

УДК 532.593.2, 533.6.011.5

## **Явление гистерезиса при взаимодействии косых гидравлических прыжков на мелкой воде<sup>\*</sup>**

**А.Н. Кудрявцев<sup>1</sup>, У.В. Михайлова<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный технический университет*

E-mail: ulyana.mikhaylova.99@mail.ru

Проведено исследование отражения гидравлических прыжков на мелкой воде. Получены теоретические критерии перехода между регулярным и маxовским отражениями, показано существование области углов падения, в которой возможны оба типа отражения. При численном моделировании наблюдался согласующийся с теоретическими предсказаниями гистерезис перехода. Показано, что гистерезис может быть получен при плавном изменении как угла клина, генерирующего гидравлический прыжок, так и числа Фруда набегающего потока.

**Ключевые слова:** уравнения мелкой воды, регулярное отражение, маxовское отражение, численное моделирование, гидравлические прыжки, критерии перехода, гистерезис.

### **Введение**

Вопрос о критериях перехода между типами отражения ударных волн — регулярным отражением (РО) и нерегулярным или маxовским отражением (МО) — долгое время оставался одним из наиболее запутанных в газовой динамике. Со временем классической работы Дж. фон Неймана [1] известно два возможных критерия перехода: критерий максимального угла поворота (*detachment criterion* в англоязычной литературе) и критерий механического равновесия, или критерий фон Неймана. Первый из них дает угол падающей волны  $\alpha_d$ , выше которого невозможно РО, второй — угол  $\alpha_N$ , ниже которого невозможно существование МО. Если число Маха превышает определенное значение, то существует интервал углов падения  $\alpha_N \leq \alpha \leq \alpha_d$  (область двойного решения), в котором теоретически возможны обе ударно-волновые конфигурации. Естественно, возникает вопрос: при каком угле в действительности происходит смена типа отражения?

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-11-00258).

До второй половины 1970-х годов имелись лишь весьма отрывочные экспериментальные данные об углах перехода между РО и МО. Они, казалось бы, свидетельствовали, что переход происходит вблизи  $\alpha_N$  [2]. В статье Х. Хорнунга с соавторами [3] было выдвинуто предположение, что в стационарных течениях смена типа отражения может сопровождаться гистерезисом: если угол падения скачка  $\alpha$  плавно увеличивать, то переход к МО произойдет при  $\alpha = \alpha_d$ , тогда как обратный переход при уменьшении угла будет иметь место при  $\alpha = \alpha_N$ . Предпринятая вскоре экспериментальная проверка [4], однако, не подтвердила данную гипотезу. Выяснилось, что как прямой, так и обратный переход происходили при  $\alpha \approx \alpha_N$  — всюду в области двойного решения наблюдалось МО.

Тем не менее в 1995 г. гистерезис был обнаружен практически одновременно в численной [5] и экспериментальной [6] работах. В последующие несколько лет этот вопрос стал предметом интенсивных исследований в разных странах. Выяснилось, что при аккуратном численном моделировании [7–9] гистерезис воспроизводится в точности в том виде, как это было предсказано в работе [3].

В экспериментальном плане ситуация оказалась более сложной. В то время как переход к РО всегда происходил вблизи  $\alpha_N$ , угол перехода к МО зависел от используемой экспериментальной установки и менялся от  $\alpha \approx \alpha_N$  до угла, несколько меньшего  $\alpha_d$  [10]. Было показано, что угол перехода зависит от уровня возмущений: гистерезис, наиболее близкий к теоретическим предсказаниям и численным расчетам, наблюдался в малотурбулентной аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН [11], в более шумных установках разница между углами прямого и обратного перехода была меньше, вплоть до того, что гистерезис мог полностью отсутствовать, как, собственно, и получалось в ранних экспериментах [2, 4].

Новое состояние знаний об отражении ударных волн было зафиксировано во втором издании монографии [12], в котором гистерезису перехода был посвящен отдельный большой раздел. Тем не менее один очень существенный вопрос так и остался невыясненным: какие именно возмущения вызывают ранний переход к МО во многих аэродинамических трубах, каков конкретный механизм их воздействия на ударно-волновые конфигурации? Численные эксперименты [13, 14] показали, что, вводя в набегающий поток возмущения определенного типа, действительно можно инициировать переход как от РО к МО, так и наоборот, однако потребные для этого уровни возмущений оказываются очень высокими, порядка десятков процентов от значений величин в набегающем потоке. Ожидать присутствия таких возмущений в аэродинамических трубах нет никаких оснований. Кроме того, в проводившихся в ИТПМ СО РАН экспериментах не удалось обнаружить корреляций между сигналом термоанемометра, измерявшего возмущения в набегающем потоке, и моментом перехода от РО к МО.

