

УДК 532.584  
DOI: 10.15372/PMTF202415503

## ВРАЩАТЕЛЬНАЯ СЕДИМЕНТАЦИЯ В СУСПЕНЗИЯХ С НЕЙТРАЛЬНО ПЛАВУЧИМИ ЧАСТИЦАМИ

В. В. Шелухин, В. В. Неверов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,

Новосибирск, Россия

E-mails: shelukhin@hydro.nsc.ru, neverov@hydro.nsc.ru

Путем математического моделирования исследуется вращательная седиментация нейтрально плавучих частиц в суспензиях в случае двумерных круговых течений между двумя цилиндрами. В отсутствие гравитации сепарация частиц вызывается вращением внутреннего цилиндра. Установлено, что седиментация зависит от вращения частиц. В рамках континуума Коссера суспензия рассматривается как микрополярная жидкость. Исследовано влияние эксцентриситета несоосных цилиндров на фронт седиментации.

**Ключевые слова:** суспензии нейтрально плавучих частиц, центрифуга, седиментация, микрополярная жидкость

**Введение.** Для выделения частиц из суспензий часто применяются центрифуги. Как показали исследования, проведенные в работе [1], вращательная седиментация позволяет более детально изучить взаимодействие макромолекул коллоидных систем. В соответствии с этим методом высокодисперсный коллоидный раствор заключен в ячейку клиновидной формы, вращающуюся вокруг оси, на которой находится вершина клина. Образцы центрифугируются при скоростях, достаточных для получения седиментации и узких зон градиентов концентрации. При изучении такого течения важные результаты были получены с использованием уравнения диффузии Ламма, основанного на эмпирическом коэффициенте седиментации [2].

В данной работе предлагается новая математическая модель вращательной седиментации с учетом вращения частиц. Существует несколько подходов для описания суспензий. Отметим особенности предлагаемого метода. С целью учета вращения частиц применяется теория микрополярных жидкостей, в которой важную роль играет микроинерция частиц [3]. Согласно этой теории любой бесконечно малый объем содержит достаточно большое количество частиц. Поэтому такой подход применим для суспензий с высокой концентрацией частиц. В [4] в рамках теории микрополярной жидкости доказано, что именно вследствие вращения частиц возникает эффект Сегре — Зильберберга — перемещение частиц к концентрической кольцевой области в ламинарном потоке нейтрально плавучей разбавленной суспензии жестких сфер в круглой трубе [5].

Теория микрополярной жидкости учитывает внутренние моменты количества движения и микроинерцию в соответствии с концепцией континуума Коссера, согласно которой каждая материальная точка рассматривается как твердое тело [6].

В теории микрополярной жидкости с учетом внутренних спинов тензор напряжений является несимметричным, поэтому используется тензор пар напряжений и уравнение углового момента включается в законы сохранения. В данной работе формулировка реологических уравнений включает введение новых вязкостей как для тензора напряжений Коши, так и для тензора пар напряжений. Помимо обычной сдвиговой вязкости (симметричная вязкость) применяется антисимметричная вязкость. В работах [7, 8] изложена теория и приведены результаты экспериментов по определению антисимметричной вязкости.

В данной работе рассматривается плоское течение суспензии в области между двумя окружностями, которое соответствует движению между двумя вертикальными цилиндрами без учета гравитации, когда в каждом горизонтальном сечении картина течения одна и та же. Течение вызвано вращением внутреннего цилиндра. Исследован также случай несоосных цилиндров. При этом седиментация также имеет место. Применительно к нейтрально плавучим частицам установлено поперечное перемещение частиц и показано, что причиной возникновения центробежной седиментации является вращение частиц. Следует отметить, что вращение круглых частиц вызывает появление поперечной силы Магнуса в несущем сдвиговом потоке, который описывается уравнениями Навье — Стокса [9].

**1. Описание математической модели.** Напомним, что в рамках континуума Коцсера частица рассматривается как твердое тело, поэтому помимо вектора скорости  $\mathbf{v}$  частица имеет вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  [3]. Скорость деформации описывается двумя тензорами

$$A = \nabla \boldsymbol{\omega}, \quad B = \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\omega},$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор Леви-Чивиты третьего ранга;  $\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\omega}$  — антисимметричная матрица:

$$(\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\omega})_{ij} = \omega_k \varepsilon_{ikj}, \quad \varepsilon_{ikj} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_j),$$

$\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — ортонормированный базис.

