

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ А. А. ИЛЬЮШИНА НА СЛУЧАЙ БОЛЬШИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

П. В. Трусов

(Пермь)

Одна из характерных тенденций в теории пластичности последних десятилетий — постоянно возрастающий интерес к геометрически нелинейным задачам. Центральной проблемой возникшей и развивающейся геометрически нелинейной теории пластичности (НТП) до настоящего времени остается установление определяющих соотношений. В большинстве работ (см., например, [1—5]), посвященных построению определяющих соотношений НТП, для этой цели используются уравнения теории пластического течения, основанные на принципе градиентальности и том или ином законе упрочнения (кинематическом, изотропном или комбинированном). Для выполнения требования объективности в уравнениях теории течения субстанциональные производные мер напряженного и деформированного состояний заменяются некоторыми объективными производными этих мер. Однако, как известно [6, 7 и др.], вышеуказанные соотношения с приемлемой точностью отражают процессы деформирования по траекториям малой кривизны. В данной работе рассматривается возможный вариант обобщения теории упругопластических процессов А. А. Ильюшина и полученных на ее основе частных теорий пластичности, пригодных для описания деформирования по сложным траекториям, на случай больших пластических деформаций.

1. Некоторые кинематические соотношения. Используется преимущественно тензорная (символическая) форма записи соотношений. Радиусы-векторы материальной частицы с лагранжевыми координатами (ξ^1, ξ^2, ξ^3) в отсчетной (в момент времени t_0) \mathcal{H}_0 и актуальной \mathcal{H}_t конфигурациях обозначаются соответственно как $\mathbf{R}_0(\xi^i)$ и $\mathbf{r}(\xi^i, t)$, а градиенты места в \mathcal{H}_0 и \mathcal{H}_t — $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}_0$ и $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}$.

В дальнейшем применяется полярное разложение градиента места [8, 9]

$$(1.1) \quad \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V},$$

где $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 U_i \overset{\circ}{\mathbf{p}}^i \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$, $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 V_i \widehat{\mathbf{p}}^i \widehat{\mathbf{p}}_i$ — левый и правый тензоры искажений соответственно; $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i = \overset{\circ}{\mathbf{p}}^i$ и $\widehat{\mathbf{p}}_i = \widehat{\mathbf{p}}^i$ — их главные векторы;

$$(1.2) \quad \mathbf{R} = \overset{\circ}{\mathbf{p}} \widehat{\mathbf{p}}^i, \quad \mathbf{R}^T = \widehat{\mathbf{p}} \overset{\circ}{\mathbf{p}}^i$$

— тензор ротации и транспонированный к нему. В качестве мер деформации взяты тензоры деформации Генки $\overset{\circ}{\mathbf{N}} = \sum_{i=1}^3 \ln U_i \overset{\circ}{\mathbf{p}}^i \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$, $\widehat{\mathbf{N}} = \sum_{i=1}^3 \ln V_i \widehat{\mathbf{p}}^i \widehat{\mathbf{p}}_i$, а меры напряженного состояния — тензор напряжений Коши σ [8, 9].

В определяющих соотношениях НТП наряду с мерами напряженного и деформированного состояний применяются также меры скоростей их изменения. В качестве последних не могут быть использованы, например, субстанциональные производные $\dot{\sigma}$ и $\dot{\widehat{\mathbf{N}}}$ в силу их неиндифферентности [9, 10]. Выбор объективных (индифферентных) мер скоростей изменения напряжений и деформаций требует анализа их геометрического смысла и связан со способом разложения движения на квазитвердое («жесткое») и деформационное, причем подобное разложение может быть осуществлено бесчисленным множеством способов. Как показано в [10], распространенные в НТП виды индифферентных производных представляют собой относительные скорости изменения соответствующих тензоров в выбранной подвижной (и, вообще говоря, деформируемой) системе координат. При этом обычно полагается, что движение последней описывает квазитвердое движение. В предлагаемой работе для выделения квазитвердого движения используется полярное разложение градиента места (1.1).

Рассмотрим движение материальной частицы M с малой окрестностью, напряженно-деформированное состояние (НДС) которой можно считать однородным. Для простоты положим систему отсчета $Ox^1x^2x^3$ декартовой ортогональной с ортонормированным базисом $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}^i$, $i = \overline{1,3}$. Наряду с лагранжевыми системами $O\xi^1\xi^2\xi^3$ с базисами \mathbf{e}_i (в \mathcal{K}_0) и $\widehat{\mathbf{e}}_i$ (в \mathcal{K}_t) введем локальную подвижную жесткую систему координат $M\xi^1\xi^2\xi^3$, которую также будем считать декартовой ортогональной, с базисом $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}^i$. В отсчетной конфигурации \mathcal{K}_0 будем полагать векторы базиса \mathbf{q}_i совпадающими с \mathbf{k}_i , $\mathbf{q}_i|_{t=t_0} = \mathbf{q}_i^0 = \mathbf{k}_i$, $i = \overline{1,3}$.

