УДК 532.517.4

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОДОЛЬНОЙ ОСИ ПРЯМОЙ КРУГЛОЙ ТРУБЕ

П. Г. Заец, А. Ф. Курбацкий*, А. Т. Онуфриев, С. В. Поросева**, Н. А. Сафаров, Р. А. Сафаров, С. Н. Яковенко*

Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный
* Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск
** Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Воздействие завихренности, образующейся в поперечном сечении турбулентного потока в прямолинейной круглой трубе при вращении ее относительно продольной оси, приводит к уменьшению по длине трубы величин турбулентных напряжений, энергии турбулентности, скорости диссипации. Излагаются результаты лабораторных экспериментов и вычислений по модели турбулентного переноса второго уровня замыкания. Модель, использующая систему уравнений переноса, в целом дает лучшее согласие с экспериментальными данными, чем модели с алгебраическими соотношениями для моментов второго порядка.

Введение. Воздействие массовых сил в закрученном течении (центробежное и кориолисово ускорения), подобное воздействию ускорения силы тяжести в стратифицированном потоке [1, 2], приводит к ослаблению процессов переноса импульса и тепла. Завихренность, образующаяся в поперечном сечении турбулентного потока в прямолинейной круглой трубе при вращении трубы относительно продольной оси, приводит к подавлению турбулентных пульсаций и радиального турбулентного переноса при малых и умеренных скоростях вращения трубы: уменьшаются турбулентные напряжения, энергия турбулентности, ее диссипация.

В [3, 4] рассмотрено влияние вихревой закрутки потока на его статистические характеристики на основе полуэмпирических уравнений, описывающих поведение полей средней скорости и моментов второго порядка в приближении локального равновесия.

В настоящей работе представлены данные лабораторных измерений моментов поля скорости первого и второго порядков течения несжимаемой жидкости как в неподвижной, так и во вращающейся трубе. Эти данные сопоставлены с результатами вычислений по трем моделям турбулентного переноса, соответственно включающим: дифференциальные уравнения переноса для компонент тензора рейнольдсовых напряжений, алгебраические выражения для нормальных турбулентных напряжений в неравновесном приближении, алгебраические соотношения для турбулентных напряжений в приближении локального равновесия.

Результаты термоанемометрических экспериментальных исследований получены в МФТИ, численных расчетов — в ИТПМ СО РАН и НГУ.

Экспериментальное исследование характеристик турбулентного потока во вращающейся трубе. Опыты проводились на установке, основой которой являются прямолинейный участок канала длиной 100 калибров, формирующий развитое турбулентное течение, и вращающаяся секция длиной 25 калибров (диаметр канала 0,06 м). Воздух в канал подается из магистрали высокого давления через редуктор и игольчатый регулятор расхода, что обеспечивает постоянство расхода. Температура воздуха, поступающего в канал, с помощью подогревателя с автоматической регулировкой поддерживается постоянной и равной комнатной температуре. После подогревателя воздух поступает в ресивер, где проходит через несколько слоев капроновой ткани и выравнивающие металлические сетки. Ресивер связан с формирующей поток секцией соплом с поджатием 12 : 1. Между соплом и входом в канал установлен турбулизатор. В конце неподвижного участка трубы достигается режим развитого турбулентного течения для заданного числа Рейнольдса. Поток с такими характеристиками попадает в рабочую секцию канала, которая может вращаться относительно продольной оси. Привод вращаемой секции осуществляется асинхронным двигателем с частотным регулированием скорости вращения в пределах от 0 до 70 об/с. Скорость потока U_0 на оси канала от 0 до 70 м/с. Степень закрутки можно характеризовать параметром $\mathrm{SP} = W_0/U_0 = \omega R/U_0$, где ω — угловая скорость вращения трубы. Ниже приводятся результаты измерений, выполненных при $U_0 = 10$ м/с, $\mathrm{Re}_D = U_0 2R/\nu = 4\cdot 10^4$ (ν — кинематическая вязкость воздуха, R — радиус трубы).

Измерения характеристик турбулентного потока проводились с помощью термоанемометрической аппаратуры фирмы DISA. Использовались зонды однонитевые 55P11, двухнитевые 55P61 и трехнитевые 55P91. Сигналы регистрировались при помощи аналоговой аппаратуры и обрабатывались на специализированной мини-ЭВМ «PLURIMAT-S» временных записей сигналов. Описание установки и методики измерений более подробно изложено в [5–8]. Измерены продольные и окружные составляющие средней скорости, компоненты тензора рейнольдсовых напряжений, некоторые моменты третьего порядка, скорость диссипации энергии (по зависимости для продольного одномерного спектра).

Модель уравнений переноса турбулентных напряжений. В данной работе для описания поведения моментов первого и второго порядков поля скорости турбулентного течения в круглой трубе, вращающейся вокруг оси, используются три различные по сложности модели турбулентного переноса с целью выяснения их точности.

Модель 1 включает дифференциальные уравнения турбулентного переноса для вектора средней скорости и тензора турбулентных напряжений [9–11]. Упрощенные варианты этой полной модели получаются при том или ином способе сведения дифференциальных уравнений для искомых моментов второго порядка к алгебраическим соотношениям. Модель 2 турбулентного переноса получается [9, 12] при упрощении уравнений для компонент тензора рейнольдсовых напряжений в приближении локального равновесия для касательных напряжений и в неравновесном приближении для нормальных напряжений. Модель 3 содержит соотношения, определяемые из уравнений переноса для моментов второго порядка в приближении локального баланса для всех компонент тензора турбулентных напряжений [13, 14]. Модели 1–3 включают также дифференциальные уравнения переноса для кинетической энергии турбулентности $E = \langle u_i u^i \rangle/2$ и скорости ее диссипации ε. Заметим, что «стандартная» $E - \varepsilon$-модель турбулентности с изотропным коэффициентом турбулентной вязкости не способна без дополнительной модификации умозрительного характера воспроизвести [9] необходимую анизотропию компонент тензора напряжений $\langle u_i u_j \rangle$.

Модели 1–3 сформулированы на основе развитой в [10, 11] модели моментов второго порядка. Эффект подавления турбулентных пульсационных характеристик с ростом закрутки потока учитывался введением в уравнение для ε дополнительного слагаемого с числом Ричардсона закрутки [9, 15, 16]. Демпфирующее влияние стенки на поперечные пульсации скорости описывалось при помощи коррекции [12, 13] стандартной модели для корреляции давление — сдвиг скорости в уравнениях, определяющих моменты второго порядка. Для учета эффектов стенки в моделях 1–3 также модифицированы [14] члены деструкции в уравнениях для $\langle u_i u_j \rangle$ и ε. Как показывают результаты вычислений, все три модели адекватно описывают как воздействие закрутки потока на турбулентный перенос импульса, так и влияние твердой стенки. Однако различие моделей проявляется в точности полученных численных результатов при сравнении последних с опытными данными.

