ПМТФ, № 3, 1961

ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ ФИЛЬТРАЦИИ В СЖИМАЕМЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Бан Акош, К. С. Басниев, В. Н. Николаевский

(Будапешт, Краснодар, Москва)

Изотермическое движение однородной жидкости в сжимаемых пористых средах описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \qquad u_i = -\frac{k_{ij}}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_i}, \qquad \rho = \rho(p) \tag{1}$$

Здесь p — давление в жидкости, u_i — скорость фильтрации, ρ — плотность жидкости, μ — ее вязкость, m — пористость, k_{ij} — проницаемость среды. Если пористая среда сжимаема и находится под действием внешней нагрузки, то $m = m(p, s_{kl})$, $k_{ij} = k_{ij}(p, s_{kl})$, где s_{kl} — компоненты тензора истинных напряжений в скелете среды. Учет этих зависимостей оказывается весьма существенным при изучении фильтрации жидкости при значительных перепадах давлений в средах, находящихся под нагрузкой.

В каждой точке пористой среды суммарное напряжение состояния T_{ij}, возникающее под действием внешней нагрузки, воспринимается частично скелетом среды, частично жидкостью

$$T_{ij} = p\delta_{ij} + s_{ij}^f, \qquad s_{ij}^f = (1-m)s_{ij} - (1-m)p\delta_{ij} \tag{2}$$

Здесь s_{ij}^f— тензор фиктивных напряжений в скелете среды [1], δ_{ij}—единичный тензор. Суммарные напряжения в трещиноватых пористых средах распределяются между жидкостью в трещинах, жидкостью в порах и скелетом среды. Считается [2, 3], что такие среды состоят из двух вложенных одна в другую однородных пористых сред, между которыми происходит обмен жидкостью. В первой среде роль зерен скелета играют блоки, а роль пор — трещины. Суммарные напряжения воспринимаются первой средой

$$S_{ij}(1-M) + MP\delta_{ij} = T_{ij}, \qquad S_{ij} = P\delta_{ij} + S_{ii}^f/(1-M) \tag{3}$$

где большими буквами обозначены параметры первой среды, в частности M — пористость первой среды, определенная как отношение объема трещин ко всему объему трещиноватой породы.

Величина S_{ij} играет роль суммарного напряжения для второй среды, сложенной из той же породы, что и блоки, т. е.

$$S_{ij} = s_{ij}^f + p\delta_{ij} = S_{ij}^f/(1-M) + P\delta_{ij} \tag{4}$$

При отборе жидкости из среды первоначальное давление p_1 понижается до величины p. Если внешняя нагрузка T_{ij} — величина постоянная во времени и по пространству среды, то при этом происходит увеличение части нагрузки, воспринимаемой скелетом среды, на величину

$$\Delta s_{kl}^f = -(p - p_1)$$

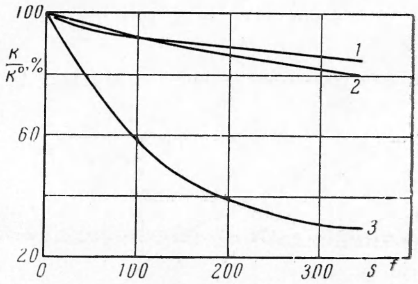
Будем рассматривать здесь упругие деформации пористой среды, при которых изменения параметров m и k_{ij} можно определить так:

$$m(p) - m(p_1) = m(p_1)\left[a(p - p_1) + b_{kl}\,\Delta s_{kl}^f\right] \tag{5}$$

$$k_{ij}(p) - k_{ij}(p_1) = \tfrac{1}{3}N(p_1)\left[c_{ij}(p - p_1) + d_{ijkl}\,\Delta s_{kl}^f\right] \tag{6}$$

Здесь $N(p_1)$ — значение первого инварианта тензора k_{ij} при $p = p_1$. Первые члены в правой части выражений (5) и (6) учитывают эффект сжатия зерен скелета среды, а вторые — эффект их взаимного смещения, причем последние обычно значительно больше первых. Параметры упругих связей среды a, b_{kl}, c_{ij}, d_{ijkl} — постоянные для рассматриваемых (до 100 *атм*) перепадов давлений.