Измерение возмущений различных типов в сверхзвуковом потоке газа является достаточно сложной задачей. Не исключено, что изучать экспериментально воздействие возмущений было бы проще в другой физической системе, где их легче измерять и контролировать. В качестве такой системы можно рассматривать волны на мелкой воде. Хорошо известно: при взаимодействии ударных волн на мелкой воде (их называют гидравлическими прыжками, борами или прерывными волнами) также наблюдаются регулярные и маховские конфигурации [15]. Возникает вопрос, существует ли в этом случае область двойного решения и можно ли ожидать гистерезис при переходе между РО и МО косых гидравлических прыжков. Исследованию данного вопроса и посвящена настоящая статья.

### Постановка задачи

Как известно [15], волны на свободной поверхности мелкого слоя жидкости над плоским дном описываются системой уравнений, которая, будучи записана в консервативной форме, имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

здесь  $x, y$  — горизонтальные координаты,  $u, v$  — соответствующие компоненты скорости,  $h$  — глубина слоя жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения. Уравнения (1) совпадают по форме с изоэнтропическими уравнениями Эйлера для газа с показателем адиабаты  $\gamma = 2$ . Малые возмущения при этом распространяются со скоростью  $\sqrt{gh}$ , аналогом числа Маха является число Фруда

$$Fr = \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{gh}}. \quad (2)$$

Теоретический анализ взаимодействия косых гидравлических прыжков в сверхкритических ( $Fr > 1$ ) течениях может быть выполнен аналогично тому, как это делается для скачков уплотнения в газе. Он показывает (см. Приложение), что область двойного решения существует для всех  $Fr > Fr_* = 2,95$  (рис. 1).

На рис. 1a и 1b показаны как функции числа Фруда набегающего потока угол наклона падающего гидравлического прыжка  $\alpha$  и угол поворота потока за ним  $\theta$ , отвечающие критерию фон Неймана (нижний индекс N), критерию максимального поворота (индекс d) и так называемому звуковому критерию (индекс s), являющемуся альтернативным по отношению к критерию максимального поворота. Очевидно, что область двойного решения быстро расширяется с ростом Fr.

Для того чтобы проверить, возможен ли гистерезис, выполним численное моделирование взаимодействия косых гидравлических прыжков в сужающемся канале (рис. 2).

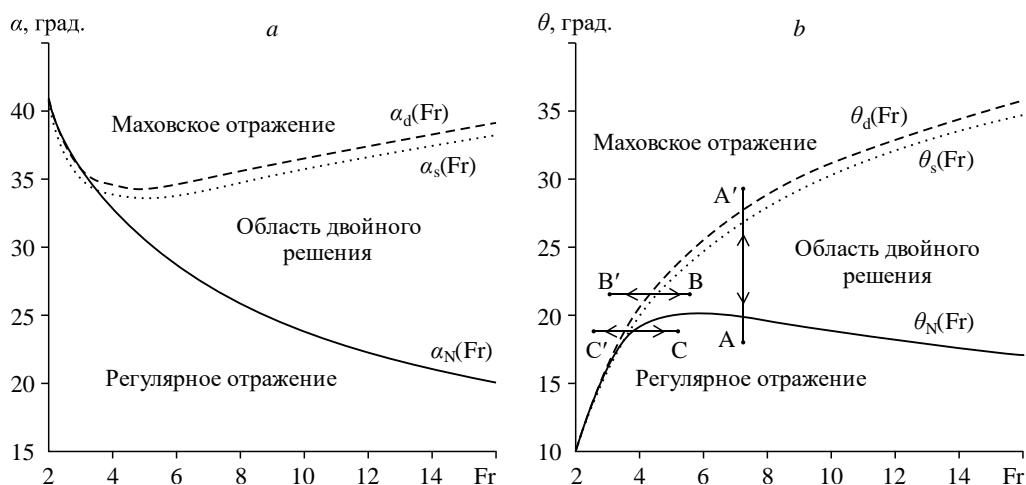


Рис. 1. Область двойного решения в плоскости  $\alpha, Fr$  (a) и в плоскости  $\theta, Fr$  (b).

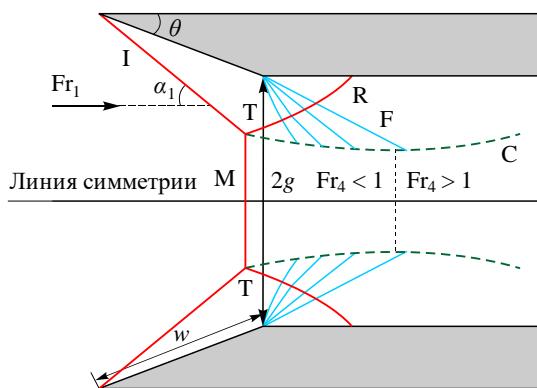


Рис. 2. Схема численного эксперимента: нерегулярное отражение косых гидравлических прыжков в сужающемся канале.