• *Определяющие уравнения модели.* Для описания течения во вращающейся трубе применяется цилиндрическая система координат $x^i = (x, r, \varphi)$, где x отсчитывается вдоль оси трубы, r — в радиальном направлении, а φ — в азимутальном направлении. Используется тензорная форма записи величин для произвольной криволинейной системы координат. В цилиндрических координатах компоненты средней и пульсационной скорости имеют вид $U_i = (U, V, rW)$, $U^i = (U, V, W/r)$, $u_i = (u, v, rw)$, $u^i = (u, v, w/r)$. Система точных (незамкнутых) уравнений переноса для вектора средней скорости и тензора турбулентных напряжений для стационарного несжимаемого течения в общей тензорной форме записывается как

$$U^i_{,i} = 0, \quad U^j U_{i,j} = \nu g^{jk} U_{i,jk} - \langle u_i u^j \rangle_{,j} - \hat{P}_{,i}/\rho; \tag{1}$$

$$U^k \langle u_i u_j \rangle_{,k} = \nu (g^{km} \langle u_i u_j \rangle_{,k})_{,m} + D_{ij} + P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij}, \tag{2}$$

где $D_{ij} = -\langle u_i u_j u^m \rangle_{,m} - (\langle p u_i \rangle_{,j} + \langle p u_j \rangle_{,i})/\rho$ (турбулентный перенос); $P_{ij} = -\langle u_j u^k \rangle U_{i,k} - \langle u_i u^k \rangle U_{j,k}$ (порождение турбулентности); $\Pi_{ij} = \langle p(u_{i,j} + u_{j,i}) \rangle / \rho$ (корреляция давление — сдвиг скорости); $\varepsilon_{ij} = 2\nu g^{km} \langle u_{i,m} u_{j,k} \rangle$ (диссипация); индекс $,i$ означает ковариантное дифференцирование по координате x^i; g^{ij} — метрический тензор; $\langle \cdots \rangle$ — осреднение по времени; $\hat{P}$ — среднее давление; p — пульсации давления; ρ — плотность; ν — коэффициент кинематической вязкости.

Для получения замкнутого вида системы (1), (2) необходимы модельные представления для членов D_{ij}, Π_{ij} и ε_{ij}. Простейшим модельным выражением градиентного типа для процессов турбулентной диффузии (моментов третьего порядка) является [17]

$$-\langle u_i u_j u^m \rangle = -g^{km} \langle u_i u_j u_k \rangle = g^{km} C_s \frac{E}{\varepsilon} \langle u_k u^\alpha \rangle \langle u_i u_j \rangle_{,\alpha} \tag{3}$$

($C_s = 0{,}18$ — эмпирический коэффициент). Диссипация ε наряду с порождением $P = -(1/2)(\langle u_i u^k \rangle U^i_{,k} + \langle u^i u^k \rangle U_{i,k})$ входит в уравнение для энергии турбулентности, получаемое из (2), (3):

$$U^k E_{,k} = \left[g^{km} \left(\nu E_{,k} + C_s \frac{E}{\varepsilon} \langle u_k u^\alpha \rangle E_{,\alpha} \right) \right]_{,m} + P - \varepsilon - \frac{2\nu E}{x_n^2}. \tag{4}$$

Последнее слагаемое в (4) появляется при коррекции стандартного модельного выражения для $\varepsilon_{ij} = (2/3)\delta_{ij}\varepsilon$, учитывающей эффект малых чисел Рейнольдса [14] вблизи стенки:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} g_{ij} \varepsilon + 2\nu \frac{\langle u_i u_j \rangle}{x_n^2} \tag{5}$$

(x_n — расстояние до стенки).

Корреляция давление – сдвиг скорости моделируется [11] в виде суммы трех слагаемых:

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{(1)} + \Pi_{ij}^{(2)} + \left(\Pi_{ij}^{\prime(1)} + \Pi_{ij}^{\prime(2)}\right) f(x_n). \tag{6}$$

Здесь первое слагаемое описывает стремление турбулентности к изотропии в отсутствие сдвига средней скорости и эффектов стенки:

$$\Pi_{ij}^{(1)} = -C_1 \frac{\varepsilon}{E} \left(\langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} g_{ij} E\right); \tag{7}$$

второе — вклад градиентов средней скорости:

$$\Pi_{ij}^{(2)} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} g_{ij} P\right); \tag{8}$$

третье — влияние стенки [13]:

$$\Pi_{ij}^{\prime(1)} = C_1' \frac{\varepsilon}{E} \left[\langle u_n^2 \rangle g_{ij} - \frac{3}{2} (\langle u_n u_j \rangle g_{in} + \langle u_n u_i \rangle g_{jn})\right]; \tag{9}$$

$$\Pi_{ij}^{\prime(2)} = C_2' \left[\Pi_{nn}^{(2)} g_{ij} - \frac{3}{2} (\Pi_{nj}^{(2)} g_{in} + \Pi_{ni}^{(2)} g_{jn})\right], \tag{10}$$

где демпфирующая функция $f = (1/5)E^{3/2}/(\varepsilon x_n)$ [12] (индекс n означает направление по нормали к стенке).

Входящая в модельные выражения величина ε определяется из дифференциального уравнения переноса

$$U^k \varepsilon_{,k} = \left[g^{km}\left(\nu \varepsilon_{,k} + C_\varepsilon \frac{E}{\varepsilon} \langle u_k u^\alpha \rangle \varepsilon_{,\alpha}\right)\right]_{,m} + \left(C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2}^* \varepsilon\right) \frac{\varepsilon}{E} - \frac{2\nu\varepsilon}{x_n^2} f_1. \tag{11}$$

Здесь

$$f_1 = \exp(-0{,}5 x_n u_*/\nu); \quad C_\varepsilon = 0{,}18; \quad C_{\varepsilon 1} = 1{,}35; \quad C_{\varepsilon 2} = 1{,}8;$$

$$C_{\varepsilon 2}^* = \max[1{,}4; C_{\varepsilon 2} f_2 (1 - C_{\varepsilon 3} \mathrm{Ri}_W)]; \quad f_2 = 1 - (2/9) \exp[-(E^2/(6\nu\varepsilon))^2];$$

$$\mathrm{Ri}_W = \left[\frac{W}{r} \frac{\partial W}{\partial r}\right] \Big/ \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2\right].$$

Число Ричардсона закрутки Ri_W в (11) вводится для описания воздействия кривизны линий тока на турбулентность по аналогии с влиянием стратификации среды на турбулентный перенос [15]. Коррекция на кривизну линий тока включается в член деструкции в (11) согласно [16]. Выражение для Ri_W взято в более общем виде, чем в [16], по аналогии с числом Ричардсона в стратифицированных турбулентных течениях [9, 13]. Коррекция деструкции в уравнении (11) базируется на гипотезе, заключающейся в том, что стабилизирующий эффект закрутки может быть смоделирован за счет уменьшения масштаба длины турбулентных вихрей $L = E^{3/2}/\varepsilon$ при $\mathrm{Ri}_W > 0$ (т. е. за счет увеличения диссипации ε, приводящего к подавлению энергии турбулентности E). Коэффициент $C_{\varepsilon 2}^*$ ограничен снизу ($C_{\varepsilon 2}^* \geqslant 1{,}4$) для того, чтобы диссипация ε не становилась «слишком большой» из-за чрезмерного уменьшения коэффициента $C_{\varepsilon 2} f_2 (1 - C_{\varepsilon 3} \mathrm{Ri}_W)$ с ростом Ri_W при увеличении параметра закрутки (SP > 0,6).