Рассматривается случай, когда частицы являются сферическими, плотности и скорости частиц и несущей жидкости одинаковы, поэтому важной характеристикой суспензии является концентрация твердых частиц  $c$  — термодинамическая переменная, входящая в тождество Гиббса для внутренней энергии  $E_0(\rho, \eta, c)$  [4]

$$dE_0 = \theta d\eta + \mu d\rho + z d(\rho c), \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность;  $\eta$  — энтропия единицы объема;  $\mu, z$  — химические потенциалы. Следовательно,

$$\theta = \frac{\partial E_0}{\partial \eta}, \quad \mu = \frac{\partial E_0}{\partial \rho}, \quad z = \frac{\partial E_0}{\partial (\rho c)},$$

где  $\theta$  — абсолютная температура. Поскольку в термодинамике давление есть производная энергии по объему, оно определяется равенством [10]

$$p = -E_0 + \theta\eta + \mu\rho + z\rho c. \quad (2)$$

Для построения законов сохранения применяется метод Халатникова — Ландау [11]. Сначала рассматриваются процессы в отсутствие диссипации и формулируются законы сохранения с неизвестными потоками

$$\rho_t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j}_t + \operatorname{div} \Pi = 0, \quad \eta_t + \operatorname{div} (\eta \mathbf{v}) = 0; \quad (3)$$

$$J(\rho c \boldsymbol{\omega})_t + \operatorname{div} M = 0, \quad (\rho c)_t + \operatorname{div} (c \mathbf{j}) = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{j}$  — поток массы;  $\Pi$  — тензор потока импульса;  $M$  — тензор потока момента импульса;  $J$  — момент инерции сферической частицы. Уравнения (3) представляют собой законы сохранения полной массы, импульса и энтропии. Уравнения (4) имеют смысл законов сохранения внутренних угловых моментов и массы частиц.

Введем полную энергию

$$E = E_0 + \frac{\rho|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{Jc\rho|\boldsymbol{\omega}|^2}{2}. \quad (5)$$

Из закона сохранения энергии

$$E_t + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0 \quad (6)$$

с неизвестным потоком  $\mathbf{Q}$  следует, что переопределенная система уравнений (3)–(6) приводит к следующим соотношениям [4]:

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}, \quad \Pi = pI + \mathbf{j} \otimes \mathbf{v}, \quad M = Jc\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{j}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{j} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \mathbf{j}Jc \frac{|\boldsymbol{\omega}|^2}{2} + \eta\theta\mathbf{v} + \mu\mathbf{j} + z\mathbf{c}\mathbf{j}.$$

С учетом диссипации законы сохранения принимают вид

$$\begin{aligned} \rho_t + \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, & \mathbf{j}_t + \operatorname{div} (\Pi + \Pi_1) &= 0, & \eta_t + \operatorname{div} \left( \eta\mathbf{v} + \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) &= \frac{R}{\theta}, \\ J(\rho c\boldsymbol{\omega})_t + \operatorname{div} (M + M_1) &= \mathbf{f}_\omega, & (\rho c)_t + \operatorname{div} (c\mathbf{j} + \mathbf{l}) &= 0; \\ E_t + \operatorname{div} (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

с неизвестными  $\Pi_1, M_1, \mathbf{l}, \mathbf{q}, \mathbf{f}_\omega, \mathbf{Q}_1, R$ . Здесь  $R$  — производство энтропии;  $\mathbf{q}$  — вектор потока тепла;  $\mathbf{l}$  — диффузионный поток концентрации частиц;  $\mathbf{f}_\omega$  — плотность диссипативных моментов сил.

Дополнительные диссипативные члены определяются следующим образом. Вычислим производную энергии по времени:

$$E_t = \rho_t \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_t + J(\rho c)_t \frac{|\boldsymbol{\omega}|^2}{2} + J\rho c\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{w}_t + \theta\eta_t + \mu\rho_t + z(\rho c)_t.$$

Подставляя в это выражение частные производные по времени из законов сохранения (7), получаем формулу [4]

$$\begin{aligned} E_t + \operatorname{div} (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_1) &= \Pi_1 : B + M_1 : A - \boldsymbol{\omega} \cdot (\Pi_1 : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{f}_\omega) + \\ &\quad + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} + \mathbf{l} \cdot \nabla z - J\nabla \boldsymbol{\omega} : (\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{l}) + R, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \Pi_1^* \mathbf{v} + M_1^* \boldsymbol{\omega} + \mathbf{q} + \mathbf{l}(z - J|\boldsymbol{\omega}|^2/2), \\ \Pi_1 : B &= (\Pi_1)_{ij} B_{ij}, \quad (\Pi_1 : \boldsymbol{\varepsilon})_i = \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} (\Pi_1)_{jk}, \quad (\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{l})_{ij} = \omega_i l_j. \end{aligned}$$

