УДК 539.3

О РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: itsvel@hydro.nsc.ru

В предположении, что в законе Гука модуль сдвига является константой, а объемный модуль зависит от знака первого инварианта тензора напряжений, предлагается вариант разномодульной теории упругости изотропных материалов. Исследованы плоские задачи (плоская деформация и обобщенное плоское напряженное состояние) и задачи изгиба пластин. Рассмотрены некоторые примеры.

Ключевые слова: разномодульная теория упругости, трехконстантный упругий потенциал, плоская задача, изгиб разномодульных пластин.

Начало разномодульной теории упругости (РМТУ) положено в работах [1–4], вызвавших поток публикаций, продолжающийся и в настоящее время. Обзор этих работ вплоть до 80-х гг. XX в. приведен в [5, 6]. Для класса изотропных материалов основная проблема РМТУ сводится к обобщению классического упругого потенциала, содержащего две константы (сдвиговой и объемный модули) и соответствующего закону Гука, на среды с разносопротивляемостью растяжению и сжатию. В [1–6] предложены различные подходы, в которых число независимых упругих констант варьировалось от трех до максимально возможных пяти: E_+, E_- — модули Юнга, ν_+, ν_- — коэффициенты Пуассона при растяжении и сжатии, G_0 — модуль сдвига при чистом сдвиге (см. также [7]). В [1, 2, 4, 7] упругий потенциал помимо общепринятых в классическом варианте первого и второго инвариантов тензора напряжений содержит третий инвариант. В отличие от подхода [8] это приводит к возникновению тензорно-нелинейных связей между напряжениями и деформациями. В настоящее время наметилась тенденция к построению тензорно-линейных определяющих уравнений РМТУ, базирующихся на трехконстантных потенциалах, не зависящих от третьего инварианта [9, 10]. В данной работе предложен простейший вариант подобной теории, в котором модуль сдвига G_0 является константой, а объемный модуль K зависит от знака первого инварианта тензора напряжений. Такой подход позволил свести плоские задачи в напряжениях к постановкам [11]. Исследованы также задачи изгиба разномодульных пластин, для прогибов и функции мембранных усилий получена система уравнений. Рассмотрен пример изгиба защемленной эллиптической пластины.

1. Простейшая трехконстантная РМТУ. Для классической изотропной среды, подчиняющейся закону Гука, упругий потенциал Φ, или удельную энергию, можно представить в виде

$$\Phi = \Phi_1(I_\sigma) + \Phi_2(\sigma_i), \qquad \Phi_1 = \frac{1-2\nu}{6E}\, I_\sigma^2, \qquad \Phi_2 = \frac{1+\nu}{3E}\, \sigma_i^2, \tag{1.1}$$

где $I_\sigma = \sigma_{kk}$ — первый инвариант; $\sigma_i^2 = (3/2)\sigma_{kl}^0\sigma_{kl}^0$; $\sigma_{kl}^0 = \sigma_{kl} - (1/3)I_\sigma\delta_{kl}$ $(k,l = 1,2,3)$; σ_i — интенсивность напряжений; σ_{kl}, σ_{kl}^0 и δ_{kl} — компоненты тензора напряжений, девиа-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05-01-00673, 05-01-08025, 06-08-96002).

тора напряжений и единичного тензора; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Слагаемое $\Phi_1 = I_\sigma^2/(18K)$ представляет собой удельную работу изменения объема, слагаемое $\Phi_2 = \sigma_i^2/(6G)$ — удельную работу формоизменения ($K = E/[3(1-2\nu)]$ — объемный модуль упругости; $G = E/[2(1+\nu)]$ — модуль сдвига).