Линейная зависимость пористости от напряжений в среде изучалась и использовалась при построении теорий упругого [4] и упруго-пластического [1] режимов фильтрации. Возможность представления зависимости проницаемости от напряжений s_{ij}^f согласно выражению (6) подтверждается рядом экспериментов [5, 6]. На фиг. 1 приведены типичные графики [6] зависимостей проницаемости k от компоненты фиктивного напряжения по оси, ортогональной направлению фильтрации. Здесь $k°$ — значение k в *миллидарси* при $s^f = 0$, $p°$ — среднее давление в образце (в *атм*), при котором измерялась k. Кривой *1* соответствуют значения $k° = 102$, $p° = 140$; кривой *2* — $k° = 37$, $p° = 1.4$; кривой *3* — $k° = 0.23$, $p° = 16.8$. Заметим, что нахождение параметров упругих связей путем рассмотрения истинного напряжения состояния скелета среды из-за сложностей внутренней структуры пористых сред также практически невыполнимо, как, например, вычисление коэффициента проницаемости в законе Дарси (1) путем интегрирования уравнений Навье — Стокса.



Фиг. 1

Уравнение состояния $\rho = \rho(p)$ в случае капельной жидкости обычно берется в линейном виде

$$\rho(p) - \rho(p_1) = (p - p_1)\,\rho(p_1) / F \tag{7}$$

Здесь F — модуль сжимаемости фильтрующейся жидкости. При фильтрации реальных газов, уравнение состояния записывается

$$\rho = p / (zRT) \tag{8}$$

где R — универсальная газовая постоянная, T — абсолютная температура, z — коэффициент сжимаемости. В некоторых работах [7] отмечалась необходимость учета зависимостей $z = z(p)$, а также $\mu = \mu(p)$. Имеющиеся экспериментальные данные [8, 9] позволяют считать, что при рассматриваемых перепадах давлений и при температурах (более 0° С) эти зависимости также весьма близки к линейным

$$z(p) - z(p_1) = (dz / dp)_{p_1} (p - p_1) \tag{9}$$

$$\mu(p) - \mu(p_1) = (d\mu / dp)_{p_1} (p - p_1) \tag{10}$$

Зависимость (10) имеет место и для капельных жидкостей [8-10].

Если воспользоваться выписанными здесь линейными соотношениями, а также равенствами

$$\partial p / \partial t = -\partial s_{kl}^f / \partial t, \qquad \partial p / \partial x_i = -\partial s_{kl}^f / \partial x_i \tag{11}$$

то из уравнений (1) можно получить искомое уравнение фильтрации. Однако для большей наглядности выпишем уравнение, справедливое для задач плоской фильтрации в пористом пласте, к кровле и подошве которого приложена равнораспределенная постоянная во времени нагрузка. В этом случае тензора T_{ij} и s_{ij}^f будут осесимметрично-изотропными тензорами, осью симметрии которых служит нормаль к плоскости пласта. Если эта нагрузка была приложена к пласту длительное время, то естественно считать, что проницаемость среды $k_{ij}(p)$, а также параметры упругих связей b_{kl}, c_{ij}, d_{ijkl} будут также осесимметрично-изотропными тензорами.

Однако в плоскости пласта эти характеристики обладают свойствами изотропии. Поэтому в выписанных ниже уравнениях, описывающих плоские, осредненные по мощности пласта h фильтрационные потоки, $k(p) = k_i(p)$, где индекс i означает номера осей в плоскости пласта.