В соответствии с используемым способом разложения движения частицы с окрестностью ее квазитвердое движение описывается движением системы $M\xi^1\xi^2\xi^3$, ориентация последней относительно системы отсчета в каждый момент времени определяется тензором ротации R :

$$(1.3) \quad \mathbf{q}_i = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{q}_i^0 = \mathbf{q}_i^0 \cdot \mathbf{R} = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{R}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Из соотношений (1.3) нетрудно видеть, что тензор ротации может быть определен отличным от (1.2) образом:

$$(1.4) \quad \mathbf{R} = \mathbf{q}_i^0 \mathbf{q}^i, \quad \mathbf{R}^T = \mathbf{q}_i \mathbf{q}^{0i}.$$

В (1.2) каждый из векторов, входящих в диадное произведение, в общем случае движения изменяет свою ориентацию, а в (1.4) вектор \mathbf{q}_i^0 фиксирован по отношению к материальным волокнам в \mathcal{K}_0 . В каждый момент времени движение системы $M\xi^1\xi^2\xi^3$ можно представить бесконечно малым поступательным перемещением со скоростью \mathbf{v}_M и бесконечно малым поворотом с угловой скоростью, соответствующей тензору спина Ω [9]:

$$(1.5) \quad \dot{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{R} = -\mathbf{R}^T \cdot \dot{\mathbf{R}} = -\Omega^T.$$

Из (1.4) и (1.5) с учетом сделанного выше замечания нетрудно показать, что $\dot{\Omega} = \dot{\mathbf{q}}_i \mathbf{q}^i$, так что

$$(1.6) \quad \dot{\mathbf{q}}_i = \Omega \cdot \mathbf{q}_i.$$

Выбор подвижной системы координат, отвечающей за квазитвердое движение, однозначно определяет деформационное движение: под последним понимается движение среды относительно введенной подвижной системы. Мерами скоростей изменения напряженного и деформированного состояний при этом выступают относительные скорости изменения мер напряженного и деформированного состояний. При используемом в настоящей работе способе разложения движения относительные скорости изменения σ и $\widehat{\mathbf{N}}$ представляют собой так называемые [11] производные Зарембы:

$$(1.7) \quad \sigma^Z = \dot{\sigma} + \sigma \cdot \Omega - \Omega \cdot \sigma;$$

$$(1.8) \quad \widehat{\mathbf{N}}^Z = \dot{\widehat{\mathbf{N}}} + \widehat{\mathbf{N}} \cdot \Omega - \Omega \cdot \widehat{\mathbf{N}}.$$

Полагая собственные векторы $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$, $\widehat{\mathbf{p}}_i$ тензоров $\overset{\circ}{\mathbf{N}}$, $\widehat{\mathbf{N}}$ непрерывными вектор-функциями времени с непрерывными первыми производными, можно определить тройку ортонормированных векторов $\mathbf{p}_i = \lim_{t \rightarrow t_0} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i = \lim_{t \rightarrow t_0} \widehat{\mathbf{p}}_i$. Векторы \mathbf{p}_i для каждого процесса деформирования фиксированы по отношению к материальным волокнам в \mathcal{K}_0 и представляют собой, как можно показать, главные векторы тензора деформации скорости \mathbf{D} в момент t_0 . Тогда тензоры ротации \mathbf{R}_U и \mathbf{R}_V собственных векторов $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$ и $\widehat{\mathbf{p}}_i$ из начального в текущее положение можно определить соотношениями

$$(1.9) \quad \mathbf{R}_U = \mathbf{p}_k \overset{\circ}{\mathbf{p}}^k, \quad \mathbf{R}_U^T = \overset{\circ}{\mathbf{p}}_k \mathbf{p}^k, \quad \mathbf{R}_V = \mathbf{p}_k \widehat{\mathbf{p}}^k, \quad \mathbf{R}_V^T = \widehat{\mathbf{p}}_k \mathbf{p}^k,$$

при этом

$$(1.10) \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_U^T \cdot \mathbf{R}_V, \quad \mathbf{R}^T = \mathbf{R}_V^T \cdot \mathbf{R}_U.$$

Спины Ω_U и Ω_V триад $\mathring{\mathbf{p}}_i$ и $\widehat{\mathbf{p}}_i$ выразим в виде

$$(1.11) \quad \Omega_U = \dot{\mathbf{R}}_U^T \cdot \mathbf{R}_U, \quad \Omega_V = \dot{\mathbf{R}}_V^T \cdot \mathbf{R}_V,$$

так что

$$(1.12) \quad \dot{\mathring{\mathbf{p}}}_i = \Omega_U \cdot \mathring{\mathbf{p}}_i = -\mathring{\mathbf{p}}_i \cdot \Omega_U, \quad \dot{\widehat{\mathbf{p}}}_i = \Omega_V \cdot \widehat{\mathbf{p}}_i = -\widehat{\mathbf{p}}_i \cdot \Omega_V.$$