Аналогичное (1.1) представление упругого потенциала для разномодульных изотропных сред в виде суммы удельных работ изменения объема и формы предложено в [7], где Φ_1 зависит от I_σ^2 и $\operatorname{sign} I_\sigma$, а Φ_2 является функцией инвариантов девиатора напряжений. Предложенные соотношения позволяют описать переход в пластическое состояние, в котором материал пластически несжимаем и гидростатическое давление, т. е. величина I_σ, не влияет на возникновение пластического течения. Кроме того, за счет второго слагаемого Φ_2, содержащего функцию угла вида напряженного состояния ξ, которую в силу изотропии можно представить в виде ряда по степеням $\sin 3\xi$, число N независимых упругих констант можно варьировать от трех до пяти (как отмечено выше, такое количество констант использовалось в различных вариантах РМТУ). В случае $N = 5$ выражение для Φ имеет вид [7]

$$\Phi = BI_\sigma^2 + (D_0 + D_1 \sin 3\xi + D_2 \sin^2 3\xi)^2 \sigma_i^2, \tag{1.2}$$

где

$$D_0 = (6G_0)^{-1/2}, \qquad D_1 = \frac{1}{2}\Big(\frac{1+\nu_-}{3E_-}\Big)^{1/2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1+\nu_+}{3E_+}\Big)^{1/2},$$

$$D_2 = \frac{1}{2}\Big(\frac{1+\nu_-}{3E_-}\Big)^{1/2} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1+\nu_+}{3E_+}\Big)^{1/2} - (6G_0)^{-1/2},$$

$$B = \frac{1-2\nu_+}{6E_+}\, H(I_\sigma) + \frac{1-2\nu_-}{6E_-}\, H(-I_\sigma), \qquad H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$\sin 3\xi = -(9/2)\sigma_{kn}^0 \sigma_{nl}^0 \sigma_{kl}^0/\sigma_i^3,$$

E_+, E_- — модули Юнга; ν_+, ν_- — коэффициенты Пуассона при растяжении и сжатии; G_0 — модуль сдвига при чистом сдвиге.

Из (1.2) следует, что $\Phi = \Phi(I_\sigma, \sigma_i, \xi)$ — непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, но при $I_\sigma = 0$ $\partial^2\Phi/\partial I_\sigma^2 = 2B$ терпит разрыв. При $D_1 \neq 0$ или $D_2 \neq 0$, т. е. при наличии в потенциале Φ слагаемых, зависящих от третьего инварианта девиатора напряжений, соответствующие связи между напряжениями и деформациями будут тензорно-нелинейными. Поскольку целью данной работы является построение простейшей тензорно-линейной РМТУ, в (1.2) ограничимся тремя константами, полагая $D_1 = D_2 = 0$. Введя для удобства обозначения $c = B$, $a = D_0^2$, из (1.2) получаем

$$\begin{gathered} \Phi = a\sigma_i^2 + cI_\sigma^2, \qquad a = \frac{1+\nu_+}{3E_+} = \frac{1+\nu_-}{3E_-} = \frac{1}{6G_0}, \\ c = c_+H(I_\sigma) + c_-H(-I_\sigma), \qquad c_\pm = (1-2\nu_\pm)/(6E_\pm). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Из (1.3) найдем

$$\varepsilon_{kl} = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{kl}} = 3a\sigma_{kl}^0 + 2cI_\sigma\delta_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, 3). \tag{1.4}$$

Следует отметить, что соотношения (1.3), (1.4) можно получить из четырехконстантной модели [3], в которой закон упругости также зависит от знака первого инварианта I_σ:

при $I_\sigma > 0$ имеют место соотношения (1.1) с константами ν_+, E_+, при $I_\sigma < 0$ — с константами ν_-, E_-. При $I_\sigma = 0$ закон упругости не определен, а потенциал Φ терпит разрыв. Для устранения этого разрыва необходимо потребовать равенства модулей сдвига $G_+ = E_+/[2(1+\nu_+)]$ и $G_- = E_-/[2(1+\nu_-)]$ при растяжении и сжатии, в результате чего модель становится трехконстантной.