Уравнения (1), переписанные в общих криволинейных координатах, решаются на структурированной сетке, состоящей из четырехугольных ячеек. Для этого используется TVD-схема (total variation diminishing) с реконструкцией переменных на гранях между ячейками по формуле 4-го порядка точности [16]. Потоки через грани вычислялись путем приближенного решения задачи о распаде разрыва методом Хартена–Лакса–ван Леера–Айнфельдта (HLLE) [17]. Интегрирование по времени выполнялось с помощью явной схемы Рунге–Кутты 3-го порядка.

Симметричность задачи позволила проводить вычисления только в верхней половине области, принимая плоскость симметрии за нижнюю границу. Длина клина, составляющего наклонную стенку канала, равнялась  $w$ , расстояние от линии симметрии до параллельной ей стенки канала —  $g$ . Отношение  $g/w$  составляло 0,3 и оставалось постоянным во всех расчетах. На левой границе задавался равномерный сверхкритический поток, на правой границе переменные экстраполировались изнутри расчетной области, на верхней границе были наложены условия непротекания. Расчетная сетка состояла из  $606 \times 150$  ячеек.

### Переход между РО и МО при изменении угла клина

В первой серии численных экспериментов проверялось, возможно ли добиться РО $\leftrightarrow$ МО-перехода путем изменения угла наклона клина  $\theta$  при неизменном числе Фруда ( $Fr = 5$ ) сверхкритического течения на входе в канал, то есть вдоль траектории, подобной  $A \leftrightarrow A'$  на рис. 1б. Область двойного решения при  $Fr = 5$  простиралась от  $\theta_N = 19,93^\circ$  до  $\theta_d = 23,39^\circ$ . Первый расчет производился при  $\theta = 19^\circ < \theta_N$ , в качестве начальных данных был взят заполняющий всю область равномерный поток. Как и следовало ожидать, полученное после процесса установления течение представляло собой РО. Затем угол  $\theta$  менялся с шагом  $1^\circ$ , каждый раз при этом расчет начинался с поля, полученного на предыдущем шаге и отнесенном к тем же ячейкам перестроенной сетки. Вблизи верхней границы области двойного решения шаг, с которым менялся угол  $\theta$ , был уменьшен. Переход к МО имел место при  $\theta = 23,95^\circ$ , что хорошо согласуется с теоретическим критерием максимального угла поворота, но несколько выше  $\theta_d$ . Затем угол  $\theta$  уменьшался до тех пор, пока при  $\theta = 21^\circ$  не произошел обратный переход к РО. Угол обратного перехода оказался несколько выше теоретического значения  $\theta_N$ , что, очевидно, объясняется тем, что вблизи  $\theta_N$  размер маховского прыжка («ножки Маха») оказывается настолько малым, что не может быть адекватно разрешен на использованной сетке.

Поля уровня свободной поверхности жидкости, полученные при увеличении и уменьшении угла, показаны на рис. 3. Очевидно, что внутри области решения, в зависимости от предыстории, могут быть получены стационарные решения в виде как регулярной, так и маховской конфигурации гидравлических прыжков.

На рис. 4 показана зависимость длины ножки Маха (расстояния между тройными точками)  $s$ , отнесенной к длине клина  $w$ , от угла наклона клина  $\theta$ . Здесь также четко видна полная петля гистерезиса.

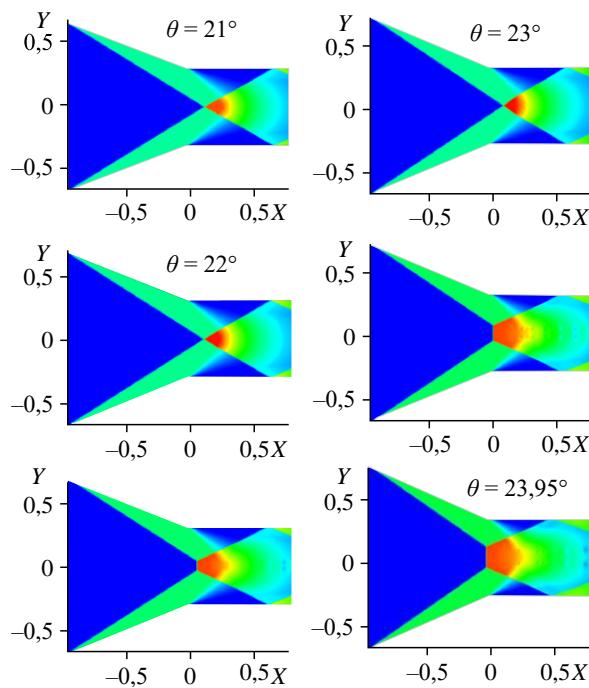


Рис. 3. Гистерезис при изменении угла наклона клина при  $\text{Fr} = 5$ .