Выберем  $R$  с учетом условия, что правая часть уравнения (8) равна нулю, и положим  $M_1 = M_2 + M_3$ . Выберем также величины  $\mathbf{f}_\omega, M_3, \mathbf{l}$  по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\omega &= \boldsymbol{\varepsilon} : \Pi_1, \quad M_3 = J\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{l} - \alpha_3 \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{l} + \alpha_4 \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbf{l} \times \boldsymbol{\omega}_r); \\ \nabla z &= -\mathbf{l}/\alpha_1 - \alpha_2 \mathbf{l} \times \boldsymbol{\omega}_r + \alpha_3 \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \alpha_4 \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega}_r, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\omega} - \operatorname{rot} \mathbf{v}/2$ . При указанном выборе справедливо следующее представление для  $R$ :

$$R = -\Pi_1 : B - M_2 : A - \mathbf{q} \cdot \nabla \theta / \theta + l^2 / \alpha_1. \quad (10)$$

Сформулируем определяющие уравнения:

$$S = -\Pi_1 = 2\eta_s B_s + 2\eta_a B_a, \quad N_1 = -M_2 = 2\eta_\omega A, \quad \mathbf{q} = -\boldsymbol{\varepsilon} \nabla \theta. \quad (11)$$

Здесь  $S$  — вязкая часть тензора напряжений;  $N_1$  — вязкая часть тензора пар напряжений;  $\eta_s, \eta_a$  — вязкости;  $\eta_\omega$  — угловая вязкость. При этом единицей измерения отношения

$\eta_\omega/\eta_s$  является сантиметр квадратный. Нетрудно показать, что для уравнений (11) выполняется неравенство  $R \geq 0$ . Отметим необходимое условие неотрицательности вязкостей и теплопроводности  $\kappa$ . Симметричная и антисимметричная части матрицы  $B$  определяются формулами

$$B_s = (B + B^*)/2, \quad B_a = (B - B^*)/2, \quad B = B_s + B_a.$$

Вязкость  $\eta_s$  есть классическая сдвиговая вязкость. В работе [8] установлено, что антисимметричная вязкость  $\eta_a$  характеризует напряженное состояние, которое возникает за счет наличия микро- и макровращений. Там же приведена зависимость  $\eta_a$  от концентрации частиц.

Введем матрицу

$$S_b = \alpha_1^{-1} I - \alpha_2 \varepsilon : \boldsymbol{\omega}_r,$$

тогда уравнение (9) можно записать в виде

$$\mathbf{l} = S_b^{-1}(-\nabla z + \alpha_3 \operatorname{rot} \mathbf{w} + \alpha_4 \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_r). \quad (12)$$

В случае  $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$  равенство (12) представляет собой известный закон Фика [11].

Из (1), (2) следует

$$\nabla p = \eta \nabla \theta + \rho \nabla \mu + \rho c \nabla z.$$

Далее предполагается, что химический потенциал  $\mu$  есть известная функция переменных  $p, \theta, c$  и

$$\nabla \mu = \mu_p \nabla p + \mu_\theta \nabla \theta + \mu_c \nabla c.$$

Поэтому вместо (12) можно использовать уравнение

$$\mathbf{l} = -S_b^{-1}(\gamma_3 \nabla c + \gamma_1 \nabla p + \gamma_2 \nabla \theta - \alpha_3 \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} - \alpha_4 \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla z &= \gamma_1 \nabla p + \gamma_2 \nabla \theta + \gamma_3 \nabla c, \\ \gamma_1 &= \frac{1 - \rho \mu_p}{\rho c}, \quad \gamma_2 = -\frac{\eta + \rho \mu_\theta}{\rho c}, \quad \gamma_3 = -\frac{\mu_c}{c}. \end{aligned}$$

В классической гидродинамике  $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ , поэтому уравнение (13) обычно записывается в виде

$$\mathbf{l} = -\rho D(\nabla c + k_\theta \nabla \theta + k_p \nabla p),$$

где  $D$  — коэффициент диффузии [11]. Следовательно, выражения для коэффициентов  $\gamma_i$  можно представить в виде

$$\gamma_1 = \rho D k_p / \alpha_1, \quad \gamma_2 = \rho D k_\theta / \alpha_1, \quad \gamma_3 = \rho D / \alpha_1.$$

Таким образом, получаем следующую математическую модель суспензии нейтрально плавучих частиц:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (14)$$

$$(\rho \mathbf{v})_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \operatorname{div} S,$$

$$J\{(\rho c \boldsymbol{\omega})_t + \operatorname{div}[\boldsymbol{\omega} \otimes (\rho c \mathbf{v} + \mathbf{l})]\} = \operatorname{div} N - \varepsilon : S, \quad (15)$$

$$(\rho c)_t + \operatorname{div}(\rho c \mathbf{v} + \mathbf{l}) = 0;$$

$$\eta_t + \operatorname{div}(\eta \mathbf{v} + \mathbf{q}/\theta) = R/\theta. \quad (16)$$