• *Модель 1 для осесимметричного течения в трубе.* Сформулированные выше модельные представления приводят к замкнутой системе уравнений турбулентного переноса для моментов первого и второго порядков. Для установившегося осесимметричного течения в трубе определяющие уравнения модели в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV) = 0; \tag{12}$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu\frac{\partial U}{\partial r} - \langle uv\rangle\right)\right] - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{P}}{\partial x}; \tag{13}$$

$$U\frac{\partial W}{\partial x} + V\frac{\partial W}{\partial r} + V\frac{W}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu\frac{\partial W}{\partial r} - \langle vw\rangle\right)\right] - \nu\frac{W}{r^2} - \frac{\langle vw\rangle}{r}; \tag{14}$$

$$U\frac{\partial E}{\partial x} + V\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu + C_s\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\right)\frac{\partial E}{\partial r}\right] + P - \varepsilon - \frac{2\nu E}{(R-r)^2}; \tag{15}$$

$$U\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu + C_\varepsilon\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right] + \{C_{\varepsilon 1}P - C_{\varepsilon 2}^*\varepsilon\}(\varepsilon/E) - \frac{2\nu\varepsilon}{(R-r)^2}f_1, \tag{16}$$

где U, V и W — компоненты вектора средней скорости в продольном, радиальном и азимутальном направлениях, а u, v и w — соответствующие пульсационные компоненты скорости. Входящие в (13)–(16) турбулентные напряжения находятся из дифференциальных уравнений переноса (2), замкнутых согласно выражениям (3), (5)–(10). Для отдельных компонент тензора напряжений эти уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} U\frac{\partial\langle u^2\rangle}{\partial x} + V\frac{\partial\langle u^2\rangle}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu + C_s\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\right)\frac{\partial\langle u^2\rangle}{\partial r}\right] + P_{uu} + \\ &+\left\{-C_1\frac{\varepsilon}{E}\left(\langle u^2\rangle - \frac{2}{3}E\right) - C_2\left(P_{uu} - \frac{2}{3}P\right) + \Pi' f\right\} - \frac{2}{3}\varepsilon - \frac{2\nu}{(R-r)^2}\langle u^2\rangle; \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} U\frac{\partial\langle v^2\rangle}{\partial x} + V\frac{\partial\langle v^2\rangle}{\partial r} - 2\langle vw\rangle\frac{W}{r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu + C_s\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\right)\frac{\partial\langle v^2\rangle}{\partial r}\right] - \\ -\frac{2}{r}C_s\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\langle vw\rangle\right) + \frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\frac{\partial\langle vw\rangle}{\partial r}\right] &+ 2\left(\nu + C_s\frac{E}{\varepsilon}\langle w^2\rangle\right)\frac{\langle w^2\rangle - \langle v^2\rangle}{r^2} + P_{vv} + \\ &+\left\{-C_1\frac{\varepsilon}{E}\left(\langle v^2\rangle - \frac{2}{3}E\right) - C_2\left(P_{vv} - \frac{2}{3}P\right) - 2\Pi' f\right\} - \frac{2}{3}\varepsilon - \frac{2\nu}{(R-r)^2}\langle v^2\rangle; \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} U\frac{\partial\langle w^2\rangle}{\partial x} + V\frac{\partial\langle w^2\rangle}{\partial r} + 2\langle vw\rangle\frac{W}{r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu + C_s\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\right)\frac{\partial\langle w^2\rangle}{\partial r}\right] + \\ +\frac{2}{r}C_s\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\langle vw\rangle\right) + \frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\frac{\partial\langle vw\rangle}{\partial r}\right] &- 2\left(\nu + C_s\frac{E}{\varepsilon}\langle w^2\rangle\right)\frac{\langle w^2\rangle - \langle v^2\rangle}{r^2} + P_{ww} + \\ &+\left\{-C_1\frac{\varepsilon}{E}\left(\langle w^2\rangle - \frac{2}{3}E\right) - C_2\left(P_{ww} - \frac{2}{3}P\right) + \Pi' f\right\} - \frac{2}{3}\varepsilon - \frac{2\nu}{(R-r)^2}\langle w^2\rangle \\ &\left(\Pi' = C_1'\frac{\varepsilon}{E}\langle v^2\rangle - C_2'C_2\left(P_{vv} - \frac{2}{3}P\right),\quad f = \frac{1}{5}\frac{E^{3/2}}{(R-r)\varepsilon}\right); \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} U\frac{\partial\langle uv\rangle}{\partial x} + V\frac{\partial\langle uv\rangle}{\partial r} - \langle uw\rangle\frac{W}{r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\nu + C_s\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\right)\frac{\partial\langle uv\rangle}{\partial r}\right] - \\ -\frac{C_s}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\langle uw\rangle\right) + \frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\frac{\partial\langle uw\rangle}{\partial r}\right] &- \left(\nu + C_s\frac{E}{\varepsilon}\langle w^2\rangle\right)\frac{\langle uv\rangle}{r^2} + P_{uv} + \end{aligned}$$

$$+\Big\{-C_1\frac{\varepsilon}{E}\langle uv\rangle - C_2P_{uv} - \frac{3}{2}\Big(C_1'\frac{\varepsilon}{E}\langle uv\rangle + C_2'C_2P_{uv}\Big)f\Big\} - \frac{2\nu}{(R-r)^2}\langle uv\rangle. \qquad (20)$$

$$U\frac{\partial\langle vw\rangle}{\partial x} + V\frac{\partial\langle vw\rangle}{\partial r} - [\langle w^2\rangle - \langle v^2\rangle]\frac{W}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big[r\Big(\nu + C_s\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\Big)\frac{\partial\langle vw\rangle}{\partial r}\Big] -$$

$$-\frac{C_s}{r}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle(\langle w^2\rangle - \langle v^2\rangle)\Big) + \frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\frac{\partial}{\partial r}(\langle w^2\rangle - \langle v^2\rangle)\Big] - 4\Big(\nu + C_s\frac{E}{\varepsilon}\langle w^2\rangle\Big)\frac{\langle vw\rangle}{r^2} + P_{vw} +$$

$$+\Big\{-C_1\frac{\varepsilon}{E}\langle vw\rangle - C_2P_{vw} - \frac{3}{2}\Big(C_1'\frac{\varepsilon}{E}\langle vw\rangle + C_2'C_2P_{vw}\Big)f\Big\} - \frac{2\nu}{(R-r)^2}\langle vw\rangle; \qquad (21)$$

$$U\frac{\partial\langle uw\rangle}{\partial x} + V\frac{\partial\langle uw\rangle}{\partial r} + \langle uv\rangle\frac{W}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big[r\Big(\nu + C_s\frac{E}{\varepsilon}\langle v^2\rangle\Big)\frac{\partial\langle uw\rangle}{\partial r}\Big] +$$

$$+\frac{C_s}{r}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\langle uv\rangle\Big) + \frac{E}{\varepsilon}\langle vw\rangle\frac{\partial\langle uv\rangle}{\partial r}\Big] - \Big(\nu + C_s\frac{E}{\varepsilon}\langle w^2\rangle\Big)\frac{\langle uw\rangle}{r^2} +$$

$$+P_{uw} + \Big\{-C_1\frac{\varepsilon}{E}\langle uw\rangle - C_2P_{uw}\Big\} - \frac{2\nu}{(R-r)^2}\langle uw\rangle. \qquad (22)$$