В случае капельной жидкости система (1) сводится к уравнению

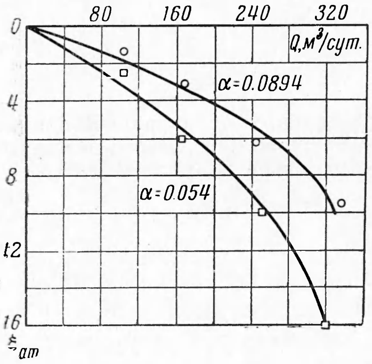
$$\rho(p_1)\left[\Lambda_1 + \Lambda_2(p-p_1)\right]\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k(p_1)\,\rho(p_1)}{\mu(p_1)}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[1+\alpha(p-p_1)\right]\frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad (12)$$

где постоянные коэффициенты Λ_1, Λ_2 и α весьма просто выражаются через константы исходных линейных соотношений (3)—(5) и (8)

$$\Lambda_1 = \frac{m(p_1)}{F} + \left(\frac{dm}{dp}\right)_{p_1} \qquad (13)$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{k}\frac{dk}{dp} + \frac{1}{F} - \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dp}\right)_{p_1}$$

$$\Lambda_2 = \left(\frac{dm}{dp}\frac{1}{F}\right)_{p_1} + \left(\frac{d^2m}{dp^2}\right)_{p_1} + \left(\frac{m}{\rho}\frac{d^2\rho}{dp^2}\right)_{p_1}$$



Фиг. 2

Проведенные оценки показали, что $\Lambda_1 \approx 2\cdot 10^{-4}$ $атм^{-1}$, $\Lambda_2 \approx 2\cdot 10^{-8}$ $атм^{-2}$. Так как рассматриваются такие фильтрационные потоки, в которых максимальное значение разности $(p - p_1)$ имеет порядок около сотни атмосфер, то величиной $\Lambda_2(p - p_1)$ можно по сравнению с Λ_1 пренебречь. В то же время, судя по экспериментальным данным, $\alpha = (1 \cdot 10^3 \div 3 \cdot 10^{-4})$ $атм^{-1}$, а потому величина $\alpha(p - p_1)$ может достигать значений до 0.1, а иногда и больших.

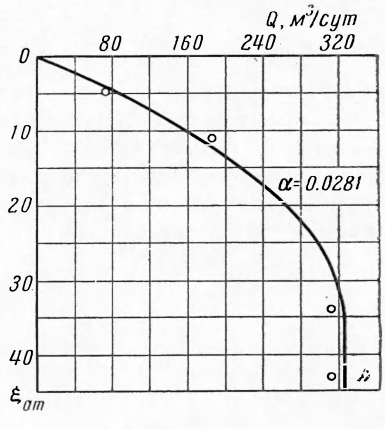
В силу этого будем считать, что процесс фильтрации в сжимаемых пористых средах описывается следующим нелинейным параболическим уравнением:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[1+\alpha(p-p_1)\right]\frac{\partial p}{\partial x_i}\right\} \qquad (14)$$

где $\varkappa$ — обычный коэффициент пьезопроводности [4].

Легко показать, что в этом случае фундаментальная формула для стационарного притока в скважину — формула Дюпюи — приобретает вид

$$Q = \frac{2\pi k(p_1)h}{\mu(p_1)}\,\frac{\zeta(1-0.5\alpha\zeta)}{ln(r_1/r_0)} \qquad (15)$$



Фиг. 3

Здесь $\zeta = p_1 - p_0$, p_0 — давление на забое скважин (при $r = r_0$), p_1 — пластовое давление (при $r = r_1$), h — мощность пласта. Аналогичным образом выписывается уравнение фильтрации реальных газов в сжимаемых пластах

$$(1 - Bp)\frac{\partial p}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[1 + C(p-p_1)\right]p\frac{\partial p}{\partial x_i}\right\} \qquad (16)$$

$$A = \frac{k(p_1)}{\mu(p_1)\,m(p_1)}, \qquad B = \left(\frac{1}{z}\frac{dz}{dp} - \frac{1}{m}\frac{dm}{dp}\right)_{p_1}, \qquad C = \left(\frac{1}{k}\frac{dk}{dp} - \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dp} - \frac{1}{z}\frac{dz}{dp}\right)_{p_1}$$