К этим уравнениям добавляются определяющие уравнения

$$S = 2\eta_s B_s + 2\eta_a B_a, \quad N = 2\eta_\omega A + \alpha_3 \varepsilon : \mathbf{l} - \alpha_4 \varepsilon : (\mathbf{l} \times \boldsymbol{\omega}_r); \quad (17)$$

$$\mathbf{l} = -S_b^{-1}(\gamma_3 \nabla c + \gamma_1 \nabla p + \gamma_2 \nabla \theta - \alpha_3 \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} - \alpha_4 \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_r). \quad (18)$$

Для замыкания модели (14)–(18) необходимо также добавить термодинамические соотношения. При заданной внутренней энергии  $E_0(\rho, \eta, c)$  тождество Гиббса имеет вид

$$dE_0 = \theta d\eta + \mu d\rho + z d(\rho c), \quad \theta = \frac{\partial E_0}{\partial \eta}, \quad \mu = \frac{\partial E_0}{\partial \rho}, \quad z = \frac{\partial E_0}{\partial (\rho c)}.$$

Давление определено уравнением (2). Поток тепла  $\mathbf{q}$  и производство энтропии  $R$  удовлетворяют закону Фурье  $\mathbf{q} = -\boldsymbol{\kappa} \nabla \theta$  и уравнению (10).

Свойство микрополярности исчезает, если частицы отсутствуют, т. е.  $c = 0$ . Поэтому  $\eta_a|_{c=0} = 0$ . Поток концентрации  $\mathbf{l}$  равен нулю при  $c = 0$  или  $c = 1$ . Поэтому коэффициенты  $\alpha_3, \alpha_4, k_p$  равны нулю при  $c = 0$  и  $c = 1$ .

**2. Безразмерные уравнения.** Будем пренебрегать тепловыми потоками и рассматривать несжимаемую жидкость, т. е. примем условие  $\rho = \operatorname{const}$ . В уравнении (18) коэффициент  $\gamma_2$  полагается равным нулю. Известно, что в случае несжимаемой жидкости давление не является термодинамической переменной, поэтому модель сводится к законам сохранения (15) для определения скорости, угловой скорости, концентрации и давления:

$$\begin{aligned} \rho[\mathbf{v}_t + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})] &= -\nabla p + \operatorname{div} S, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \rho J[(c\boldsymbol{\omega})_t + \operatorname{div}(\boldsymbol{\omega} \otimes (c\mathbf{v} + \rho^{-1}\mathbf{l}))] &= \operatorname{div} N - \varepsilon : S, \\ c_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)c &= -\rho^{-1} \operatorname{div} \mathbf{l}. \end{aligned}$$

В предположении  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$  и в пренебрежении бародиффузией определяющие уравнения для вязкой части тензора напряжений и тензора пар напряжений принимают вид

$$S = 2\eta_s B_s + 2\eta_a B_a, \quad N = 2\eta_\omega A - \alpha_4 \varepsilon : (\mathbf{l} \times \boldsymbol{\omega}_r).$$

Поток концентрации определяется по обобщенному закону Фика

$$\mathbf{l} = -\alpha_1[\gamma_3 \nabla c - \alpha_4 \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_r].$$

В работе [8] установлено, что коэффициент  $\alpha_4$  определяет вращательную диффузию [11]. Такая диффузия обусловливает перемещение частиц Сегре — Зильберберга в поперечном направлении [4].

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \tilde{x}\mathbf{x}', \quad \mathbf{v} = \tilde{v}\mathbf{v}', \quad t = \tilde{t}\mathbf{t}', \quad p = \tilde{p}p', \quad \boldsymbol{\omega} = \tilde{\omega}\boldsymbol{\omega}', \\ S &= \tilde{S}S', \quad N = \tilde{N}N', \quad \mathbf{l} = \tilde{\mathbf{l}}\mathbf{l}', \quad J = \tilde{J}j \end{aligned}$$

(величины с символом “ $\sim$ ” — характерные значения соответствующих величин). Положим

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{v}}, \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{\tilde{t}}, \quad \tilde{p} = \rho\tilde{v}^2, \quad \tilde{S} = \frac{\tilde{\eta}_s \tilde{v}}{\tilde{x}}, \quad \tilde{N} = \tilde{x}\tilde{\omega}\tilde{\eta}_s, \quad \tilde{J} = \tilde{x}^2, \quad \tilde{l} = \rho\tilde{v}$$

и введем безразмерные параметры

$$\operatorname{Re} = \frac{\rho\tilde{x}\tilde{v}}{\tilde{\eta}_s}, \quad \Gamma_3 = \frac{\alpha_1\gamma_3}{\rho\tilde{x}\tilde{v}}, \quad \Gamma_4 = \frac{\alpha_1\alpha_4\tilde{\omega}^2}{\rho\tilde{v}^2}, \quad L_1 = \frac{\eta_\omega}{\tilde{x}^2\tilde{\eta}_s}, \quad L_2 = \frac{\alpha_4\rho\tilde{v}}{\tilde{x}\tilde{\eta}_s}.$$