С использованием (1.5), (1.10), (1.11)

$$(1.13) \quad \Omega = \Omega_V - \mathbf{R}^T \cdot \Omega_U \cdot \mathbf{R}.$$

С учетом (1.12) из выражения (1.8) и представления тензоров $\mathring{\mathbf{H}}$, $\widehat{\mathbf{H}}$ через главные значения и собственные векторы получаем

$$(1.14) \quad \dot{\mathring{\mathbf{H}}} = \sum_{i=3}^3 \dot{\mathring{\mathbf{H}}}_i \mathring{\mathbf{p}}^i \mathring{\mathbf{p}}_i + \Omega_U \cdot \mathring{\mathbf{H}} - \mathring{\mathbf{H}} \cdot \Omega_U;$$

$$(1.15) \quad \dot{\widehat{\mathbf{H}}} = \sum_{i=3}^3 \dot{\widehat{\mathbf{H}}}_i \widehat{\mathbf{p}}^i \widehat{\mathbf{p}}_i + \widehat{\mathbf{H}} \cdot (\Omega - \Omega_V) - (\Omega - \Omega_V) \cdot \widehat{\mathbf{H}}.$$

В силу равенств $U_i = V_i \quad \forall t, i = \overline{1, 3}$, имеем $\dot{\mathring{\mathbf{H}}}_i = \dot{\widehat{\mathbf{H}}}_i \quad \forall t, i = \overline{1, 3}$, а следовательно (в предположении $\dot{\mathring{\mathbf{H}}}_i, \dot{\widehat{\mathbf{H}}}_i \in C^1([0, \infty)) \quad \forall i = \overline{1, 3}$), $\dot{\mathring{\mathbf{H}}}_i = \dot{\widehat{\mathbf{H}}}_i \quad \forall t, i = \overline{1, 3}$. Приведем, кроме того, очевидные соотношения между $\mathring{\mathbf{H}}$ и $\widehat{\mathbf{H}}$:

$$(1.16) \quad \mathring{\mathbf{H}} = \mathbf{R} \cdot \widehat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{R}^T, \quad \widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{R}^T \cdot \mathring{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{R} \quad \forall t,$$

откуда, в частности, следует, что $I_1(\mathring{\mathbf{H}}) = I_1(\widehat{\mathbf{H}}) \quad \forall t$, где $I_1(\cdot)$ означает 1-й инвариант соответствующего тензора. Для практического применения представляется удобным приведенное в [10] выражение $\widehat{\mathbf{H}}^Z$ через текущие параметры процесса деформирования (градиент скорости, главные значения и главные векторы \mathbf{U} и \mathbf{V}), которое воспроизведено ниже вместе с выражением спина Ω :

$$(1.17) \quad \widehat{\mathbf{H}}^Z = \mathbf{D} + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^3 \left\{ \left[\frac{2V_k V_i}{V_k^2 - V_i^2} \ln \left(\frac{V_k}{V_i} \right) - 1 \right] (\widehat{\mathbf{p}}^i \cdot \mathbf{D} \cdot \widehat{\mathbf{p}}^k) \widehat{\mathbf{p}}_k \widehat{\mathbf{p}}_i \right\};$$

$$(1.18) \quad \Omega = \mathbf{W} + \sum_{i,k=1}^3 \left[\frac{V_i - V_k}{V_i + V_k} (\widehat{\mathbf{p}}^i \cdot \mathbf{D} \cdot \widehat{\mathbf{p}}^k) \widehat{\mathbf{p}}^k \widehat{\mathbf{p}}^i \right],$$

где \mathbf{W} — тензор вихря; \mathbf{D} — тензор деформации скорости.

З а м е ч а н и е 1. В теории деформаций МДТГ существуют меры деформации, имеющие одинаковые главные значения, но различные триады главных векторов ($\mathring{\mathbf{p}}_i$ и $\widehat{\mathbf{p}}_i$), преобразующиеся с использованием тензора ротации \mathbf{R} . К таким мерам (будем называть их ассоциированными) относятся левый \mathbf{U} и правый \mathbf{V} тензоры искажения, логарифмические меры $\mathring{\mathbf{H}}$ и $\widehat{\mathbf{H}}$, меры Коши — Грина $\mathring{\mathbf{G}}$ и Фингера $\widehat{\mathbf{G}}^{-1} = \mathbf{F}$, обратная к мере Коши — Грина $\mathring{\mathbf{G}}^{-1}$ и мера Альманси $\widehat{\mathbf{G}}$. Обозначая в каждой паре первую как $\mathring{\mathbf{A}}$, а вторую $\widehat{\mathbf{A}}$, нетрудно показать, что соотношение вида (1.16) справедливо для каждой пары:

$$(1.16') \quad \mathring{\mathbf{A}} = \mathbf{R} \cdot \widehat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{R}^T, \quad \widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{R}^T \cdot \mathring{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{R}.$$

Используя правила преобразования тензоров при жестком движении, можно также убедиться в справедливости следующего утверждения:

если тензор $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$ инвариантен по отношению к жесткому движению [10], то тензор \mathbf{A} индифферентен, и наоборот.

