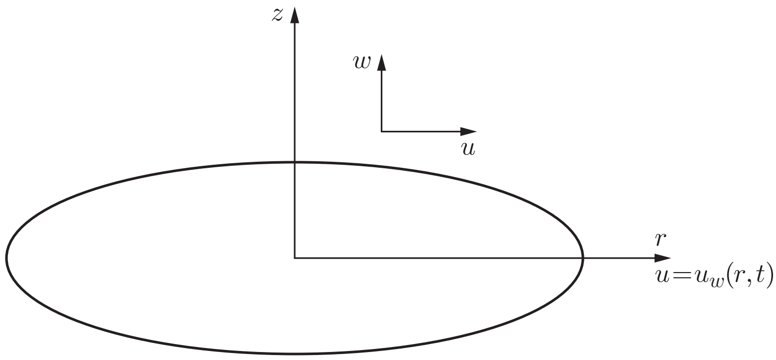

Рис. 1. Геометрия течения и связанная с ним система координат

место не только для задач о течении жидкости вблизи сжимающихся поверхностей, но и для задач о движении жидкости вблизи растягивающихся поверхностей.

Подробный анализ задачи о двумерном течении вблизи растягивающихся (сжимающихся) поверхностей выполнен в работах [9, 10]. Установлено, что неединственность решения возможна также в задаче о движении жидкости вдоль растягивающегося листа, а единственность решения возможна в задаче о течении вдоль сжимающегося листа. Двумерная осесимметричная задача о течении жидкости вдоль растягивающегося (сжимающегося) цилиндра исследовалась в работах [11, 12]. Показано, что существование нескольких решений возможно для задач о течении жидкости вдоль как растягивающегося, так и сжимающегося цилиндра.

Исследованию задачи об осесимметричном течении жидкости вблизи растягивющегося (сжимающегося) невращающегося диска уделялось недостаточно внимания.

В настоящей работе изучается нестационарное течение жидкости вблизи растягивающегося (сжимающегося) диска. Рассматривается как замедленный, так и ускоренный поток. Результаты исследования существования решения и его единственности сопоставляются с экспериментальными данными.

1. Постановка задачи. Рассматривается круглый плоский диск бесконечного радиуса, погруженный в вязкую жидкость. Поверхность диска растягивается (сжимается) в радиальном направлении со скоростью $u_w(r,t)$. Для того чтобы обеспечить нормальную скорость всей поверхности диска, он считается пористым. Предполагается, что поры одинакового размера равномерно распределены по поверхности диска. При растяжении (сжатии) диска вблизи него устанавливается осесимметричное двумерное нестационарное течение. Геометрия течения и связанная с ним система координат показаны на рис. 1.

В силу симметрии потока относительно срединной плоскости диска в данной работе рассматривается только область, расположенная выше диска. Вследствие осевой симметрии как диска, так и течения уравнения задачи в цилиндрической системе координат в рамках теории пограничного слоя имеют вид

$$\frac{\partial\,(ru)}{\partial r} + \frac{\partial\,(rw)}{\partial z} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial r} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} = \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{2}$$

Для этой системы ставятся следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} t = 0: &\qquad u(r,z,t) = 0 \quad \forall\ r, z,\\ z = 0: &\qquad u = u_w(r,t), \quad w = w_w(r,t), \end{aligned} \tag{3}$$

$$z = \infty: \qquad u = 0.$$

В (1)–(3) u, w — компоненты вектора скорости в радиальном и осевом направлениях соответственно; ν — кинематическая вязкость; $w_w(r,t)$ — скорость всасывания или впрыскивания. Система (1)–(3) допускает точное автомодельное решение, если скорость стенки подчиняется закону

$$u_w(r,\tau) = \bar{a}r/\tau, \qquad \tau = |\bar{a}|t \tag{4}$$

или

$$u_w(r,t) = \bar{a}r/(1-\gamma t), \tag{5}$$

где $\bar{a}$ — константа, имеющая размерность, обратную времени, и представляющая собой равномерную скорость растяжения (сжатия) νe $(-\nu e)$; γ — константа, имеющая размерность, обратную времени (значения $\gamma > 0$ соответствуют ускоренному движению точек поверхности диска, $\gamma < 0$ — замедленному движению). Для того чтобы обеспечить подобие для законов скорости растяжения (сжатия) стенки (4), (5), скорость всасывания (впрыскивания) соответственно должна описываться зависимостями

$$w_w(r,\tau) = d\tau^{-1/2}, \qquad w_w(r,\tau) = d/\sqrt{1-\gamma t},$$

где d — константа, имеющая размерность скорости (значение $d > 0$ соответствует впрыскиванию, значение $d < 0$ — всасыванию).

