УДК 523.582

Р. М. Гарипов

БЕЗВИХРЕВОЙ ДВИЖИТЕЛЬ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Получена формула для скорости перемещения шара. Шар движется в идеальной несжимаемой жидкости из состояния покоя за счет заданной нормальной составляющей скорости жидкости на проницаемой поверхности шара. Течение жидкости потенциальное.

В рамках потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости, хотя нет силы тяги, возможно движение (самодвижение) тел из состояния покоя за счет периодического изменения формы [1, 2]. В. Л. Сенницкий [3] и В. В. Пухначев [4] рассмотрели движения в вязкой жидкости за счет задания скорости жидкости на поверхности тела, последняя предполагается проницаемой. Для сферы оптимальные в смысле В. В. Пухначева течения оказались потенциальными. Представляет интерес идеальная постановка этой задачи. Тогда решение получается просто, но ответ нетривиален. В связи с этим возникает трудный вопрос (который здесь не рассматривается): имеются ли близкие решения в жидкости малой вязкости?

Пусть сфера S радиуса *1* (все переменные безразмерные) движется из состояния покоя в идеальной жидкости, плотность которой равна 1, вдоль оси координат x под действием заданной на S меняющейся во времени t нормальной скорости жидкости v_n (относительно S). Тогда потенциал скоростей абсолютного движения φ удовлетворяет граничному условию

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = v_n + \dot{x}_0\cos\theta = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(\cos\theta) + \dot{x}_0\cos\theta,$$

где $P_k(x)$ — полиномы Лежандра, $P_1(x) = x$ (течение осесимметрично) (см. рисунок); $\dot{x}_0$ — скорость центра сферы. Вычислим кинетическую энергию жидкости

$$T_ж = \frac{1}{2}\int\limits_{\text{вне } S} |\nabla\varphi|^2\, d\mathbf{x} = \frac{1}{2}\sum_{k\neq 1}\frac{\alpha_k c_k}{k+1} + \frac{\alpha_1}{4}(c_1 + \dot{x}_0)^2 \tag{1}$$

$$\left(\alpha_k = \int\limits_S P_k(\cos\theta)^2\, dS,\ \alpha_1 = \frac{4\pi}{3}\right).$$

Пусть P — суммарный импульс движения внутри S. Уравнение движения преобразуется к форме Лагранжа и один раз интегрируется: $P + \partial T_ж/\partial\dot{x}_0 = \mathrm{const} = 0$. Подставляя сюда выражение (1), получим

$$P + (2\pi/3)(\dot{x}_0 + c_1) = 0, \tag{2}$$

откуда ясно, что режим оптимальный при $c_k = 0$ ($k \neq 1$).

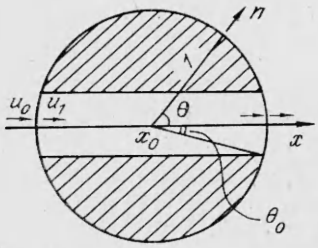
Конкретизируем вид v_n:

$$v_n = \begin{cases} u_0\cos\theta & \text{при } 0\leqslant\theta\leqslant\theta_0 \text{ и } \pi-\theta_0\leqslant\theta\leqslant\pi, \\ 0 & \text{при } \theta_0<\theta<\pi-\theta_0 \end{cases}$$

($0 < \theta_0 \leqslant \pi/2$ — заданный параметр). Элементарно вычисляется

$$c_1 = u_0(1 - \cos^3\theta_0), \tag{3}$$

при $\theta_0 < \pi/2$ будут и другие коэффициенты $c_k \neq 0$ ($k \neq 1$). Предположим, что внутри S в цилиндре радиуса $\sin\theta_0$ с осью x жидкость течет с постоянной скоростью u_1 (относительно S) и имеет плотность ρ_1. Если $\rho_1 \neq 1$,



то при входе в S через передний сегмент $\pi - \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ жидкость как бы мгновенно меняет свою температуру, а при выходе через задний сегмент $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ температура скачком возвращается к исходному значению. Закон сохранения массы дает $\rho_1 u_1 = u_0$. Обратим внимание на то, что, вообще говоря, на входном и выходном сегментах касательная составляющая скорости жидкости терпит разрыв. Если $(4\pi/3)V$ — объем полости внутри S, через которую протекает жидкость, $(4\pi/3)m$ — масса остальной твердой части шара, то

$$P = (4\pi/3)m\dot{x}_0 + (4\pi/3)V\rho_1(u_1 + \dot{x}_0). \tag{3'}$$

Подставив (3) и (3′) в (2), получим искомую формулу

$$\dot{x}_0 = -u_0(t)3V/[2(m + \rho_1 V) + 1] \quad (V = 1 - \cos^3\theta_0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воинов О. В., Петров А. Г.** О перемещении деформирующихся тел в идеальной жидкости из состояния покоя // ДАН СССР.— 1973.— Т. 212, № 5.
2. **Гарипов Р. М.** Движение рыб в идеальной жидкости без образования вихрей // Проблемы математики и механики.— Новосибирск: Наука, 1983.
3. **Сенницкий В. Л.** Пример обтекания самодвижущегося тела осесимметричным потоком жидкости // ПМТФ.— 1984.— № 4.
4. **Пухначев В. В.** Стоксово приближение в задаче обтекания самодвижущегося тела // Краевые задачи математической физики и их приложения.— Киев: Наук. думка, 1989.

г. Новосибирск *Поступила 23/XI 1988 г.*