З а м е ч а н и е 2. Ортогональный тензор \mathbf{R} , сопровождающий деформацию, использовался В. И. Левитасом (см., например, [12]) при построении определяющих соотношений, где его применение обосновывалось другими соображениями: полагалось, что известно соотношение между тензором напряжений Коши, его материальной производной и тензором деформации скорости в случае деформирования «без вращения». Затем на данное движение накладывалось жесткое перемещение, при этом жесткий поворот считался отвечающим тензору ротации \mathbf{R} , что ведет к соответствующим преобразованиям исходных уравнений к форме, удовлетворяющей требованию индифферентности.

2. Об образе процесса нагружения. Одним из наиболее важных в теории упругопластических процессов является понятие образа процесса нагружения [13]. В случае малых деформаций (и поворотов) траектория деформации и вектор напряжений определяются компонентами соответствующих девиаторов в базисе системы отсчета. Однако при использовании индифферентных мер деформаций и напряжений построенный таким способом образ процесса нагружения неиндифферентен (и неинвариантен по отношению к жесткому движению) [14], что делает неприемлемым подобное определение образа процесса нагружения для НТП.

Один из возможных способов построения образа процесса — использование для этой цели компонент инвариантных по отношению к жесткому движению мер напряженного и деформированного состояний в базисе отсчетной лагранжевой системы координат. Однако известные тензоры напряжений [8, 9], определенные в терминах \mathcal{K}_0 , не имеют такого ясно выраженного физического смысла, как тензор напряжений Коши σ , что, естественно, создает трудности интерпретации необходимых экспериментальных данных. Кроме того, первые инварианты указанных тензоров напряжений (например, 2-го тензора Пиола — Кирхгофа) не характеризуют среднее напряжение, что лишает известного физического смысла разложение тензоров напряжений на шаровую и девиаторную части. Заметим, что и два остальных инварианта упомянутых тензоров напряжений не имеют смысла соответствующих инвариантов тензора σ [13].

В связи с вышесказанным в настоящей работе предлагается вариант построения траектории деформации и вектора напряжений, использующий тензор деформаций Генки $\hat{\mathbf{N}}$ и тензор напряжений Коши σ , компоненты которых в терминах актуальной конфигурации \mathcal{K}_t имеют ясно выраженный физический смысл.

Обычным образом [13] вводятся векторные пространства деформаций \mathcal{E}^5 и напряжений Σ^5 . Однако векторы деформаций \mathbf{e} и напряжений Σ находятся по компонентам девиаторов деформаций $\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{N}} - \frac{1}{3} I_1(\hat{\mathbf{N}})\mathbf{E}$ и напряжений $\mathbf{S} = \sigma - \frac{1}{3} I_1(\sigma)\mathbf{E}$ в базисе \mathbf{q}_i подвижной системы координат $M\xi^1\xi^2\xi^3$. Покажем индифферентность вектора напряжений, для чего достаточно доказать неизменность компонент тензора σ в базисе \mathbf{q}_i при наложении произвольного жесткого движения.

Рассмотрим движения $\mathbf{r}(\xi^i, t)$ и $\mathbf{r}'(\xi^i, t)$, отличающиеся на жесткое перемещение [9]:

$$(2.1) \quad \mathbf{r}'(\xi^i, t) = \mathbf{r}_0'(t) + [\mathbf{r}(\xi^i, t) - \mathbf{r}_0(t)] \cdot \mathbf{O}(t).$$

В этом случае справедливы соотношения

$$(2.2) \quad \sigma'(\mathbf{r}') = \mathbf{O}^T \cdot \sigma(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{O};$$

$$(2.3) \quad \mathbf{R}'(\mathbf{r}') = \mathbf{R}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{O}, \quad (\mathbf{R}'(\mathbf{r}'))^T = \mathbf{O}^T \cdot (\mathbf{R}(\mathbf{r}))^T.$$

Будем полагать отсчетную конфигурацию \mathcal{K}_0 одной и той же для движений \mathbf{r} и \mathbf{r}' , в силу чего

$$(2.4) \quad \mathbf{q}_i^0(\mathbf{r}') = \mathbf{q}_i^0(\mathbf{r}), \quad i = \overline{1, 3}.$$

Напомним, что векторы \mathbf{q}_i^0 направлены вдоль взаимно перпендикулярных фиксированных в \mathcal{K}_0 материальных волокон. Тогда компоненты тензора σ в базисах $\mathbf{q}_i(\mathbf{r})$ и $\mathbf{q}_i(\mathbf{r}')$ определяются соответственно соотношениями

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \mathbf{q}_i \cdot \sigma \cdot \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_i^0 \cdot (\mathbf{R} \cdot \sigma \cdot \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{q}_j^0, \\ \sigma'_{ij} &= \mathbf{q}'_i \cdot \sigma \cdot \mathbf{q}'_j = \mathbf{q}_i^0 \cdot (\mathbf{R}' \cdot \sigma \cdot \mathbf{R}'^T) \cdot \mathbf{q}_j^0 = \\ &= \mathbf{q}_i^0 \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{q}_j^0 = \sigma_{ij}, \quad i, j = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Таким образом, вектор напряжений Σ , построенный по компонентам тензора σ (или девиатора \mathbf{S}) в базисе \mathbf{q}_i , индифферентен.