### Переход между РО и МО при изменении числа Фруда

Во второй серии численных экспериментов проверялось, возможно ли добиться РО $\leftrightarrow$ МО-перехода путем изменения числа Фруда сверхкритического течения на входе в канал. Угол клина  $\theta$  был выбран равным  $25^\circ$ , а начальное число Фруда — равным 7. Расчет при  $\text{Fr} = 7$  и начальных данных в виде равномерного потока приводит к уставновившемуся течению с РО.

Далее число Фруда менялось вдоль траектории, подобной  $B \leftrightarrow B'$  на рис. 1б. Сначала оно уменьшалось с шагом 0,1, пока при  $\text{Fr} = 5,4$  не произошел переход к МО. Граница области двойного решения соответствует  $\text{Fr}_d = 5,7$ , следовательно, как и при изменении  $\theta$ , РО наблюдается в некоторой (небольшой) области изменения параметров, где оно теоретически невозможно. Увеличение сеточного разрешения вдвое — до  $1206 \times 300$  точек — не повлияло на полученный результат, при  $\text{Fr} = 5,5$  по-прежнему сохранялось РО. Следует отметить, что подобный эффект обнаруживался и при численном моделировании РО $\leftrightarrow$ МО-перехода в газах [7, 8]. Причем в обоих случаях использовались консервативные схемы, так что законы сохранения выполнялись точно, а ведь и условия Рэнкина — Гюгонио, и теоретические критерии перехода вытекают именно из законов сохранения. Разрешение данного

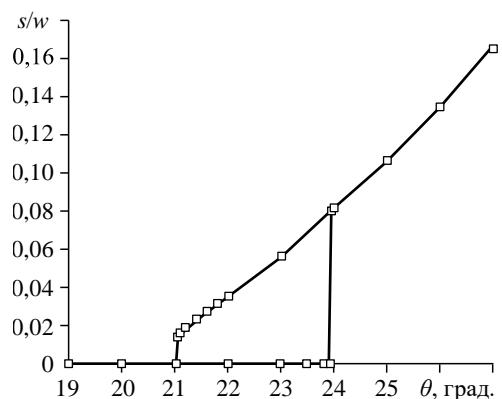


Рис. 4. Зависимость длины ножки Маха от угла наклона клина при  $\text{Fr} = 5$ .

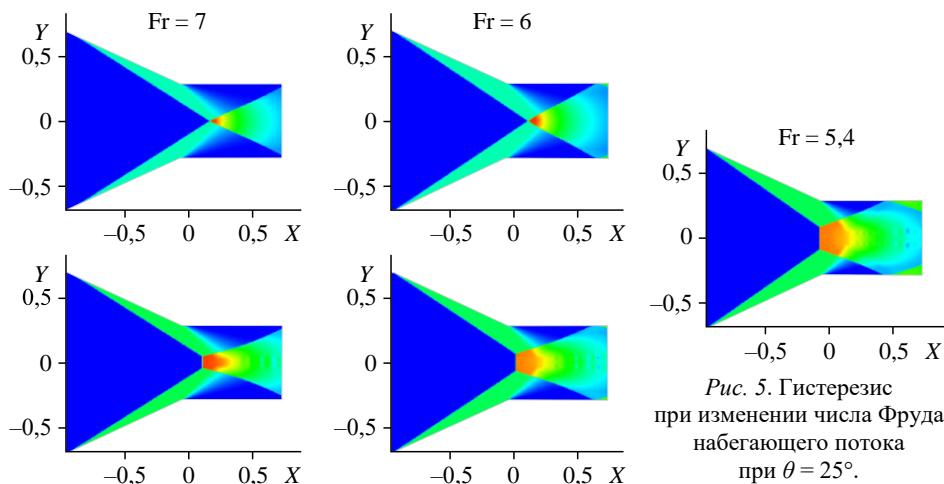


Рис. 5. Гистерезис при изменении числа Фруда набегающего потока при  $\theta = 25^\circ$ .

парадокса, по всей видимости, заключается в том, что теоретические критерии выводятся для бесконечно тонких ударных волн, тогда как в расчетах они имеют конечную толщину из-за действия численной вязкости. При отражении волн конечной толщины вместо точки отражения возникает зона существенно двумерного течения, параметры течения за которой не могут быть определены из соотношений Рэнкина – Гюгонио [18].

Отметим также, что полученные численные результаты позволяют, по-видимому, исключить звуковой критерий как альтернативный критерию максимального угла поворота: переход происходит при числе  $Fr$ , существенно меньшем, чем предсказываемое им значение  $Fr_s = 6,06$ . Непосредственно перед переходом, при  $Fr = 5,5$ , локальное значение числа Фруда за точкой отражения становится меньше 0,7, при этом наблюдаемая конфигурация остается РО.