Преобразования подобия для исследуемого потока в безразмерных переменных имеют вид

$$\eta = \sqrt{\pm\frac{u_w(r,t)}{\nu r}}\,z, \qquad u = u_w(r,t)f'(\eta), \qquad w = \pm\Big(-2\sqrt{\pm\frac{u_w(r,t)\nu}{r}}\Big)f(\eta). \tag{6}$$

Здесь знаки “+” и “−” соответствуют растяжению и сжатию диска; $f(\eta)$ — безразмерная функция потока $\psi(r,z,t)$; компоненты вектора скорости потока u, w выражаются через функцию тока следующим образом:

$$u = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(r\psi)}{\partial z}, \qquad w = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(r\psi)}{\partial r}.$$

В результате уравнение неразрывности (1) удовлетворяется тождественно.

В силу преобразований подобия (6) уравнение импульса (2), начальные и граничные условия преобразуются в следующие эквивалентные уравнения:

$$f''' = 2ff'' - f'^2 + \beta(f' + \eta f''/2); \tag{7}$$

$$f(0) = 1, \qquad f(0) = S, \qquad f'(\infty) = 0. \tag{8}$$

Скорость u_w, входящая в соотношение (6), получается из уравнения (5) в результате подстановки $\bar{a} = -a$ $(a > 0)$. Поэтому скорость u_w представляет собой скорость сжатия стенки. Параметр $\beta = \gamma/a$ является параметром нестационарности потока, его положительные (отрицательные) значения соответствуют ускоряющемуся (замедляющемуся) потоку. Существование нескольких решений в случае замедляющегося потока установлено в работах [9–12]. При $\beta = 0$ имеет место установившееся растяжение (сжатие) диска по линейному закону. Отрицательные значения параметра $S = d/(2\sqrt{|a|\nu})$ соответствуют всасыванию, положительные значения — впрыскиванию.

В результате преобразований подобия (6), при которых используется скорость u_w, определенная в соотношении (4), уравнение импульса приводится к виду

$$f''' = 2(f - \eta/4)f'' - (1 + f')f', \tag{9}$$

при этом краевые условия имеют вид (8). Следует отметить, что уравнение (9) является частным случаем уравнения (7) и получается из него при $\beta = -1$. Поэтому более предпочтительно рассматривать систему (7), (8), в которой скорость стенки u_w (см. (4)) должна быть определена при $\beta = -1$. Коэффициент трения стенки определяется по формуле

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho u_w^2/2},$$

где τ_w — напряжение сдвига на стенке:

$$\tau_w = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}.$$

Из уравнений (5), (6) следует

$$C_f = -\operatorname{Re}_x^{-1/2} f''(0),$$

где $\operatorname{Re}_x = \sqrt{u_w r/(4\nu)}$ — число Рейнольдса.

2. Решение задачи. Целью данной работы является исследование случаев, в которых возможно существование нескольких решений задачи, и получение этих решений. Используется программное обеспечение MATHEMATICA, в котором имеется компьютерный код на основе метода стрельбы Рунге — Кутты четвертого порядка. В рамках метода Рунге — Кутты следует преобразовать обыкновенные дифференциальные уравнения в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. При этом краевая задача преобразуется в начальную, которая затем решается численно шагами по координате η. Процедура повторяется до тех пор, пока не будет выполнено внешнее граничное условие. Задача (7), (8) сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$y_2' = 2yy_2 - y_1^2 + \beta(y_1 + \eta y_2/2), \qquad y_1' = y_2, \qquad y' = y_1, \tag{10}$$