Аналогичным образом можно установить индифферентность траектории деформации, однако воспользуемся для этого иным способом. Отметим прежде всего, что траектория деформации, построенная по компонентам меры деформации, инвариантной по отношению к жесткому движению, в любом неподвижном базисе в \mathcal{K}_0 , не изменяется при наложении жесткого движения. Для построения траектории деформации может быть использован ассоциированный с $\hat{\mathbf{N}}$ тензор деформации $\hat{\mathbf{N}}$.

У т в е р ж д е н и е 1. Траектория деформации, построенная с использованием компонент тензора $\hat{\mathbf{N}}$ в базисе \mathbf{q}_i^0 , совпадает с траекторией деформации, определяемой компонентами тензора $\hat{\mathbf{N}}$ в базисе \mathbf{q}_i . Доказательство сформулированного утверждения сводится к установлению соотношения

$$(2.6) \quad \mathbf{q}_i^0 \cdot \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{q}_j^0 = \mathbf{q}_i \cdot \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{q}_j, \quad i, j = \overline{1, 3},$$

которое немедленно следует из (1.16) с учетом (1.4). Направление касательной к траектории, построенной по компонентам $\hat{\mathbf{N}}$ в базисе \mathbf{q}_i^0 , устанавливается по компонентам материальной производной $\dot{\hat{\mathbf{N}}}$ в том же базисе.

У т в е р ж д е н и е 2. Направление касательной к траектории деформации, построенной по компонентам $\mathbf{q}_i \cdot \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{q}_j$, совпадает с вектором \mathfrak{z}^Z , определяемым по компонентам производной Зарембы $\hat{\mathbf{h}}^Z$ в базисе \mathbf{q}_i . С учетом утверждения 1 и сделанного выше замечания доказательство утверждения 2 сводится к выводу соотношения

$$(2.7) \quad \mathbf{q}_i^0 \cdot \dot{\hat{\mathbf{N}}} \cdot \mathbf{q}_j^0 = \mathbf{q}_i \cdot \hat{\mathbf{h}}^Z \cdot \mathbf{q}_j, \quad i, j = \overline{1, 3}.$$

Действительно, с использованием (1.3), (1.13)–(1.15) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i^0 \cdot \dot{\hat{\mathbf{N}}} \cdot \mathbf{q}_j^0 &= \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{R}^T \cdot \dot{\hat{\mathbf{N}}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_i \cdot \left\{ \sum_{k=1}^3 \dot{\hat{H}}_k \widehat{\mathbf{p}}^k \widehat{\mathbf{p}}^k - \right. \\ &\left. - (\Omega - \Omega_V) \cdot \hat{\mathbf{N}} + \hat{\mathbf{N}} \cdot (\Omega - \Omega_V) \right\} \cdot \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_i \cdot \hat{\mathbf{h}}^Z \cdot \mathbf{q}_j. \end{aligned}$$

Следовательно, образ процесса нагружения [13], определяемый по компонентам σ и $\hat{\mathbf{N}}$ в базисе \mathbf{q}_i подвижной системы $M\zeta^1\zeta^2\zeta^3$, индифферентен. В соответствии с определением касательной к траектории деформации элементарная длина дуги последней

$$(2.8) \quad ds = (\mathfrak{z}^Z \cdot \mathfrak{z}^Z)^{1/2} dt = (\hat{\mathbf{h}}^Z : \hat{\mathbf{h}}^Z)^{1/2} dt.$$

Тогда длина дуги $\forall t$

$$(2.9) \quad s = \int_{t_0}^t (\mathfrak{z}^Z \cdot \mathfrak{z}^Z)^{1/2} d\tau = \int_{t_0}^t (\widehat{\mathfrak{h}}^Z : \widehat{\mathfrak{h}}^Z)^{1/2} d\tau.$$

Угол сближения [7] ϑ находится из соотношения

$$(2.10) \quad \cos \vartheta = \frac{\Sigma \cdot \mathfrak{z}^Z}{|\Sigma| |\mathfrak{z}^Z|} = \frac{S : \widehat{\mathfrak{h}}^Z}{(S : S)^{1/2} (\widehat{\mathfrak{h}}^Z : \widehat{\mathfrak{h}}^Z)^{1/2}}.$$

Все параметры кривизны и кручения траектории деформации определяются, естественно, также для траектории, построенной в терминах подвижной системы координат $M \zeta^1 \zeta^2 \zeta^3$.