После того как произошел переход к МО, число Фруда начинало постепенно увеличиваться, пока не возвращалось к исходному значению  $Fr = 7$ . Поскольку при этом линия, отвечающая критерию фон Неймана, не пересекалась, то, следовательно, в течение всего «обратного хода» сохранялось МО. Получившуюся незамкнутую петлю гистерезиса можно увидеть на визуализациях полей уровня свободной поверхности жидкости (рис. 5) и графике изменения длины ножки Маха (рис. 6). Верхняя часть рис. 5 соответствует «прямому ходу» численного эксперимента, когда число  $Fr$  уменьшалось, нижняя — «обратному ходу», когда оно увеличивалось.

Полная (замкнутая) петля гистерезиса может быть получена, если изменять число Фруда при меньшем угле клина по траектории, подобной  $C \leftrightarrow C'$  на рис. 1б и пересекаю-

щей линию, соответствующую критерию фон Неймана. Такая серия расчетов была проведена при  $\theta = 19^\circ$  и начальном числе Фруда  $Fr = 5$ . Выявлено, что при исходных значениях параметров возможно только РО. При уменьшении числа Фруда переход к МО произошел при  $Fr = 3,49$ ,

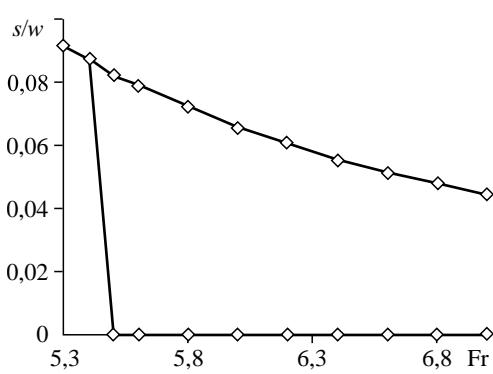


Рис. 6. Зависимость длины ножки Маха от числа Фруда набегающего потока при  $\theta = 25^\circ$ .

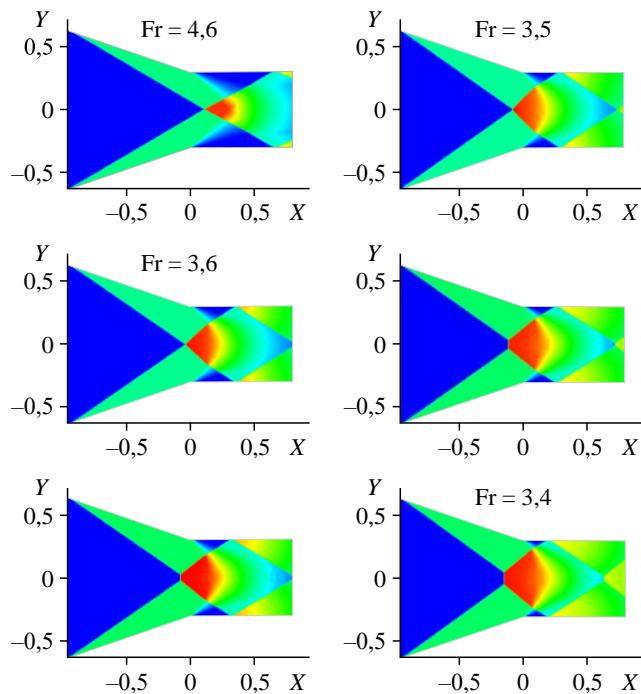


Рис. 7. Гистерезис при изменении числа Фруда набегающего потока при  $\theta = 19^\circ$ .

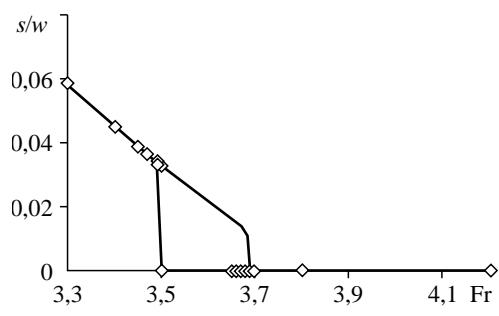
обратный переход — при увеличении числа Фруда: при  $Fr = 3,69$ . Соответствующие поля уровня жидкости для разных  $Fr$  показаны на рис. 7, а изменение размера ножки Маха — на рис. 8.

### Заключение

Для взаимодействия косых гидравлических прыжков (стационарных прерывных волн) на мелкой воде с помощью метода ударных поляр получены теоретические критерии перехода между РО и МО. Установлено, что для числа Фруда набегающего потока  $Fr > Fr_* = 2,95$  существует диапазон углов падения  $\alpha_N < \alpha < \alpha_d$ , в котором теоретически возможно как РО, так и МО.