В уравнениях (17)–(22) члены порождения имеют вид

$$P_{uu} = -2\langle uv\rangle\frac{\partial U}{\partial r}, \quad P_{vv} = 2\langle vw\rangle\frac{W}{r}, \quad P_{ww} = -2\langle vw\rangle\frac{\partial W}{\partial r},$$

$$P_{uv} = -\langle v^2\rangle\frac{\partial U}{\partial r} + \langle uw\rangle\frac{W}{r}, \quad P_{vw} = -\langle v^2\rangle\frac{\partial W}{\partial r} + \langle w^2\rangle\frac{W}{r},$$

$$P_{uw} = -\langle uv\rangle\frac{\partial W}{\partial r} - \langle vw\rangle\frac{\partial U}{\partial r}, \quad P = \frac{1}{2}(P_{uu} + P_{vv} + P_{ww}).$$

Для удобства численной реализации вместо уравнений (18) и (19) для $\langle v^2\rangle$ и $\langle w^2\rangle$ использованы уравнение (15) для $E = (1/2)(\langle u^2\rangle + \langle v^2\rangle + \langle w^2\rangle)$ и уравнение для $a = \langle w^2\rangle - \langle v^2\rangle$, полученное из (18) и (19). Последняя замена обусловлена наличием в уравнениях для $\langle v^2\rangle$ и $\langle w^2\rangle$ особенности на оси трубы из-за источника вида $\pm 2(\nu + C_s(E/\varepsilon)\langle w^2\rangle)(a/r^2)$, если $a \neq 0$. Значения $\langle v^2\rangle$ и $\langle w^2\rangle$ определяются по найденным из уравнений переноса величинам E, $\langle u^2\rangle$ и a: $\langle v^2\rangle = E - (\langle u^2\rangle + a)/2$, $\langle w^2\rangle = a + \langle v^2\rangle$. Градиент давления $-(1/\rho)(\partial\hat{P}/\partial x)$ в уравнении (13) можно определить при интегрировании (13) в приближении малости конвекции $U(\partial U/\partial x) + V(\partial U/\partial r)$ (численные эксперименты показали справедливость такого допущения). Интегрирование (13) по сечению трубы дает

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d\hat{P}}{dx} = \frac{2}{R^2}\Big[-r\Big(\nu\frac{\partial U}{\partial r} - \langle uv\rangle\Big)\Big|_0^R\Big] = \frac{2\nu}{R}\Big(-\frac{\partial U}{\partial r}\Big)_{r=R},$$

откуда находится скорость трения на стенке $u_* = [\nu(-\partial U/\partial r)_{r=R}]^{1/2}$, входящая в демпфирующую функцию f_1 в уравнении (16) для диссипации.

Значения численных коэффициентов модели уравнений переноса рейнольдсовых напряжений (модель 1) представлены в таблице. Такие же значения использовались, например, в [9, 11–13].

Модель	C_1	C_2	C_1'	C_2'	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$C_{\varepsilon 3}$	C_ε	C_s
1	1,5	0,6	0,3	0,3	1,35	1,8	2,0	0,18	0,18
2 и 3	1,5	0,6	0,3	0,3	1,35	1,8	2,5	0,18	0,18

Модель с алгебраическими соотношениями для напряжений Рейнольдса. Дифференциальные уравнения переноса (2) для турбулентных напряжений могут быть упрощены до алгебраических в предположении малости членов конвекции и диффузии по сравнению с порождением и диссипацией, а также пропорциональности переноса компонент тензора $\langle u_i u_j \rangle$ переносу энергии турбулентности [9]:

$$U^k \langle u_i u_j \rangle_{,k} - \nu (g^{km} \langle u_i u_j \rangle_{,k})_{,m} - D_{ij} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} = \Big(\frac{\langle u_i u_j \rangle}{E} \Big) k \Big[P - \varepsilon - \frac{2\nu E}{(R-r)^2} \Big]. \quad (23)$$

Коэффициент $k = 0$ в приближении локального равновесия [13], $k = 1$ в неравновесном приближении [9, 12]. Из (23) после подстановки точного вида порождений P_{ij} и модельных аппроксимаций (5)–(10) для корреляций Π_{ij} и ε_{ij} выражаются искомые моменты второго порядка. Для осесимметричного течения в трубе соотношения для моментов второго порядка получаются упрощением уравнений (17)–(22) для отдельных компонент тензора напряжений Рейнольдса согласно (23):

$$\langle u^2 \rangle = \frac{(2/3)[(C_1 - 1)\varepsilon + C_2 P] + (1 - C_2) P_{uu} + \Pi' f}{C_1(\varepsilon/E) + 2\nu/(R-r)^2 + k[P - \varepsilon - 2\nu E/(R-r)^2]/E}; \quad (24)$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\frac{2}{3}[(C_1 - 1)\varepsilon + C_2 P] + (1 - C_2) P_{vv} + 2C_2' C_2 (P_{vv} - \frac{2}{3} P) f + \frac{2\nu \langle w^2 \rangle}{r^2}}{(C_1 + 2C_1' f)\frac{\varepsilon}{E} + \frac{2\nu}{(R-r)^2} + \frac{2\nu}{r^2} + k\Big[\frac{P - \varepsilon}{E} - \frac{2\nu}{(R-r)^2}\Big]}; \quad (25)$$

$$\langle w^2 \rangle = \frac{\frac{2}{3}[(C_1 - 1)\varepsilon + C_2 P] + (1 - C_2) P_{ww} + \Pi' f + \frac{2\nu \langle v^2 \rangle}{r^2}}{C_1 \frac{\varepsilon}{E} + \frac{2\nu}{(R-r)^2} + \frac{2\nu}{r^2} + k\Big[\frac{P - \varepsilon}{E} - \frac{2\nu}{(R-r)^2}\Big]}; \quad (26)$$

$$\langle uv \rangle = \frac{(1 - C_2 - 3C_2' C_2 f/2) P_{uv}}{(C_1 + 3C_1' f/2)(\varepsilon/E) + 2\nu/(R-r)^2 + \nu/r^2} = A_{uv} P_{uv}; \quad (27)$$

$$\langle vw \rangle = \frac{(1 - C_2 - 3C_2' C_2 f/2) P_{vw}}{(C_1 + 3C_1' f/2)(\varepsilon/E) + 2\nu/(R-r)^2 + 4\nu/r^2} = A_{vw} P_{vw}; \quad (28)$$

$$\langle uw \rangle = \frac{(1 - C_2) P_{uw}}{C_1(\varepsilon/E) + 2\nu/(R-r)^2 + \nu/r^2} = A_{uw} P_{uw}. \quad (29)$$

Отметим, что в (25)–(29) введена коррекция в виде членов, добавленных из второго слагаемого в левой части определяющего выражения (23) и пропорциональных величине ν/r^2. Эта коррекция необходима для описания правильного поведения вблизи оси не только моментов второго порядка ($r^2 \sim \langle w^2 \rangle - \langle v^2 \rangle \sim \langle vw \rangle \to 0$ при $r \to 0$), но и средней окружной скорости ($W \sim r$ при $r \to 0$) при больших параметрах закрутки. Такая коррекция может рассматриваться и как штраф алгебраической модели (24)–(29), поскольку полная модель второго уровня замыкания (12)–(22) учитывает асимптотическое поведение искомых величин у оси автоматически.