3. Определяющие соотношения. Предлагаемые конституитивные уравнения, естественно, должны удовлетворять общим требованиям (постулатам) теории определяющих соотношений [8, 15]. Однако известны примеры построения физических уравнений, удовлетворяющих всем общим постулатам, но дающих нереалистичное описание процессов упругопластического деформирования (см., например, [3]). Поэтому в настоящей работе кроме ограничений на вид конституитивных соотношений, накладываемых вышеуказанными общими постулатами, вводится ряд дополнительных требований, носящих конструктивный характер:

а) при малых градиентах перемещений физические уравнения НТП совпадают с соотношениями частных теорий пластичности, сформулированных на основе теории упругопластических процессов [6, 7, 13];

б) используемые меры напряженного и деформированного состояний и скоростей их изменения допускают обычное разложение (в виде суммы шаровых и девиаторных составляющих) на части, отвечающие за изменение объема и формы;

в) применяемые объективные меры скоростей напряжений и деформаций коротационны, т. е. представляют собой относительные скорости изменения напряжений и деформаций, фиксируемые одним и тем же наблюдателем (движущимся или неподвижным);

г) при построении образа процесса нагружения в терминах актуальной конфигурации выбор подвижной системы координат $M \zeta^1 \zeta^2 \zeta^3$ осуществляется таким образом, чтобы движение системы $M \zeta^1 \zeta^2 \zeta^3$ характеризовало квазитвердое (бездеформационное) перемещение одной и той же тройки материальных волокон, фиксированных в \mathcal{K}_0 . Напомним, что указанное перемещение в общем случае движения деформируемой среды не является действительно реализующимся и понимается лишь как способ разложения движения. При этом после перевода недеформированной тройки волокон из положения, занимаемого ею в \mathcal{K}_0 , в положение в \mathcal{K}_t (которое совпадает с $M \zeta^1 \zeta^2 \zeta^3$) и деформирования рассматриваемые волокна уже не ортогональны друг другу и ориентированы, вообще говоря, произвольным образом относительно $M \zeta^1 \zeta^2 \zeta^3$. Компоненты выбранной меры деформации, фиксируемые в произвольный момент времени t наблюдателем в системе $M \zeta^1 \zeta^2 \zeta^3$ и характеризующие изменение длин и углов между волокнами одной и той же тройки (в течение всего времени процесса), дают изображающую точку траектории деформации в пятимерном девиаторном (или изоморфном векторном) пространстве. Заметим, что требования «б» и «г» уже использованы в п. 2 при введении образа процесса нагружения.

В данной работе рассматриваются определяющие соотношения скоростного типа, которые для различных случаев деформирования (по траекториям с изломом, малой и средней кривизны) могут быть записаны однотипно [10, 16]:

$$(3.1) \quad \sigma^Z = F_1 : \dot{\mathfrak{H}}^Z + B \dot{\Theta} + R,$$

где F_1 — четырехвалентный индифферентный тензор свойств; Θ — температура; B, R — двухвалентные индифферентные тензоры. Конкретные выражения тензоров F_1, B, R находятся в соответствии с видом траекто-

рии деформации и приведены в [16]. Например, в случае изотермического деформирования по траектории малой кривизны тензор \mathbf{B} нулевой,

$$(3.2) \quad \mathbf{F}_1 = \frac{1}{2} \left[\Phi'(s) - \Phi(s) \dot{\widehat{H}}_n^Z / (\widehat{H}_n^Z)^2 \right] (\mathbf{C}_{II} + \mathbf{C}_{III}) + \\ + \frac{1}{3} \left[K_1 - \Phi'(s) + \Phi(s) \dot{\widehat{H}}_n^Z / (\widehat{H}_n^Z)^2 \right] \mathbf{C}_I;$$

$$(3.3) \quad \mathbf{R} = \Phi(s) \widehat{\mathbf{h}}^{ZZ} / \widehat{H}_n^Z.$$

Здесь $\Phi(s)$ — универсальная функция материала; $\Phi'(s) = d\Phi/ds$; \mathbf{C}_I , \mathbf{C}_{II} , \mathbf{C}_{III} — изотропные тензоры 4-го ранга [9]; верхние индексы \cdot, Z и ZZ обозначают материальную производную, производную Зарембы и двойную производную Зарембы; $\widehat{\mathbf{h}}^{ZZ} = \widehat{\mathbf{h}}^Z - \mathbf{\Omega} \cdot \widehat{\mathbf{h}}^Z + \widehat{\mathbf{h}}^Z \cdot \mathbf{\Omega}$; $K_1 = Ke^{I_1(\widehat{\mathbf{H}})}$ (K — модуль объемного сжатия); $\widehat{H}_n^Z = (\widehat{\mathbf{h}}^Z : \widehat{\mathbf{h}}^Z)^{1/2}$; $\dot{\widehat{H}}_n^Z = (\widehat{\mathbf{h}}^Z : \dot{\widehat{\mathbf{h}}^Z}) / (\widehat{H}_n^Z)$.

Нетрудно убедиться, что представленные определяющие соотношения удовлетворяют вышеуказанным дополнительным требованиям. Решение вопроса о приемлемости предлагаемых физических уравнений требует, вообще говоря, проведения экспериментальных исследований на сложное нагружение при больших деформациях. В настоящее время, к сожалению, подобные эксперименты отсутствуют. Поэтому обратимся к тестовой задаче простого сдвига.