где $y = f(\eta)$. Задаются следующие начальные условия:

$$y_1(0) = 1, \qquad y(0) = S, \qquad y_2(0) = \xi. \tag{11}$$

Начальная задача (10), (11) решается методом стрельбы, с помощью которого задается отсутствующее начальное условие $y_2(0) = \xi$. Значение величины ξ вычисляется путем подбора размера шага интегрирования, а также подходящего бесконечного интервала, так чтобы решение удовлетворяло внешнему граничному условию $y_1(\infty) = 0$. Для получения решения данной задачи с требуемой точностью используется метод Ньютона — Рафсона. Итерации прекращаются, если выполняется равенство $y_1(\infty) = 0{,}001$. Использование метода стрельбы позволило найти с требуемой точностью не только первое решение, но и второе.

Как правило, первое решение определяется достаточно просто, в то время как определение второго и третьего решений существенно затруднено. Для определения этих решений необходимо принять несколько предположений, в том числе об области существования решения. Для проверки точности и достоверности вычислительного кода используются известные результаты [10, 13]. Результаты сравнения решений приведены в табл. 1. Из данных, приведенных в табл. 1, следует, что численное решение, полученное в настоящей работе, хорошо согласуется с численными решениями, полученными ранее.

3. Результаты исследования и их обсуждение. Численные решения задачи были получены при различных значениях параметра нестационарности β и параметра всасывания или впрыскивания S.

Установлено, что в случае нестационарного течения вдоль сжимающегося диска решение не существует ни при наличии впрыскивания, ни при отсутствии всасывания. Решение возможно только при наличии достаточной скорости всасывания. Поэтому ниже параметр S рассматривается в качестве параметра всасывания. Неединственность решения

Таблица 1

Решения, полученные в настоящей работе и работах [10, 13]

S	Данные [13]	Данные [10]		Данные настоящей работы	
	Первое решение	Первое решение	Второе решение	Первое решение	Второе решение
−2,074 799 052	—	−0,5043	−0,5043	−0,5043	−0,5043
−3	−2,4115	−2,4115	2,5881	−2,4115	2,5881
−4	−3,5930	−3,5930	6,9590	−3,5930	6,9590
−5	−4,6846	−4,6846	13,6528	−4,6846	13,6528
−6	−5,7414	−5,7414	23,1453	−5,7414	23,1453
−7	−6,7804	−6,7804	35,8671	−6,7804	35,8671
−8	−7,8090	−7,8090	52,2334	−7,8090	52,2334
−9	−8,8309	−8,8309	72,6507	−8,8309	72,6507
−10	−9,8482	−9,8482	97,5194	−9,8482	97,5194