Выражения (27) и (28) с учетом (29) имеют вид

$$-\langle uv \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle + A_{uw} \langle vw \rangle (W/r)}{A_{uv}^{-1} + A_{uw}(W/r)(\partial W/\partial r)} \frac{\partial U}{\partial r} = \nu_{tU} \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (30)$$

$$-\langle vw \rangle = \nu_{tW} \frac{\partial W}{\partial r} - \alpha_{tW} \frac{W}{r}, \quad \nu_{tW} = A_{vw} \langle v^2 \rangle, \quad \alpha_{tW} = A_{vw} \langle w^2 \rangle, \quad (31)$$

где «эффективные коэффициенты турбулентной вязкости» ν_{tU}, ν_{tW} и α_{tW} — сложные функции от W, E, ε и других параметров. С учетом (30) и (31) уравнения (13) и (14) приводятся к уравнениям параболического типа

$$U\,\frac{\partial U}{\partial x} + V\,\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big[r(\nu + \nu_{tU})\,\frac{\partial U}{\partial r}\Big] - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \hat{P}}{\partial x}; \tag{32}$$

$$U\,\frac{\partial W}{\partial x} + V\,\frac{\partial W}{\partial r} + V\,\frac{W}{r} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big[r(\nu + \nu_{tW})\,\frac{\partial W}{\partial r}\Big] - \nu\,\frac{W}{r^2} - \frac{1}{r}\Big[\frac{\partial(\alpha_{tW}W)}{\partial r} + \langle vw\rangle\Big]. \tag{33}$$

Уравнения (12), (32), (33) для поля средней скорости, (15) и (16) для энергии турбулентности и скорости ее диссипации, а также соотношения (24)–(31) для турбулентных напряжений дают модель турбулентного переноса с алгебраическими выражениями для моментов второго порядка. В формулах (24)–(26) коэффициент $k = 1$ в неравновесном приближении (модель 2) и $k = 0$ в локально-равновесном (модель 3). Эмпирические коэффициенты моделей 2 и 3 представлены в таблице.

Численная реализация моделей турбулентности. Граничные условия для дифференциальных уравнений переноса моделей 1–3 следующие:
при $r = 0$ (на оси трубы)

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{\partial\langle u^2\rangle}{\partial r} = \frac{\partial a}{\partial r} = \langle uv\rangle = \langle vw\rangle = \langle uw\rangle = W = 0,$$

при $r = R$ (на стенке трубы)

$$U = E = \varepsilon = \langle u^2\rangle = a = \langle uv\rangle = \langle vw\rangle = \langle uw\rangle = 0, \quad W = W_0 > 0.$$

Определяющая система уравнений параболического типа для U, W, E, ε (и для $\langle u_iu_j\rangle$ в модели 1) решена методом контрольного объема [18]. Для этого уравнения переноса искомых величин F записываются в переменных Мизеса (координата x — функция тока ψ) в общем виде:

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial x}\Big)_\psi = \frac{\partial}{\partial \psi}\Big[r^2U\Gamma_F\,\frac{\partial F}{\partial \psi}\Big] + \frac{S_F}{U} \tag{34}$$

(Γ_F — диффузионный коэффициент, S_F — источниковый член).

Область вычислений в поперечном направлении разбивалась на $N - 1$ интервалов. Процедура численного решения уравнений вида (34) представляет собой безытерационный процесс пошагового интегрирования и подробно описана в [18]. Шаг Δx интегрирования по координате x и количество точек $N = 128$ выбирались из условия сохранения необходимой точности расчетов (изменение искомых величин в пределах 1 % от их максимальных значений при уменьшении Δx или увеличении N в 2 раза). Сетка по координате r взята неравномерной:

а) $\Delta r_i = \nu/u_{*0}$ при $0 \leqslant y^+ \leqslant 5$ (10 равных интервалов в вязком подслое), u_{*0} — скорость трения на стенке в выходном сечении невращающейся секции трубы;

б) $\Delta r_{i+1} = \beta\Delta r_i$ при $5 < y^+ \leqslant 50$ (возрастание интервалов по геометрической прогрессии от стенки трубы в переходной области);

в) $\Delta r_i = \mathrm{const} \gg \nu/u_{*0}$ при $50 < y^+ \leqslant \mathrm{Re}^*$, где $y^+ = (R-r)u_{*0}/\nu = (1 - r/R)\mathrm{Re}^*$ (100 равных интервалов во внешнем течении вплоть до оси трубы).

Закон сохранения расхода в переменных (x, ψ) выполнялся автоматически:

$$\int\limits_0^R Ur\,dr = \psi(R) - \psi(0) = \mathrm{const},$$

поскольку на каждом интервале при интегрировании по контрольным объемам соблюдалось условие

$$\psi(r_{i+1}) - \psi(r_i) = \int\limits_{r_i}^{r_{i+1}} Ur\,dr = \text{const}, \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$

Значения r_i вычислялись по рекуррентной формуле

$$r_{i+1}^2 - r_i^2 = 2 \int\limits_{\psi(r_i)}^{\psi(r_{i+1})} \frac{d\psi}{U}.$$

Условие $r_N = R$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{N-1} \int\limits_{\psi(r_i)}^{\psi(r_{i+1})} \frac{d\psi}{U} = \frac{R^2}{2},$$

удовлетворялось умножением скорости U во всех точках на величину невязки $(r_N^2 - r_1^2)/R^2$ в каждом сечении $x = \text{const}$.

Расчет проводился в два этапа: 1) получение развитого течения без закрутки, 2) наложение на развитый поток вращения трубы со скоростью $W_0 = \omega R$.

На первом этапе вычислений начальный профиль скорости задавался в виде комбинации линейной ($U(r) = u_* y^+$ при $0 < y^+ \leqslant y_R^+$) и степенной ($U(r) = C_t u_* (y^+)^{1/7}$ ($C_t = 8{,}74$, $y_R^+ = C_t^{7/6}$) при $y_R^+ < y^+ \leqslant \text{Re}^*$) функций. Энергия турбулентности и ее компоненты выбирались равными небольшим фоновым значениям: $E(r) = E_0 = 10^{-3} u_{*0}^2$, $\langle u^2 \rangle = (2/3)E_0$, $a = 0$; касательное напряжение $\langle uv \rangle \big|_{x=0} = 0$. Из предположений локального равновесия ($P = \varepsilon$) и градиентной связи $\langle uv \rangle = -C_\mu f_\mu (E^2/\varepsilon)(\partial U/\partial r)$ (значение $C_\mu = 0{,}09$ и демпфирующая функция $f_\mu = 1 - \exp(-0{,}01\, y^+)$ взяты из [14]) находилась диссипация энергии турбулентности: $\varepsilon(r) = \sqrt{C_\mu f_\mu}\, E_0 |\partial U/\partial r|$.

На втором этапе вычислений в качестве начальных данных выбирались поперечные профили U, E, ε, $\langle uv \rangle$, $\langle u^2 \rangle$, $a = \langle w^2 \rangle - \langle v^2 \rangle$, полученные на первом этапе, формирующем развитый турбулентный поток в трубе. Остальные искомые функции взяты равными $W(r = R) = W_0$, $W(r < R) = \langle vw \rangle = \langle uw \rangle = 0$.