Для стационарного притока газа к скважине легко получить выражение объемного расхода газа, приведенного к забойным условиям:

$$Q_0 = \frac{\pi k(p_1)\, hz(p_0)}{\mu(p_1)\, p_0 z(p_1)} \frac{p_1^2 - p_0^2}{\ln(r_1/r_0)} \left(1 + \frac{2C}{3}\frac{p_0^2}{p_0 + p_1} - \frac{C}{3} p_1\right) \tag{17}$$

Фильтрация капельной жидкости в трещиноватых пластах описывается следующей системой уравнений

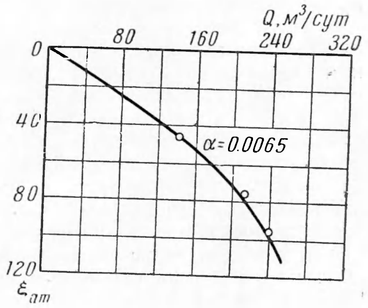
$$\frac{\partial M\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{K\rho}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x_i}\right) - q = 0, \qquad \frac{\partial m\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{k\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right) + q = 0 \tag{18}$$

Величина $q = \rho\xi(p - P)\mu^{-1}$ учитывает обмен жидкостью между средами, ξ — некоторая новая характеристика трещиноватой породы [2,3]. Воспользовавшись соотношениями (3), (4), (5)—(7), можно выписать уравнения (18) в более развернутом виде. Однако из-за громоздкости получающихся выражений ограничимся случаем, когда $M \ll m$ и $K \gg k$. При этом уравнения (18) сводятся к следующему уравнению:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{K(P)}{\xi}\frac{\partial}{\partial x_i}[1 + \alpha(P - P_1)]\frac{\partial P}{\partial x_i} = \varkappa\frac{\partial}{\partial x_i}[1 + \alpha(P - P_1)]\frac{\partial P}{\partial x_i} \tag{19}$$

здесь в параметры $\varkappa$ и α входят проницаемость системы трещин K и пористость системы блоков m. Уравнение (19) при $\alpha = 0$ переходит в уравнение, используемое работах [2,3]. В случае стационарных течений из-за пренебрежения проницаемостью блоков уравнение (19) аналогично уравнению стационарной фильтрации в обычных средах (14); приток жидкости к скважине в трещиноватом пласте также определяется формулой (15).

Наконец, если учитывать частично необратимый характер деформаций, предполагая зависимость компонент тензоров b_{kl} и d_{ijkl} от направления изменения нагрузки в точке пласта, то нетрудно обобщить полученные здесь уравнения на случай упруго-пластического режима фильтрации [1].



Фиг. 4

По формуле (15) был обработан ряд промысловых данных об установившемся притоке нефти к скважинам, забойное давление у которых было выше давления насыщения растворенного в нефти газа (фиг. 2—4). Параметр α определялся методом наименьших квадратов.

Поступила
24 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Крылов А. П. Об упруго-пластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 2.
2. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ДАН СССР, 1960, т. 132, № 3.
3. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 5.
4. Щелкачев В. Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. ДАН СССР, 1946, т. 52, № 2.
5. Fatt I., Davis D. H. Reduction in permeability with overburden pressure. Trans. AIMME, 1956, v. 195.
6. McLatchie A. S., Hemstock R. A. The effective compressibility of reservoir rock and its effects on permeability. J. Petrol. Technology, June, 1958.
7. Щелкачев В., Лапук Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1949.
8. Котяхов Ф. И. Основы физики нефтяного пласта. Пер. с англ. Гостоптехиздат, 1956.
9. Берчик Э. Дж. Свойства пластовых жидкостей. Гостоптехиздат, 1960.
10. Сергеевич В. И., Жузе Т. П., Честнов А. И. Влияние давления и температуры на вязкость водных растворов электролитов и пластовых вод. зв. АН СССР, ОТН, 1953, № 6.