Численное моделирование течения в сужающемся канале со сверхкритическим потоком на входе подтвердило возможность существования двух различных стационарных конфигураций прыжков при одинаковых параметрах набегающего потока и форме канала. При плавном изменении угла падения прыжка переход между РО и МО сопровождается гистерезисом. Переход от РО к МО происходит при угле падения, близком к предсказываемому критерием максимального угла поворота, обратный переход — при угле, близком к тому, что следует из критерия фон Неймана.

Рис. 8. Зависимость длины ножки Маха от числа Фруда набегающего потока при  $\theta = 19^\circ$ .



Угол падения прыжков можно менять как путем изменения угла наклона стенки канала, так и числа Фруда на входе в канал. Гистерезис наблюдается в обоих этих случаях, однако во втором случае если угол наклона стенки превышает некоторое значение, то петля гистерезиса остается незамкнутой.

Полученные результаты позволяют заключить, что неединственность стационарных конфигураций ударных волн и явление гистерезиса при переходе между регулярным и нерегулярным отражениями, впервые наблюдавшиеся для ударных волн в воздухе, являются характерной чертой поведения разрывных решений в различных физических системах. Это обстоятельство открывает новые возможности физического моделирования при проведении исследований, направленных на понимание явлений, связанных с взаимодействием ударных волн.

### Приложение

Анализ регулярной и маховской конфигураций (рис. 9, здесь Т — тройная точка) может быть выполнен с помощью соотношений Рэнкина–Гюгонио и основанного на них метода ударных поляр. Соотношения Рэнкина–Гюгонио для косого гидравлического прыжка имеют вид:

$$\begin{cases} h_1 u_{1n} = h_2 u_{2n}, \\ h_1 u_{1n}^2 + g h_1^2 / 2 = h_2 u_{2n}^2 + g h_2^2 / 2, \\ u_{1n} = u_{2\tau}, \end{cases} \quad (\text{П.1})$$

где  $u_n$  и  $u_\tau$  — нормальная и касательная к прыжку компоненты скорости, а индексы 1 и 2 относятся к величинам до и после прыжка соответственно.

После достаточно простых преобразований получаем отношения величин до и после прыжка как функции числа Фруда перед прыжком  $Fr_1$  и угла наклона прыжка  $\alpha$ :

$$\frac{u_{2n}}{u_{1n}} = \Lambda(Fr_1, \alpha), \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{\Lambda}, \quad \Lambda = \frac{1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2 \sin^2 \alpha}}{4Fr_1^2 \sin^2 \alpha}. \quad (\text{П.2})$$

Число Фруда после прыжка  $Fr_2$  и угол отклонения потока прыжком  $\theta$  также легко находятся и имеют вид:

$$Fr_2 = Fr_1 \sqrt{\Lambda(\Lambda^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}, \quad \theta = \alpha - \arctg(\Lambda \tan \alpha). \quad (\text{П.3})$$

Угол наклона прыжка  $\alpha$  может меняться от  $\arcsin(1/Fr_1)$  для бесконечно слабого прыжка до  $\pi/2$  для прямого прыжка. Когда  $\alpha$  проходит весь этот диапазон, точка в плоскости  $(\theta, h_2/h_1)$  описывает кривую, которую обычно называют ударной полярой. На рис. 10 кривая I показывает такую поляру для  $Fr_1 = 5$ . Точка D на ней соответствует

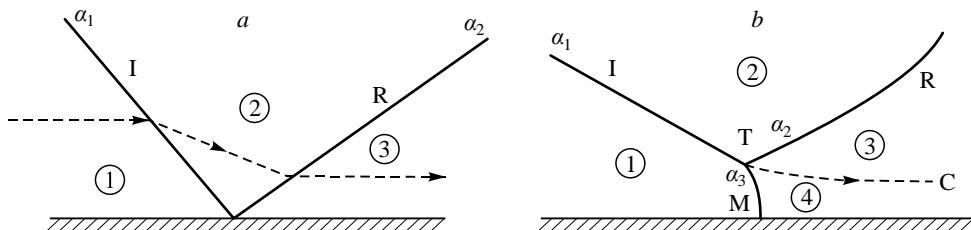


Рис. 9. Схемы регулярного (a) и маховского (b) отражений.

Рис. 10. Поляры падающего и отраженных гидравлических прыжков при  $Fr = 5$  и различных углах падения.  
 R1 —  $\alpha = \alpha_N = 30,62^\circ$ , R2 —  $\alpha = 32,5^\circ$ ,  
 R3 —  $\alpha = \alpha_d = 34,37^\circ$ .

максимально достижимому углу отклонения, а лежащая чуть ниже точки S — критическому ( $Fr_2 = 1$ ) течению за прыжком. Точка D разделяет поляру I на две части, отвечающие прыжкам слабого (ниже D) и сильного (выше D) семейств. Точка S также разделяет I на две части: ниже S течение за прыжком является сверхкритическим, выше S — докритическим.