Опуская штрихи, получаем следующие безразмерные уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_t + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) &= -\nabla p + 2 \operatorname{Re}^{-1} \operatorname{div} S, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ j \operatorname{Re}[(c\boldsymbol{\omega})_t + \operatorname{div}(\boldsymbol{\omega} \otimes (c\mathbf{v} + \rho^{-1}\mathbf{l}))] &= \operatorname{div} N - \varepsilon : S, \\ c_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)c &= -\rho^{-1} \operatorname{div} \mathbf{l}, \\ S &= \frac{\eta_s}{\tilde{\eta}_s} B_s + \frac{\eta_a}{\tilde{\eta}_s} B_a, \quad N = L_1 \nabla \boldsymbol{\omega} - L_2 \varepsilon : (\mathbf{l} \times \boldsymbol{\omega}_r), \quad \mathbf{l} = -\Gamma_3 \nabla c + \Gamma_4 \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_r. \end{aligned}$$

В общем случае вязкости могут зависеть от концентрации частиц. Так как при  $c = 0$  и  $c = 1$  диффузионный поток  $\mathbf{l}$  должен обращаться в нуль, безразмерные коэффициенты диффузии и вращательной диффузии выбираются в виде

$$\Gamma_i = \Gamma_i^0 c(1 - c), \quad i = 3, 4.$$

**3. Течения типа течения Куэтта между двумя вращающимися несоосными цилиндрами.** Рассмотрим сначала двумерные круговые течения между двумя соосными вращающимися цилиндрами ( $R_1$  — радиус внутреннего цилиндра,  $R_2$  — радиус внешнего цилиндра). Без учета силы тяжести картины течения в каждом сечении, перпендикулярном оси симметрии цилиндров  $z$ , одинаковы. Поля скорости и угловой скорости не зависят от переменной  $z$  и имеют представления

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)^T, \quad \boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)^T. \quad (19)$$

Координаты векторов  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  зависят лишь от времени и переменных  $x$ ,  $y$ . Остальные неизвестные функции зависят только от этих переменных. Следует отметить, что течения типа (19) также допускаются полными уравнениями при наличии эксцентризитета между цилиндрами, когда ось вращения внешнего цилиндра проходит через начало системы координат  $(x, y)$ , а центр внутреннего цилиндра задается вектором  $\mathbf{r}_1$ , лежащим в плоскости  $(x, y)$ .

Будем рассматривать вращение только внутреннего цилиндра с угловой скоростью  $\Omega$ , направленной вдоль оси  $z$ . В размерном виде указанному течению соответствуют следующие граничные условия на поверхностях цилиндров  $\Sigma_i$ :

$$\mathbf{v}|_{\Sigma_1} = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)|_{\Sigma_1}, \quad \mathbf{v}|_{\Sigma_2} = 0; \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\omega}|_{\Sigma_i} = \frac{\lambda_i}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}|_{\Sigma_i}, \quad (c\rho\mathbf{v} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} = 0. \quad (21)$$

Здесь равенства (20) представляют собой граничные условия прилипания. Первое условие (21) означает, что микровращения пропорциональны макровращениям с различными постоянными проскальзывания  $\lambda_i$  ( $0 \leq \lambda_i \leq 1$ ) на внутренней и внешней границах [7]. Второе условие (21) означает отсутствие потока частиц через границы,  $\mathbf{n}$  есть вектор внешней нормали.

Представим характерные значения в виде  $\tilde{x} = R_1$ ,  $\tilde{\omega} = \Omega$ ,  $\tilde{v} = R_1\Omega$ , а радиус  $R_2$  внешнего цилиндра выберем таким образом, чтобы в безразмерных переменных область течения между соосными цилиндрами определялась неравенствами  $1 < r < 2$ . При вычислениях будем использовать следующие значения параметров:  $\operatorname{Re} = 10^{-2}$ ,  $j = 10^{-9}$ ,  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = 10^{-3}$ ,  $\Gamma_3 = 3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\Gamma_4 = 3$ ,  $\lambda_1 = 0,5$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Различие постоянных  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответствует различным условиям проскальзывания на  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Шероховатость как частиц, так и поверхностей цилиндров в данной работе не учитывается.

Граничные условия в безразмерных переменных записываются в виде

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} = 0, \quad v_\tau|_{\Sigma_1} = 1, \quad v_\tau|_{\Sigma_2} = 0, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} = 0.$$

Здесь  $v_\tau = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}$ ;  $\boldsymbol{\tau}$  — касательный единичный вектор на границе области течения. В качестве начальных данных выбраны следующие значения параметров:  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega} = 0$ ,  $c = 0,2$ .