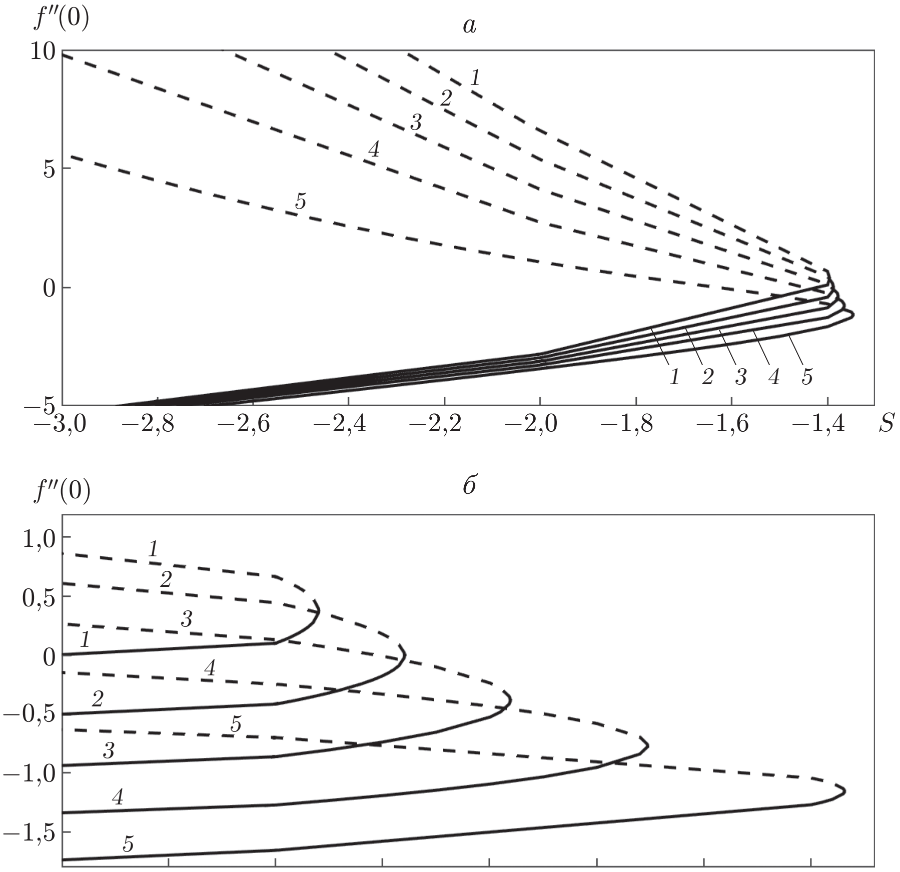

Рис. 2. Зависимость коэффициента трения на стенке $f''(0)$ от параметра S при различных значениях параметра β:

a — $S = -3{,}0 \div -1{,}4$, *б* — $S = -1{,}42 \div -1{,}35$; сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение; *1* — $\beta = -5$, *2* — $\beta = -4$, *3* — $\beta = -3$, *4* — $\beta = -2$, *5* — $\beta = -1$

Таблица 2

Значения S_{cr} при различных значениях параметра β

β	S_{cr}	Первое решение	Второе решение
−1	−1,346 886 807 00	−1,1532	−1,1532
−2	−1,365 284 109 00	−0,7659	−0,7659
−3	−1,378 102 782 20	−0,3812	−0,3812
−4	−1,387 969 753 30	0	0
−5	−1,395 985 773 67	0,3779	0,3779

Таблица 3

Значения β_{cr} при различных значениях параметра S

S	β_{cr}	Первое решение	Второе решение
−1,35	−1,140 009 50	−1,0990	−1,0990
−1,36	−1,667 102 29	−0,8947	−0,8947
−1,38	−3,174 917 43	−0,3142	−0,3142
−1,40	−5,576 215 80	0,5940	0,5940

была обнаружена только при некоторых значениях $\beta < 0$ и $S < 0$. При $\beta > 0$ неединственность решения не обнаружена.

На рис. 2 приведены зависимости коэффициента трения на стенке от параметра S при различных значениях параметра β, на рис. 3 — зависимости коэффициента трения на стенке от параметра β при различных значениях параметра S.

Из рис. 2 следует, что при $\beta < 0$ в случае впрыскивания решение не существует ни при каких условиях, но существует при достаточно большой скорости всасывания. Критические значения S_{cr} величины S, начиная с которых решение существует и при которых соединяются две ветви решения, приведены в табл. 2. Для заданного значения параметра S можно найти интервал значений параметра β, в котором решение существует. На рис. 3,*а* представлены зависимости коэффициента поверхностного трения от параметра β при малых по модулю значениях параметра S. Очевидно, что для каждого такого значения S решение существует в определенном интервале значений β. При увеличении параметра β два решения соединяются. Такой характер кривых имеет место только при малых по модулю значениях параметра S. При дальнейшем увеличении параметра β решение не существует. Это обусловлено тем, что при заданной скорости всасывания решение может существовать только при определенном замедлении потока. При дальнейшем замедлении (увеличении значений параметра β) решение не существует. Критические значения β_{cr} параметра β, при которых две ветви решения соединяются, приведены в табл. 3. Следует отметить, что два решения существуют при замедлении потока, но при этом необходимо увеличение либо скорости всасывания, либо градиента давления, либо кривизны поверхности (см., например, [9–12]). На рис. 3,*б* приведена зависимость коэффициента трения на стенке от параметра β при $\beta > 0$ и достаточно больших значениях параметра S. Второе решение быстро растет, принимая большие значения, поэтому оно показано на рис. 3,*б* не полностью. Нетрудно показать, что, когда скорость всасывания становится достаточно большой, второго решения не существует при достаточно малых значениях параметра β (ср. рис. 3,*а* и рис. 3,*б*). Очевидно, что для всех $\beta < 0$ второе решение существует при $S = -1{,}40$; $-1{,}38$; $-1{,}36$; $-1{,}35$, при $S = -1{,}50$ второе решение не существует при $-1 < \beta < 0$. Следует отметить, что при дальнейшем увеличении параметра S интервал значений параметра β, в котором решение существует, постепенно расширяется вправо (см. рис. 3,*б*,*в*).