Аналогично строится поляр R отраженного прыжка. На рис. 10 показаны три такие поляры — для  $\alpha = \alpha_N = 30,62^\circ$  (кривая R1),  $\alpha = 32,5^\circ$  (кривая R2) и  $\alpha = \alpha_d = 34,37^\circ$  (кривая R3).

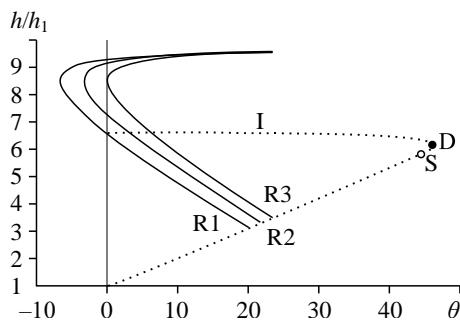
Нижняя из двух точек пересечения поляры отраженного прыжка с осью ординат отвечает состоянию за отраженным прыжком при РО, а точка пересечения поляры отраженного прыжка с полярой падающего прыжка I — состоянию за тройной точкой при МО. На плоскости  $(\theta, h/h_1)$  состояния вблизи тройной точки за падающим и отраженным прыжками (выше контактного разрыва С на рис. 9) и за ножкой Маха (ниже С) совпадают, уровень жидкости и направление потока в этих состояниях одинаковы, в то время как касательная компонента скорости и число Фруда отличаются.

Поляра R1 пересекает I в ее самой верхней точке, при этом угол отклонения потока равен нулю и ножка Маха в тройной точке перпендикулярна потоку. Расчеты и эксперименты показывают, что это минимальный угол падения  $\alpha_N$ , начиная с которого возможно МО. В самой этой верхней точке размер ножки Маха равен нулю; он постепенно возрастает при увеличении  $\alpha$ . Данный критерий, определяющий нижнюю границу существования МО, называется критерием механического равновесия или критерием фон Неймана [1].

Поляра R3 отвечает углу падения  $\alpha_d$ , при котором две точки пересечения с осью ординат сливаются в одну точку касания. При  $\alpha > \alpha_d$  поток, поворачивая в отраженной волне, уже не может вернуться к своему первоначальному направлению. Таким образом, это верхняя граница существования РО. Соответствующий критерий носит названия критерия отсоединения (detachment criterion) или критерия максимального угла поворота.

Было предположено [19], что на самом деле РО должно сменяться МО при угле  $\alpha_s$ , когда течение за отраженным прыжком перестает быть сверхкритическим. При этом точка пересечения с осью ординат является критической (звуковой) точкой на поляре отраженного прыжка (аналогичной точке S на поляре I) и  $Fr_3 = 1$ . Данный критерий перехода от РО к МО, являющийся альтернативным критерию максимального угла поворота, обычно называют звуковым критерием. Очевидно,  $\alpha_s < \alpha_d$ , но различие между ними невелико, так что определить на практике, в соответствии с каким из двух критериев происходит переход от РО к МО, может оказаться непросто.

Для косых гидравлических прыжков на мелкой воде критерий максимального угла поворота и звуковой критерий были выведены в работе [20] (см. также [21]), хотя результаты исследования были представлены в весьма неудобном виде. Критерий фон Неймана для волн на мелкой воде, насколько известно авторам, нигде ранее не рассматривался.



Существует единственное число Фруда набегающего потока  $Fr_*$ , при котором углы  $\alpha_N$  и  $\alpha_d$  совпадают. При  $Fr = Fr_*$  и  $\alpha = \alpha_N = \alpha_d$  поляра отраженной волны касается оси ординат в точке, являющейся одновременно самой верхней точкой поляры I. Вычисления дают  $Fr_* = 2,95$ . При  $Fr > Fr_*$  существует диапазон углов падения  $\alpha_N < \alpha < \alpha_d$ , в котором поляра отраженного прыжка, такая как R2 на рис. 10, пересекается и с осью ординат, и с полярой I. Таким образом, в этом диапазоне не запрещено существование как РО, так и МО (область двойного решения).

При  $Fr < Fr_*$  критерий фон Неймана становится неприменим, поскольку точка пересечения поляр I и R в этом случае лежит на верхней части поляры R, относящейся к физически нереализуемым прыжкам сильного семейства. Данный случай в статье не рассматривается.

Углы падения  $\alpha$  или отвечающие им углы поворота потока  $\theta$ , рассчитанные в соответствии с тремя описанными критериями, удобно представить как функцию числа Фруда  $Fr$  набегающего потока (см. рис. 1).