4. Результаты решения тестовой задачи. Остановимся прежде всего на моделях квазиупругих материалов. Вероятно, одна из первых моделей данного типа — предложенное Трудселлом, Прагером, Грином [15, 17, 18] соотношение для гипопругого материала

$$(4.1) \quad \boldsymbol{\sigma}^J = \mathbf{\Pi} : \mathbf{D}_t$$

где J — производная в смысле Яуманна — Нолла; $\mathbf{\Pi}$ — тензор свойств 4-го ранга, компоненты которого суть постоянные. Как отмечается в ряде работ (например, [3, 10 и др.]), решение задачи простого сдвига с использованием физического уравнения (4.1) обнаруживает осцилляции компонент тензора напряжений (в базисе системы отсчета), что не отвечает монотонному характеру нагружения. На основании данного факта в большинстве работ [3, 12, 19 и др.] использование яуманновской производной в определяющих соотношениях признано неприемлемым, а в качестве альтернативного соотношения предлагается следующее:

$$(4.2) \quad \boldsymbol{\sigma}^Z = \mathbf{\Pi} : \mathbf{D}_t$$

Результаты, полученные для задачи простого сдвига с применением физического уравнения (4.2), приведены на рис. 1 (здесь и далее компоненты тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ определены в ортонормированном декартовом базисе системы отсчета). Как видно из рисунка, результаты решения в этом случае носят монотонный характер. Однако при стремлении параметра t к бесконечности рассматриваемый процесс деформирования становится эквивалентным сжатию гладкими плитами в направлении оси x^2 и растяжению вдоль оси x^1 . Следует ожидать, что в этом случае $\sigma_{11} \rightarrow \infty$, $\sigma_{22} \rightarrow -\infty$, $\sigma_{12} \rightarrow 0$, что не отвечает решению на основе (4.2).

Отметим, что соотношения вида (4.1), (4.2) не удовлетворяют требованию «в» коротационности. На рис. 2 даны аналогичные результаты, полученные с применением соотношений

$$(4.3) \quad \boldsymbol{\sigma}^J = \mathbf{\Pi} : \widehat{\mathbf{H}}^J, \quad \boldsymbol{\sigma}^Z = \mathbf{\Pi} : \widehat{\mathbf{H}}^Z,$$

удовлетворяющих отмеченному требованию. При этом решения тождественно совпадают, что является следствием изотропности тензора $\mathbf{\Pi}$. Из рис. 2 видно, что функции $\sigma_{11}(t)$, $\sigma_{22}(t)$ качественно отвечают приведенным на рис. 1, однако различие в поведении $\sigma_{12}(t)$ весьма существенно.

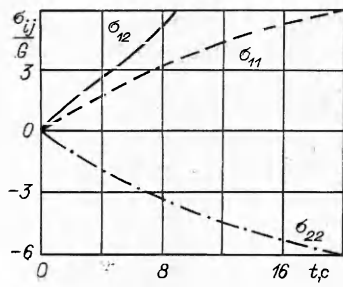


Рис. 1

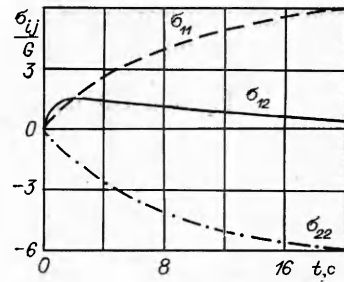


Рис. 2

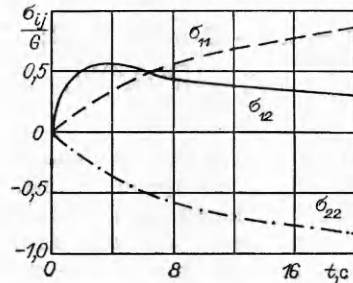


Рис. 3

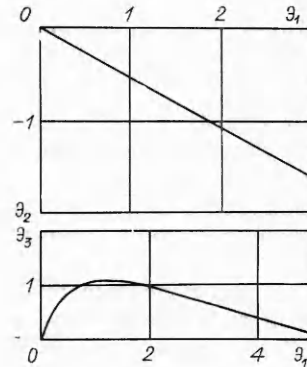


Рис. 4

При этом зависимость $\sigma_{12}(t)$, найденная на основе (4.3), качественно представляется более соответствующей рассматриваемому процессу деформирования.