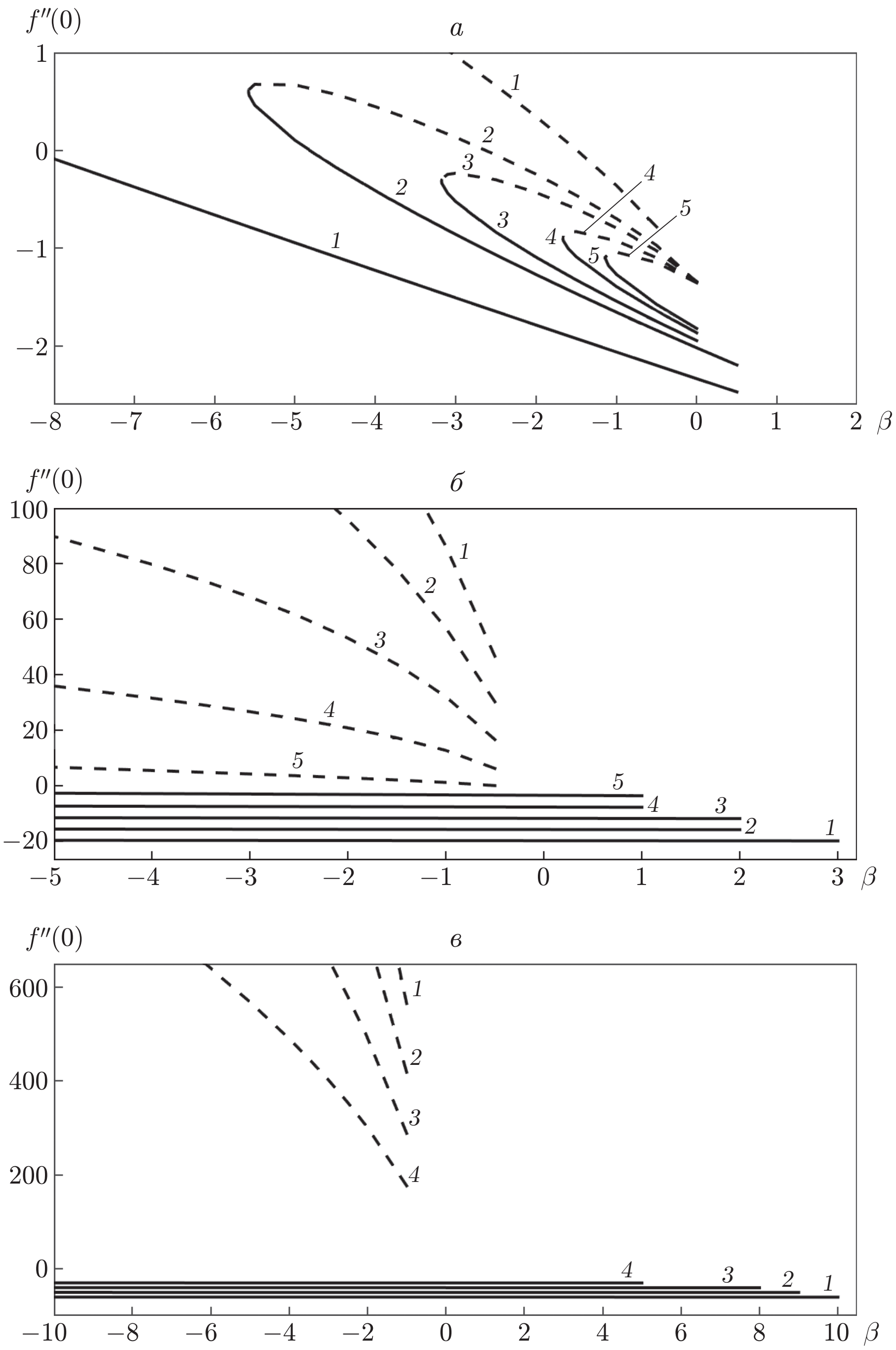

Рис. 3. Зависимость коэффициента трения на стенке $f''(0)$ от параметра β при различных значениях параметра S:

а — при малых по модулю значениях S (*1* — $S = -1{,}50$, *2* — $S = -1{,}40$, *3* — $S = -1{,}38$, *4* — $S = -1{,}36$, *5* — $S = -1{,}35$), *б* — при умеренных по модулю значениях S (*1* — $S = -10$, *2* — $S = -8$, *3* — $S = -6$, *4* — $S = -4$, *5* — $S = -2$), *в* — при больших по модулю значениях S (*1* — $S = -30$, *2* — $S = -25$, *3* — $S = -20$, *4* — $S = -15$); сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение

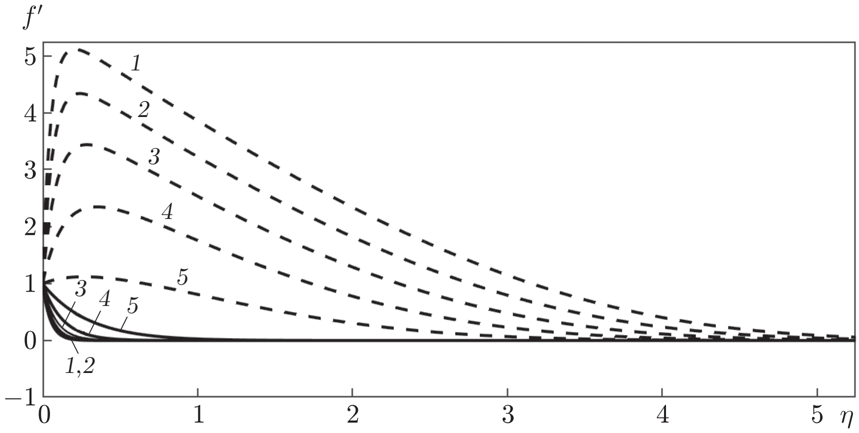

Рис. 4. Зависимость скорости потока от параметра η при $\beta = -1$ и различных значениях параметра всасывания S:
1 — $S = -10$, *2* — $S = -8$, *3* — $S = -6$, *4* — $S = -4$, *5* — $S = -2$; сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение

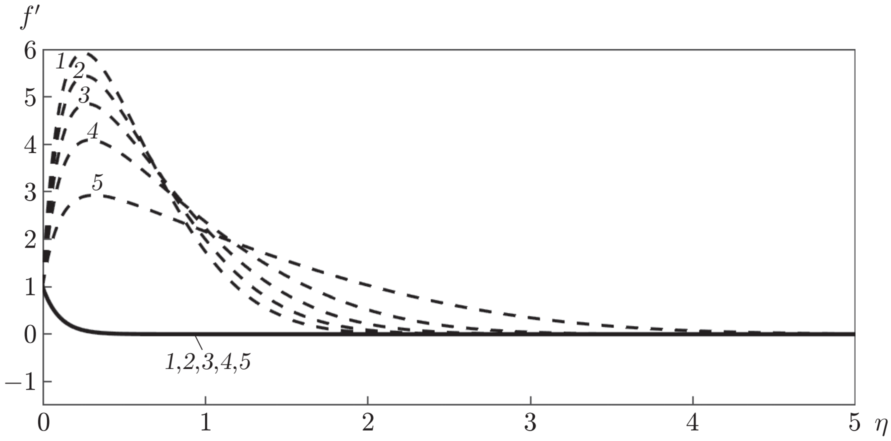

Рис. 5. Зависимость скорости потока от параметра η при $S = -5$ и различных значениях параметра нестационарности потока β:
1 — $\beta = -5$, *2* — $\beta = -4$, *3* — $\beta = -3$, *4* — $\beta = -2$, *5* — $\beta = -1$; сплошные линии — первое решение, штриховые — второе решение

На рис. 4, 5 приведены зависимости скорости потока f' от параметра η при различных значениях параметров S, β.