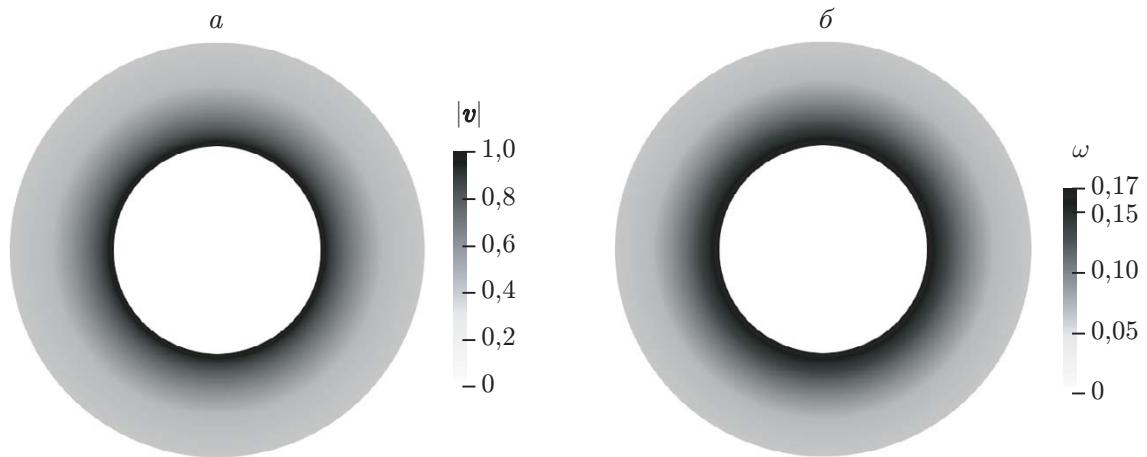


Рис. 1. Распределения абсолютного значения скорости смеси  $|v|$  (а) и микрорвращений частиц  $\omega$  (б)

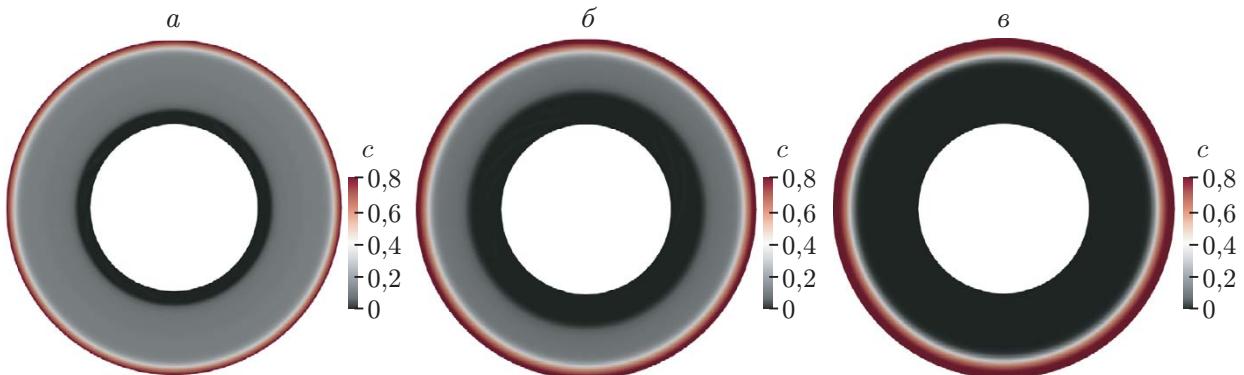


Рис. 2. Распределение концентрации частиц в различные моменты безразмерного времени:  
а —  $t = 2$ , б —  $t = 4$ , в —  $t = 8$

Приведем результаты вычислений, выполненных с помощью некоммерческого пакета FreeFem++. На рис. 1 показаны скорость и угловая скорость вращения частиц в некоторый момент времени. Видно, что наибольшая интенсивность течения наблюдается вблизи вращающегося внутреннего цилиндра. На рис. 2 представлена динамика концентрации частиц, подтверждающая наличие седиментации. Несмотря на то что решались двумерные уравнения, фронт седиментации представляет собой окружность. Значит, седиментация развивается устойчиво. Более детальная картина седиментации представлена на рис. 3.

Установлено, что седиментация вызвана вращением частиц. Действительно, если коэффициент вращательной диффузии в законе Фика положить равным нулю, то седиментация отсутствует (рис. 4). На рис. 4  $\Gamma_4^0$  — безразмерный коэффициент вращательной диффузии. Заметим, что именно вращательной диффузией можно объяснить эффект Сегре — Зильберберга. Учет силы Магнуса не позволяет обосновать разделение фаз, так как в рассматриваемых течениях скорости частиц и несущей жидкости одинаковы и проскальзывание отсутствует.

В известных экспериментах с цилиндрами конечной высоты наблюдается седиментация в случае равнодендральных супензий. Однако процесс разделения фаз происходит неустойчиво, возможно, это обусловлено гравитацией [12].