Вычисленные характеристики обезразмерены с помощью динамической скорости u_{*0} и радиуса трубы R. Входной параметр $\text{Re}^* = Ru_{*0}/\nu = 875$ тот же, что и в эксперименте ($R = 3$ см, $U_0 = 10^3$ см/с, $\nu = 0{,}149$ см^2/с, $u_{*0} = 43{,}5$ см/с). На первом этапе расчетов пройдено расстояние $200R$ по координате x вдоль оси трубы, на втором этапе $50R$, как и в эксперименте. Установление течения с ростом x можно характеризовать величиной адвекции энергии турбулентности, уменьшающейся в конце первого этапа расчета до пренебрежимо малого значения:

$$\left| U(\partial E/\partial x)_\psi \right|_{\max} \sim 10^{-2}(u_{*0}^3/R) \ll \varepsilon_{\min}.$$

В конце второго этапа вычислений относительная величина адвекции гораздо выше, и установления характеристик турбулентного течения по x не наблюдается.

Результаты лабораторных и численных экспериментов. Проверка точности моделей турбулентного переноса. Результаты лабораторных и численных экспериментов для течения во вращающейся трубе при различных параметрах закрутки представлены на рис. 1–5 (для выходного сечения вращаемого участка трубы при $x/R = 50$).

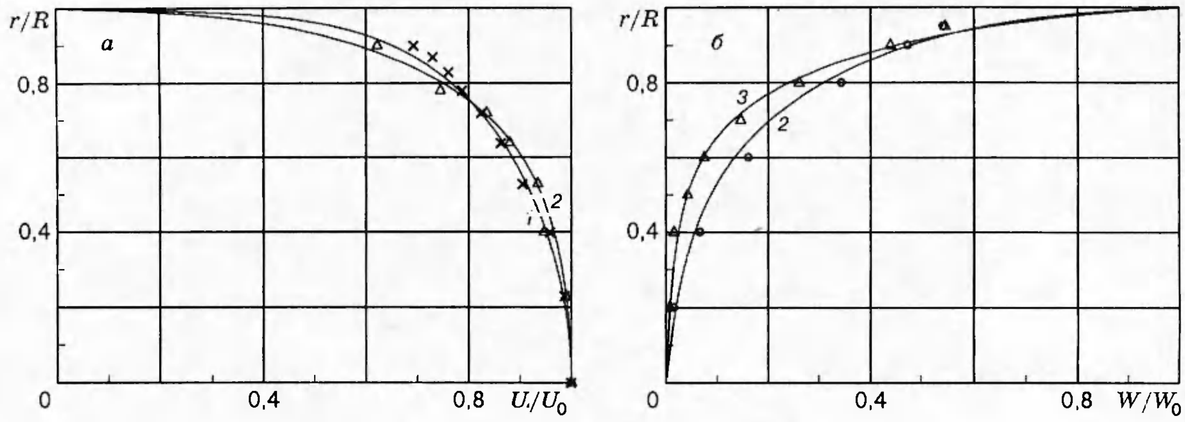

Рис. 1. Профили продольной U/U_0 (*а*) и окружной W/W_0 (*б*) составляющих средней скорости при различных значениях SP:

1–3 — вычисления по дифференциальной модели 1; ×, △, ○ — экспериментальные данные [5–8]; SP = 0 (*1*, ×); 0,6 (*2*, △); 0,15 (*3*, ○)

В незакрученном потоке результаты измерений продольной компоненты средней скорости, напряжений Рейнольдса, энергии турбулентности и скорости ее диссипации удовлетворительно согласуются с известными данными [19–22]. Экспериментальный профиль $U(r)/U_0$ при SP $= 0$ приближенно описывается степенным (логарифмическим) законом (рис. 1,*а*). Различие вычисленных профилей $U(r)$ по всем трем моделям не превышает на оси трубы 2 % для незакрученного течения и примерно 5 % — для закрученного течения. На рис. 1,*а* показан профиль $U(r)$, полученный по модели 1 вторых моментов, который лучше согласуется с опытными данными для закрученного течения по сравнению с профилями, найденными по моделям 2 и 3 с алгебраическими выражениями для вторых моментов (на рис. 1,*а* не показаны); при SP > 0 данные показаны в выходном сечении вращаемого участка трубы ($x/R = 50$).

Результаты измерений диссипации $\varepsilon(r)$ (рис. 2,*б*) при SP $= 0$ хорошо воспроизводятся моделями 1–3 в области $0 < r/R < 0{,}5$. Различие между вычисленными профилями диссипации по всем трем моделям невелико, поэтому на рис. 2,*б* показаны профили, найденные по модели 1 вторых моментов. Профиль энергии турбулентности E/u_{*0}^2 лучше всего воспроизводится моделью 1 и хуже — моделью 3 (рис. 2,*а*). Модель 1 лучше описывает компоненты тензора турбулентных напряжений (рис. 3), в частности, зафиксированную в опытах анизотропию нормальных напряжений как у стенки, так и на оси потока, где $\langle v^2\rangle = \langle w^2\rangle$ и $\langle u^2\rangle \simeq 2\langle v^2\rangle$. Локально-равновесная модель 3 дает наименьшее согласие касательных и нормальных напряжений, в частности, на оси трубы ($\langle u^2\rangle \approx \langle v^2\rangle \approx \langle w^2\rangle$).

С увеличением закрутки потока при неизменном расходе воздуха как в расчетах, так и в опытах наблюдается (рис. 1,*а*) рост продольной компоненты средней скорости в приосевой части потока (при $0 <$ SP $\leqslant 0{,}6$). Деформация профиля $U(r)$ вызывается искривлением линий тока в радиальном направлении под действием центробежной силы: сгущением у стенки и разрежением у оси. Вблизи стенки наклон профиля $\partial U/\partial r$ уменьшается, свидетельствуя о снижении турбулентного трения с ростом закрутки. Приведенные в настоящей работе опытные данные получены при одном и том же значении скорости на оси. Расчеты проведены при условии сохранения расхода. Из поведения кривых $U(r)/U_0$ на рис. 1,*а*

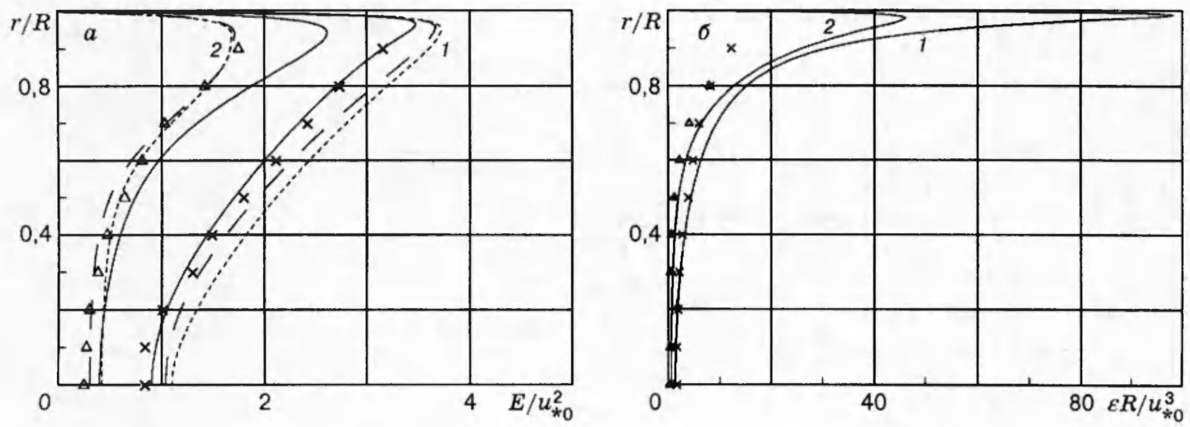

Рис. 2. Распределения энергии турбулентности E/u_{*0}^2 (a) и скорости ее диссипации $\varepsilon R/u_{*0}^3$ ($б$):

сплошные линии — расчет по модели 1; штриховые — по модели 2; пунктирные — по модели 3; остальные обозначения см. на рис. 1

видно, что характер влияния закрутки одинаков в расчетах и опытах.