Влияние скорости всасывания на первое решение проявляется в уменьшении толщины пограничного слоя, что является общеизвестным фактом. При этом влияние параметра нестационарности β на скорость в данном случае весьма незначительно (см. рис. 5). На второе решение существенное влияние оказывают оба параметра S и β.

Заключение. Представлены результаты исследования задачи о нестационарном течении жидкости вдоль мгновенно растягивающегося (сжимающегося) диска. Скорость поверхности сжимающегося диска выбрана таким образом, чтобы задача допускала существование точного автомодельного решения. Рассмотрены два случая: ускоренное течение ($\beta > 0$) и замедленное течение ($\beta < 0$). Устойчивое решение задачи в случае сжимающегося по линейному закону диска имеет место при $\beta = 0$. Установлено, что в случае ускоренного течения ($\beta > 0$) решение единственно и существует при определенной скорости всасывания поверхностью диска. В случае замедленного течения ($\beta < 0$) в отсутствие всасывания решение не существует, для существования решения необходима достаточно большая скорость всасывания. В случае умеренной скорости всасывания при всех значениях параметра $\beta < 0$ существует два решения, в то время как при достаточно большой скорости всасывания интервал значений параметра β, в котором существует два решения, уменьшается до значений $\beta \leqslant -1$. Таким образом, неединственность решения фактически обусловлена замедленным характером течения. В случае замедленного потока, по-видимому, решение всегда неединственно, для его существования требуются некоторые дополнительные условия (наличие достаточно больших градиента давления, кривизны поверхности, скорости всасывания и др.).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kármán T. V.** Uber laminaire und turbulente reibung // J. Appl. Math. Mech. 1921. V. 1. P. 233–252.
2. **Cochran W. G.** The flow due to a rotating disk // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1934. V. 30. P. 365–375.
3. **Mellor G. L., Chapple P. J., Stokes V. K.** On the flow between a rotating and a stationary disk // J. Fluid Mech. 1968. V. 31, N 1. P. 95–112.
4. **Miklavcic M., Wang C. Y.** Viscous flow due to a shrinking sheet // Quart. Appl. Math. 2006. V. 64, N 2. P. 283–290.
5. **Fang T.** Boundary layer flow over a shrinking sheet with power-law velocity // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2008. V. 51, N 25/26. P. 5838–5843.
6. **Wang C.** Stagnation flow towards a shrinking sheet // Intern. J. Nonlinear Mech. 2008. V. 43. P. 377–382.
7. **Fang T., Zhang J.** Closed-form exact solutions of MHD viscous flow over a shrinking sheet // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14, N 7. P. 2853–2857.
8. **Lok Y. Y., Pop I.** Wang's shrinking cylinder problem with suction near a stagnation point // Phys. Fluids. 2011. V. 23. 0831021-8.
9. **Mehmood A., Usman M.** Fascination of the shrinking sheet flow: A reality or a misconception // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2019. V. 60, N 3. P. 483–490.
10. **Mehmood A., Tabassum G. D., Usman M.** Unsteady self-similar flow over an impulsively started shrinking sheet: Flow augmentation with no separation // Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2020. V. 21, N 3/4. P. 1–7.
11. **Mehmood A., Tabassum G. D., Usman M.** Existence of multiple solutions for a shrinking surface flow subjected to no wall suction/injection // Intern. J. Mech. B. Fluids. 2020. V. 81. P. 124–128.
12. **Tabassum G. D., Mehmood A., Usman M., Dar A.** Multiple solutions for an unsteady stretching cylinder // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2020. V. 61, N 3. P. 439–446.
13. **Mehmood A.** Viscous flows: Stretching and shrinking of surfaces. S. l.: Springer, 2017.

Поступила в редакцию 25/V 2021 г.,
после доработки — 20/I 2022 г.
Принята к публикации 25/IV 2022 г.