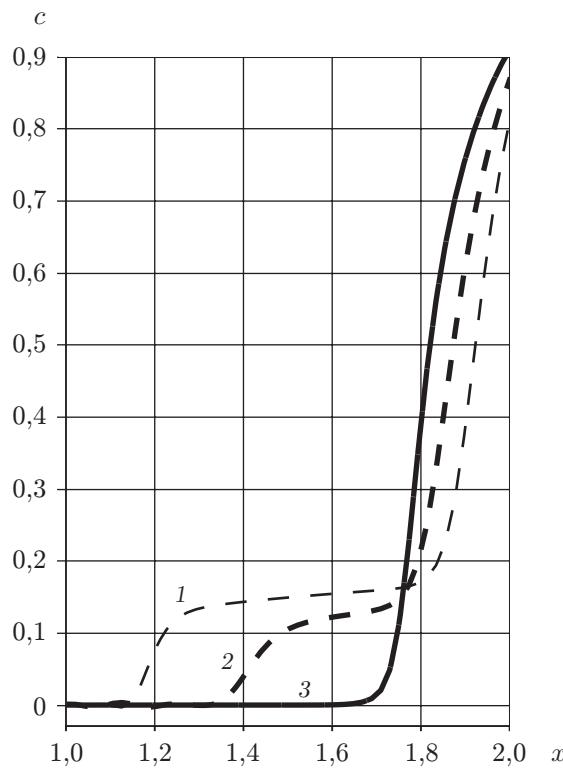


Рис. 3

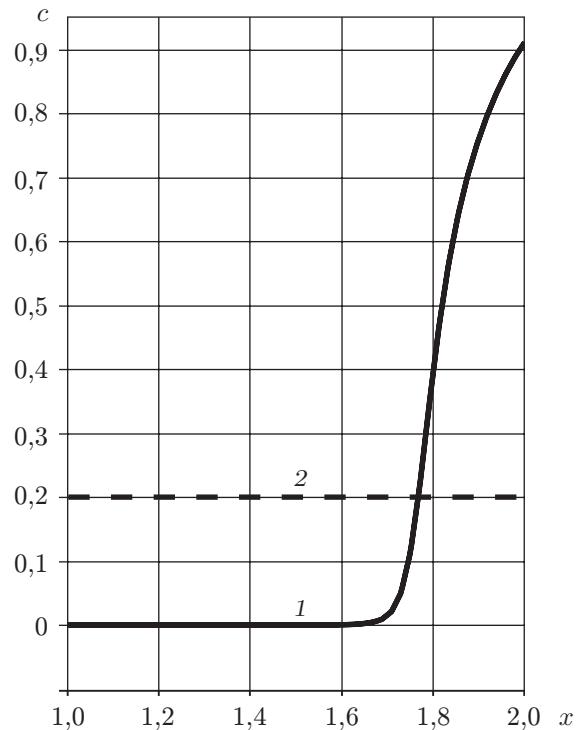


Рис. 4

Рис. 3. Распределение концентрации частиц вдоль линии  $y = 0$ ,  $x \in (1, 2)$  в различные моменты времени:  
 $1 — t = 2$ ,  $2 — t = 4$ ,  $3 — t = 8$

Рис. 4. Распределение концентрации частиц вдоль линии  $y = 0$ ,  $x \in (1, 2)$  в момент времени  $t = 8$ :  
 $1 — \Gamma_4^0 = 3$ ,  $2 — \Gamma_4^0 = 0$

Исследуем случай неосоосных цилиндров. Рассматривается двумерное течение между двумя цилиндрами с радиусами  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ , центр внешнего цилиндра радиусом  $R_2$  находится в начале координат  $(x_2^0, y_2^0) = (0, 0)$ , центр внутреннего цилиндра смешен на расстояние  $\Delta x = 0,1$  по горизонтальной оси  $(x_1^0, y_1^0) = (0,1, 0)$ . Все параметры расчета те же, что и в случае концентрических цилиндров, кроме коэффициента вращательной диффузии  $\Gamma_4^0$ , который выбран равным 0,7. На рис. 5, а видно, что микровращения отстают от макровращений, так как  $\omega_r < 0$ . Значение величины  $\omega$  больше в широкой части зазора (рис. 5, б), но относительная скорость микровращений больше в узкой части (см. рис. 5, а). Из рис. 6 следует, что седиментация имеет место и в случае наличия эксцентриситета. Поясним важность этого результата. В ряде работ, посвященных исследованию седиментации в центрифугах в виде сектора, удается подобрать эмпирическую центробежную силу, зависящую от радиуса  $r$ . При таком подходе законы сохранения не используются, а математическая модель представляет собой одно параболическое уравнение Ламма для концентрации [2]

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D \frac{\partial c}{\partial r} - s \Omega^2 r^2 c \right),$$

где  $s$  — эмпирический коэффициент седиментации. Ясно, что такой подход неприменим