С увеличением частоты вращения трубы относительная величина окружной компоненты средней скорости уменьшается в приосевой области (рис. 1,$б$). Таким образом, распределение $W(r)/W_0$ с ростом закрутки становится все более неравномерным по радиусу (показано в выходном сечении вращаемого участка трубы). Модель 1 второго порядка хорошо описывает значения W/W_0 при SP = 0,15 и 0,6. Вычисленные по моделям 2 и 3 значения окружной скорости $W(r)/W_0$ оказываются заметно больше измеренных значений при всех SP > 0 (на рис. 1,$б$ не показаны).

Все три модели турбулентности воспроизводят зафиксированный в экспериментах эффект уменьшения пульсационных характеристик $E, \varepsilon, \langle u_i u_j \rangle$ с ростом параметра закрутки

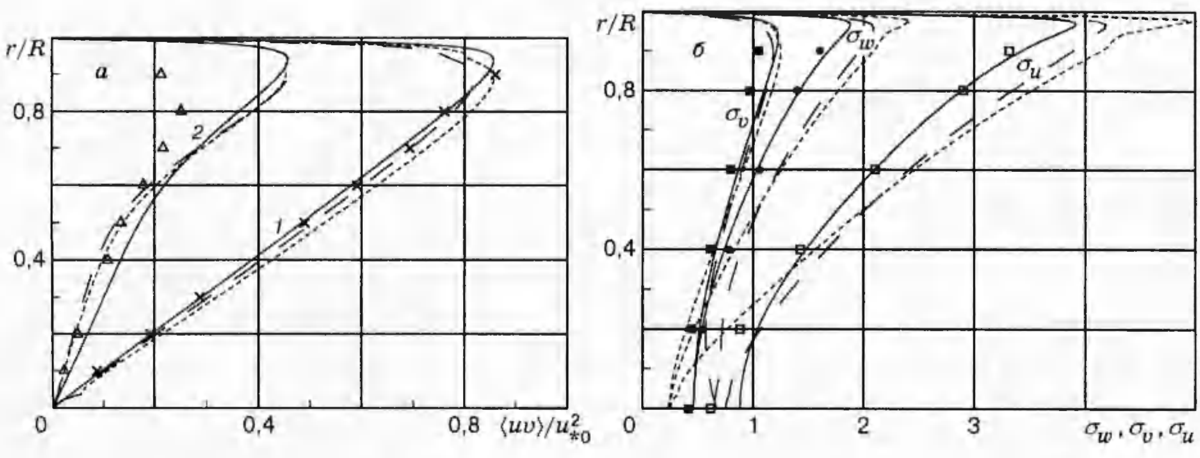

Рис. 3. Компоненты тензора турбулентных напряжений:

a — касательное напряжение $\langle uv \rangle/u_{*0}^2$ при SP = 0 и 0,6; $б$ — нормальные напряжения при SP = 0; опытные точки □, ■, • отвечают $\sigma_u = \langle u^2 \rangle/u_{*0}^2$, $\sigma_v = \langle v^2 \rangle/u_{*0}^2$, $\sigma_w = \langle w^2 \rangle/u_{*0}^2$; остальные обозначения см. на рис. 1, 2

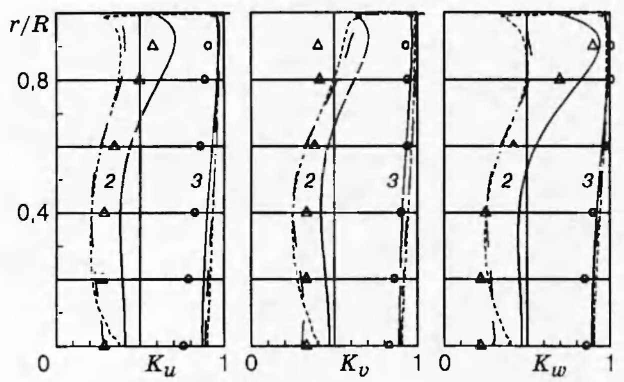

Рис. 4

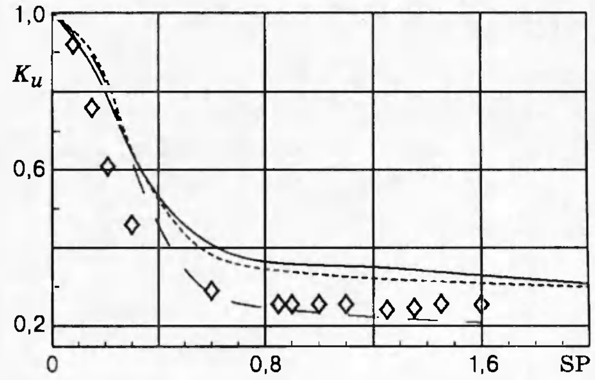

Рис. 5

Рис. 4. Поперечные профили «коэффициентов воздействия» $K_u = \langle u^2\rangle(\mathrm{SP} > 0)/\langle u^2\rangle(\mathrm{SP} = 0)$, $K_v = \langle v^2\rangle(\mathrm{SP} > 0)/\langle v^2\rangle(\mathrm{SP} = 0)$, $K_w = \langle w^2\rangle(\mathrm{SP} > 0)/\langle w^2\rangle(\mathrm{SP} = 0)$ (обозначения см. на рис. 1, 2)

Рис. 5. Зависимость продольного «коэффициента воздействия» K_u от параметра закрутки $\mathrm{SP} = W_0/U_0$ при $r/R = 0$ и $x/R = 50$:
обозначения линий см. на рис. 1, 2; ◇ — опытные данные

(рис. 2–6). Анизотропия компонент энергии турбулентности, имеющая место в незакрученном потоке (рис. 3,*б*), сохраняется и при наличии закрутки потока как в эксперименте, так и в вычислениях по моделям 1–3. Влияние закрутки на компоненты нормальных напряжений $\langle u_\alpha^2\rangle$ оценивалось по «коэффициенту воздействия» (по индексу суммирование не проводится)

$$K_\alpha = \langle u_\alpha^2\rangle(\mathrm{SP} > 0)/\langle u_\alpha^2\rangle(\mathrm{SP} = 0)$$

для α-х среднеквадратичных пульсаций скорости. При слабой закрутке ($\mathrm{SP} \leqslant 0{,}3$) наибольшее подавление интенсивности пульсаций наблюдается на оси потока. С увеличением закрутки ($\mathrm{SP} > 0{,}6$) максимум подавления смещается в область $0{,}3 < r/R < 0{,}6$. Модели 1–3 воспроизводят эти эффекты (рис. 4). Дифференциальная модель 1 вторых моментов в целом лучше описывает поведение «коэффициентов воздействия» при $\mathrm{SP} = 0{,}15$ и $0{,}6$.