### Список литературы

1. von Neumann J. Oblique reflection of shock waves // Explosive Research Report No. 12, Navy Dept. Bureau of Ordnance, Washington DC. US Dept. Comm. Off. Tech Serv. No. PB37079. 1943. Воспроизведено в Collected Works of J. von Neumann. Pergamon Press, 1963. Vol. 6. P. 238–299.
2. Henderson L.F., Lozzi A. Experiments on transition of Mach reflexion // J. Fluid Mech. 1975. Vol. 68, Pt. 1. P. 139–155.
3. Hornung H.G., Oertel H., Sandeman R.J. Transition to Mach reflexion of shock waves in steady and pseudo steady flow with and without relaxation // J. Fluid Mech. 1979. Vol. 90. P. 541–560.
4. Hornung H.G., Robinson M.L. Transition from regular to Mach reflection of shock wave. Part 2. The steady-flow criterion // J. Fluid Mech. 1982. Vol. 123. P. 155–164.
5. Ivanov M.S., Gimelshein S.F., Beylich A.E. Hysteresis effect in stationary reflection of shock waves // Phys. Fluids. 1995. Vol. 7, No. 5. P. 685–687.
6. Chpoun A., Passerel D., Li H., Ben-Dor G. Reconsideration of oblique shock wave reflections in steady flows. Part 1. Experimental investigation // J. Fluid Mech. 1995. Vol. 301. P. 19–35.
7. Ivanov M.S., Markelov G.N., Kudryavtsev A.N., Gimelshein S.F. Numerical analysis of shock wave reflection transition in steady flows // AIAA J. 1998. Vol. 36, No. 11. P. 2079–2086.
8. Ivanov M.S., Vandromme D., Fomin V.M., Kudryavtsev A.N., Hadjadj A., Khotyanovsky D.V. Transition between regular and Mach reflection of shock waves: new numerical and experimental results // Shock Waves. 2001. Vol. 11, No. 3. P. 197–207.
9. Ivanov M.S., Ben-Dor G., Elperin T., Kudryavtsev A.N., Khotyanovsky D.V. Flow-Mach-number-variation-induced hysteresis in steady shock wave reflections // AIAA J. 2001. Vol. 39, No. 5. P. 972–974.
10. Иванов М.С., Кудрявцев А.Н., Никифоров С.Б., Хотяновский Д.В. Переход между регулярным и ма-ховским отражением ударных волн: новые численные и экспериментальные результаты // Аэромеханика и газовая динамика. 2002. № 3. С. 3–12.
11. Ivanov M.S., Kudryavtsev A.N., Nikiforov S.B., Khotyanovsky D.V., Pavlov A.A. Experiments on shock wave reflection transition and hysteresis in low-noise wind tunnel // Phys. of Fluids. 2003. Vol. 15, No. 3. P. 1807–1810.
12. Ben-Dor G. Shock wave reflection phenomena. 2<sup>nd</sup> ed. Berlin: Springer, 2007. 342 p.
13. Иванов М.С., Кудрявцев А.Н., Хотяновский Д.В. Численное моделирование перехода между регуля-рным и ма-ховским отражением ударных волн под действием локальных возмущений // Докл. АН. 2000. Т. 373, № 3. С. 332–336.
14. Kudryavtsev A.N., Khotyanovsky D.V., Ivanov M.S., Hadjadj A., Vandromme D. Numerical investigation of transition between regular and Mach reflections caused by free-stream disturbances // Shock Waves. 2002. Vol. 12, No. 2. P. 157–165.
15. Стокер Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит-ра, 1959. 620 с.
16. Yamamoto S., Daiguiji H. Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations // Computers & Fluids. 1993. Vol. 22, No. 2/3. P. 259–270.
17. Einfeldt B. On Godunov-type methods for gas dynamics // SIAM J. Numer. Anal. 1988. Vol. 25, No. 2. P. 294–318.
18. Khotyanovsky D.V., Bondar Ye.A., Kudryavtsev A.N., Shove G.V., Ivanov M.S. Viscous effects in steady reflection of strong shock waves // AIAA J. 2009. Vol. 47. P. 1263–1269.

19. Hornung H.G., Quirk J.J. The information condition in gasdynamics // 8<sup>th</sup> Int. Conf. Meth. Aerophys. Research (ICMAR'96, September 2–16, 1996, Russia), Proceedings, Pt. 3. Inst. Theor. Appl. Mech. SB RAS. 1996. P. 115–121.
20. Toro E.F., Olim M., Takayama K. Unusual increase in tsunami amplitude at the Okushiri island: Mach reflection of shallow water waves // Proc. 22<sup>nd</sup> Int. Symp. Shock Waves (London, UK, July 18-23, 1999) / Ed. by G.J. Ball, Hillier R., Roberts G.T. Univ. of Southampton, Southampton, UK. 1999. Vol. 2. P. 1207–1212.
21. Toro E.F. Shock-capturing methods for free-surface shallow flows. Wiley & Sons, 2001. 310 p.

*Статья поступила в редакцию 28 июня 2023 г.,  
после доработки — 28 июня 2023 г.,  
принята к публикации 17 августа 2023 г.*