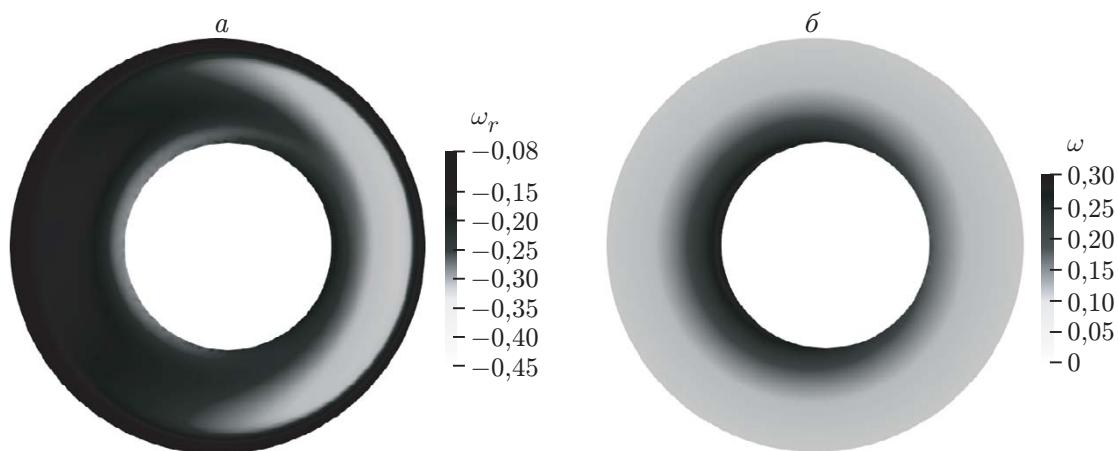


Рис. 5. Распределения относительной угловой скорости частиц  $\omega_r = \omega - \text{rot } \mathbf{v}/2$  (a) и микровращений частиц  $\omega$  (б)

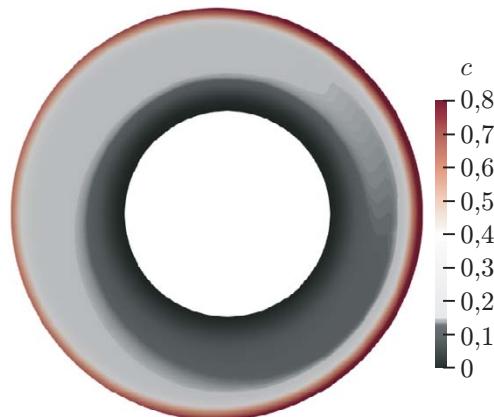


Рис. 6. Распределение концентрации частиц в момент времени  $t = 30$

в случае несоосных цилиндров, поскольку эмпирическая сила не может зависеть лишь от радиуса. В заключение следует отметить, что в рассматриваемом подходе для объяснения центрифужной седиментации нейтрально плавучих частиц не требуется введения центробежных сил. Показано, что такая седиментация объясняется вращением частиц и вращательной диффузией.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Svedberg T.** The ultracentrifuge / T. Svedberg, K. O. Pedersen. L.: Oxford Univ. Press, 1940.
2. **Brautigam C. A.** Using Lamm-equation modeling of sedimentation velocity data to determine the kinetic and thermodynamic properties of macromolecular interactions // Methods. 2011. V. 54. P. 4–15.
3. **Eringen A. C.** Microcontinuum field theories. V. 1, 2. N. Y.: Springer, 1999.
4. **Shelukhin V. V., Neverov V. V.** Thermodynamics of micropolar Bingham fluids // J. Non-Newton. Fluid Mech. 2016. V. 236. P. 83–90.
5. **Segré G., Silberberg A.** Radial Poiseuille flow of suspensions // Nature. 1961. V. 189. P. 209–210.

6. **Cosserat E.** Théorie des corps déformables / E. Cosserat, F. Cosserat. P.: Herman, 1909.
7. **Мигун Н. П.** Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурной жидкости / Н. П. Мигун, П. П. Прохоренко. Минск: Наука и техника, 1984.
8. **Shelukhin V. V.** Rotational particle separation in solutions: micropolar fluid theory approach // Polymers. 2021. V. 13, N 7. 1072.
9. **Proudman I., Pearson J. R. A.** Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 237–262.
10. **Shelukhin V. V.** A poroelastic medium saturated by a two-phase capillary fluid // Continuum Mech. Thermodynamics. 2014. V. 26, N 5. P. 619-638.
11. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
12. **Shaflinger U., Stibi H.** On centrifugal separation of suspensions in cylindrical vessels // Acta Mech. 1987. V. 67. P. 163–181.

*Поступила в редакцию 2/V 2024 г.,  
после доработки — 2/V 2024 г.  
Принята к публикации 3/VI 2024 г.*

---