На рис. 3 представлены аналогичные результаты для упругопластической модели (теория малой кривизны, физические уравнения имеют вид (3.1)–(3.3)). Характер изменения компонент тензора напряжений подобен приведенному на рис. 2 для квазиупругого материала. Изображенная на рис. 4 траектория деформации, построенная по компонентам тензора Генки в базисе q_i , подтверждает приемлемость использования для рассматриваемого процесса теории малой кривизны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитас В. И. К теории больших упругопластических деформаций // ДАН УССР Сер. А.— 1983.— № 11.
2. Lubarda V. A., Lee E. H. A correct definition of elastic and plastic deformation and computational significance // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1981.— V. 48, N 1.
3. Dafalias Y. E. Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1983.— V. 50, N 3.
4. Sidoroff F. Incremental constitutive equation for large strain elasto-plasticity // Int. J. Engng Sci.— 1982.— V. 20, N 1.
5. Kleiber M. A note on finite strain theory of elasto-plasticity // Acta mech.— 1984.— V. 50, N 3–4.
6. Ильюшин А. А., Ленский В. С. О соотношениях и методах современной теории пластичности // Успехи механики деформируемых сред.— М.: Наука, 1975.
7. Васин Р. А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // Упругость и неупругость.— М.: Изд-во МГУ, 1971.— Вып. 1.
8. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды.— 2-е изд.— М.: Изд-во МГУ, 1978.
9. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости.— М.: Наука, 1980.
10. Трусов П. В., Мулюков В. В., Онискив В. Д. Коротационные производные и определяющие соотношения в теории больших деформаций.— Пермь, 1985.— Деп. в ВИНТИ 20.11.85, № 8020—В.
11. Maaskant R., Chaaban A., Godolek P. E. G. et al. Inter-relationships among stress rates // Mech. Res. Commun.— 1984.— V. 11, N 1.
12. Левитас В. И. Об объективности уравнений состояния, содержащих производные по времени различных тензоров.— Киев, 1984.— Деп. в ВИНТИ 16.10.84, № 6738—84.
13. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории.— М.: Изд-во АН СССР, 1963.

14. Трусов П. В. Большие упругопластические деформации: некоторые аспекты теории и приложения // Прикл. проблемы прочности и пластичности/Всесоюз. межвуз. сб.— Горький: Горьк. ун-т, 1984.— Вып. 28.
15. Труделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.— М.: Мир, 1975.
16. Трусов П. В. О построении образа процесса нагружения и методе корректирующего анализа при исследовании больших пластических деформаций.— Пермь, 1984.— Деп. в ВИНТИ 21.08.84, № 5939—84.
17. Прагер В. Введение в механику сплошных сред.— М.: ИЛ, 1963.
18. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды.— М.: Мир, 1965.
19. Dienes J. K. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies // Acta mech.— 1979.— V. 32, N 2.

Поступила 2/VII 1986 г.

УДК 539.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛУБИНЫ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ПРИ ДАВЛЕНИИ ПЛОСКОГО ШТАМПА НА ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Г. П. Пухначева
(Новосибирск)

Пусть в прямолинейную границу вдавливаются без трения плоский штамп длиной l , так что под штампом возникает распределенное давление q . Впервые подобная задача рассмотрена Прандтлем в предположении о непрерывности напряжения всюду, кроме точек у концов штампа, для постоянного условия текучести (см., например, [1]).

Пусть σ_1, σ_2 — главные напряжения в плоскости (x, y) . С помощью $2p = \sigma_1 + \sigma_2$ и $2\tau = \sigma_1 - \sigma_2$ любое условие текучести для изотропного материала может быть записано в виде $\tau = \tau(p)$.

Обозначая через ψ угол между первым главным направлением и осью x , выразим компоненты тензора напряжений через p, τ и ψ :

$$(1) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= p + \tau \cos 2\psi, & \sigma_y &= p - \tau \cos 2\psi, \\ \sigma_{xy} &= \tau \sin 2\psi. \end{aligned}$$

Подставив (1) в уравнения равновесия, получим следующую систему уравнений:

$$(2) \quad \begin{aligned} \partial(p + \tau \cos 2\psi)/\partial x + \partial(\tau \sin 2\psi)/\partial y &= 0, \\ \partial(\tau \sin 2\psi)/\partial x + \partial(p - \tau \cos 2\psi)/\partial y &= 0. \end{aligned}$$

Предположим, что $|\tau'| < 1$, тогда система (2) гиперболическая. Для нее можно выписать два семейства характеристик и соотношений вдоль них:

$$(\cos 2\psi + \tau')dy = (\sin 2\psi + \sqrt{1 - (\tau')^2})dx,$$

$$\psi + \int_{p_0}^p \frac{\sqrt{1 - (\tau')^2}}{2\tau} d\xi = r - \text{const},$$

$$(\cos 2\psi - \tau')dy = (\sin 2\psi - \sqrt{1 - (\tau')^2})dx,$$

$$\psi - \int_{p_0}^p \frac{\sqrt{1 - (\tau')^2}}{2\tau} d\xi = s - \text{const}.$$

Рассмотрим поля напряжений в плоскости течений (рисунок) и в плоскости характеристик. В области ABA_{11} возникает простейшее поле напряжений: $p_0 = \tau(p_0) - q$, $\psi = 0$, ей соответствует начало координат в плоскости характеристик. В области $A_{11}BA_{21}$ имеет место простая центрированная s -волна, а в $AA_{11}A_{12}$ — также простая центрированная