Вычисленные по моделям 1–3 кривые зависимости «коэффициента воздействия» K_u от параметра закрутки SP удовлетворительно согласуются с опытными данными (рис. 5). Поведение вычисленных кривых, как и в опыте, характеризуется прекращением подавления интенсивности турбулентных пульсаций при $\mathrm{SP} > 0{,}85$ (эффект насыщения по параметру закрутки).

Реализованная при численном моделировании маршевая процедура пошагового интегрирования по контрольным объемам дает возможность проследить изменение характеристик течения с ростом продольной координаты x. «Коэффициент воздействия» с увеличением x обнаруживает то же поведение, что и в опыте (рис. 6). При $r/R = 0{,}6$ воздействие закрутки проявляется сильнее и сказывается на расстоянии $x/R \simeq 4 \div 5$ от начала вращаемой секции, тогда как на оси трубы — на расстоянии $x/R \simeq 10 \div 14$. Таким образом, поток не испытывает влияния закрутки в сходящемся конусе на начальном участке вращаемой секции. Модель 2 дает более близкие к экспериментальным значения на оси трубы (рис. 6,*а*), а модель 1 — вне приосевой области (рис. 6,*б*).

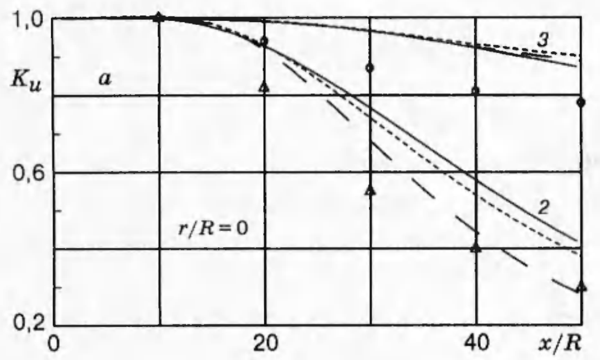

Рис. 6. Изменения K_u с ростом относительной координаты x/R, отсчитываемой от начала вращаемой секции:
а — на оси трубы ($r = 0$); *б* — при $r/R = 0{,}6$; обозначения см. на рис. 1, 2

Выводы. Результаты экспериментального изучения и математического моделирования развитого турбулентного течения во вращающейся вокруг продольной оси прямой круглой трубе показывают, что закрутка потока приводит к существенной перестройке его характеристик: при малых и умеренных закрутках происходит подавление процессов турбулентного обмена, т. е. уменьшение турбулентных касательных напряжений, всех трех компонент энергии турбулентности и скорости ее диссипации. Параметры потока меняются по всей длине вращаемой секции (здесь $0 < x/R < 50$), и не достигается картина, не зависящая от дальнейшего увеличения расстояния по оси x от начала секции. Модель уравнений переноса рейнольдсовых напряжений (модель 1) в целом дает лучшее согласие с экспериментальными данными, чем модели с алгебраическими соотношениями для вторых моментов (модели 2 и 3). Модель 2 с неравновесными соотношениями для нормальных напряжений, в свою очередь, позволяет точнее вычислить поведение энергии турбулентности и ее компонент в приосевой области потока при умеренной скорости вращения трубы, чем модель 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 93-013-17632, 94-05-16287, 96-15-96310 и 96-02-16001) и INTAS (грант 93-2492-ext, программа центра ICFPM).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Prandtl L.** Einfluss stabilisierender Krafte auf die Turbulenz // Vortrage aus d.Gtd.d.Aerodyn. und verwandfer Gebiete. Aachen, 1929. Berlin, 1930.
2. **Bradshaw P.** Effects of streamline curvature on turbulent flow // AGARDograph. 1973. N 169.
3. **Онуфриев А. Т., Христианович С. А.** Об особенностях турбулентного движения в вихревом кольце // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229, № 1. С. 42–44.
4. **Онуфриев А. Т.** Об особенностях движения в ядре вихревого кольца // Физическая механика. Динамические процессы в газах и твердых телах. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. № 4. С. 31–69.
5. **Заец П. Г., Онуфриев А. Т., Пилипчук М. И. и др.** Использование термоанемометрического комплекса в блоке с ЭВМ для измерения характеристик турбулентных завихренных потоков // Физические методы исследования прозрачных неоднородностей. М.: Знание, 1986.

6. **Сафаров Н. А.** Поведение параметров развитого турбулентного потока в прямолинейном цилиндрическом канале, вращаемом относительно продольной оси // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 1986.
7. **Заец П. Г.** Экспериментальное исследование спектра турбулентности в потоке во вращающейся трубе // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 1986.
8. **Заец П. Г., Сафаров Н. А., Сафаров Р. А.** Экспериментальное изучение поведения характеристик турбулентного потока при вращении канала относительно продольной оси // Современные проблемы механики сплошных сред. М.: МФТИ, 1985. С. 136–142.
9. **Роди В.** Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 227–322.
10. **Курбацкий А. Ф.** Моделирование нелокального турбулентного переноса импульса и тепла. Новосибирск: Наука, 1988.
11. **Launder B. E., Reece G. J., Rodi W.** Progress in the development of a Reynolds-stress turbulent model // J. Fluid. Mech. 1975. V. 68. P. 537–566.
12. **Hossain M. S.** Mathematische modellierung von turbulenten auftriebstromungen // Ph. D. Thesis. Karlsruhe: University of Karlsruhe, 1980.
13. **Gibson M. M., Launder B. E.** Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer // J. Fluid Mech. 1978. V. 86. P. 491–511.
14. **So R. M. C., Yoo G. J.** On the Modeling of Low-Reynolds-Number Turbulence. NASA Contractor Report, 1986. N 3994.
15. **Bradshaw P.** The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow // J. Fluid Mech. 1969. V. 36. P. 177–191.
16. **Лондер Б. Е., Приддин С. Х., Шарма Б. И.** Расчет турбулентного пограничного слоя на вращающихся и криволинейных плоскостях // Теорет. основы инж. расчетов. 1977. № 1. С. 332–340.
17. **Daly B. J., Harlow F. H.** Transport equations in turbulence // Phys. Fluids. 1970. V. 13, N 11. P. 2634–2649.
18. **Spalding D. B.** GENMIX: a General Computer Program for Two-Dimensional Parabolic Phenomena. Oxford: Pergamon Press, 1977.
19. **Laufer J.** The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NASA Report. 1954. N 1174.
20. **Букреев В. И., Зыков В. В., Костомаха В. А.** Одномерные законы распределения вероятностей флуктуаций скорости при турбулентном течении в круглой трубе // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1975. № 13, вып. 3. С. 3–9.
21. **Schildknecht M., Miller J. A., Meier G. E. A.** The influence of suction on the structure of turbulence in fully developed pipe flow // J. Fluid Mech. 1979. V. 90. P. 67–107.
22. **Lawn C. I.** The determination of the rate of dissipation in turbulent pipe flow // J. Fluid Mech. 1971. V. 48, pt 3. P. 477–505.

Поступила в редакцию 11/VII 1996 г.