Из (1.3), (1.4) следует, что при одноосном растяжении (когда единственной отличной от нуля компонентой напряжений является $\sigma_{11} = \sigma > 0$) $\varepsilon_{11} = \sigma/E_+$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu_+\sigma/E_+$; при одноосном сжатии ($\sigma_{11} = \sigma < 0$) $\varepsilon_{11} = \sigma/E_-$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu_-\sigma/E_-$; при кручении ($\sigma_{12} = \tau$) $2\varepsilon_{12} = \tau/G_0$.

Таким образом, соотношения (1.3), (1.4) описывают разномодульную изотропную среду и являются простейшим обобщением классического закона Гука, когда модуль сдвига G является постоянной величиной, а объемный модуль K зависит от знака первого инварианта I_σ тензора напряжений, т. е. значения K при всестороннем растяжении и сжатии различны.

Константы модели a, c_+ и c_- определяются из следующих экспериментов: 1) на чистый сдвиг, когда при заданном напряжении $\sigma_{12} = \tau$ измеряется деформация $\varepsilon_{12} = 3a\tau$; 2) на одноосное растяжение ($\sigma_{11} = \sigma > 0$, $I_\varepsilon = 6c_+\sigma$) и сжатие ($\sigma_{11} = \sigma < 0$, $I_\varepsilon = 6c_-\sigma$) при заданном напряжении $\sigma_{11} = \sigma$ с измерением объемной деформации $I_\varepsilon = \varepsilon_{kk}$.

Заметим, что в отличие от модели [1, 2], где определяющие уравнения записываются в главных осях тензора напряжений и входящие в эти уравнения коэффициенты зависят от знаков трех главных напряжений, формулы (1.4), справедливые в любой декартовой системе координат, содержат только один зависящий от знака инвариантной величины I_σ коэффициент c (поскольку $a = \mathrm{const}$). Кроме того, несмотря на линейность соотношений между главными напряжениями и деформациями, в [1, 2] связи между тензором напряжений и тензором деформаций являются нелинейными [7].

2. Об устойчивости и единственности решения краевых задач РМТУ. Условие устойчивости в малом формулируется следующим образом [7]. Для любых бесконечно малых приращений напряжений $\delta\sigma_{kl}$ и соответствующих им приращений деформаций $\delta\varepsilon_{kl}$ имеет место неравенство

$$\delta\sigma_{kl}\delta\varepsilon_{kl} > 0, \qquad \delta\sigma_{kl}\delta\sigma_{kl} \neq 0, \tag{2.1}$$

которое для непрерывно дифференцируемых функций $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}(\sigma_{mn})$ эквивалентно аналогичному неравенству для конечных приращений [12]

$$\Delta\sigma_{kl}\Delta\varepsilon_{kl} > 0, \quad \Delta\sigma_{kl}\Delta\sigma_{kl} \neq 0, \quad \Delta\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^{(1)} - \sigma_{kl}^{(2)}, \quad \Delta\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^{(1)} - \varepsilon_{kl}^{(2)}, \tag{2.2}$$

т. е. условию устойчивости в большом, что обеспечивает единственность решения краевых задач.

Как показано в [7, 12], чтобы выполнялось неравенство (2.1) для потенциала общего вида $\Phi = \Phi(I_\sigma, \sigma_i, \xi)$, необходимо и достаточно положительной определенности матрицы $\|a_{ij}\|$ с коэффициентами

$$\begin{gathered} a_{11} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma_i^2}, \qquad a_{22} = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_i}\,\sigma_i + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}, \qquad a_{33} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_\sigma^2}, \\ a_{12} = \sigma_i\,\frac{\partial}{\partial\sigma_i}\Big(\frac{1}{\sigma_i}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\Big), \qquad a_{23} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_\sigma\,\partial\xi}, \qquad a_{13} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial I_\sigma\,\partial\sigma_i}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Вследствие (2.3) для трехконстантного потенциала [10]

$$\Phi = a\sigma_i^2 + 2b\sigma_i I_\sigma + cI_\sigma^2$$

условия устойчивости имеют вид неравенств

$$a > 0, \qquad ac - b^2 > 0, \qquad a\sigma_i + bI_\sigma > 0,$$

последнее из которых налагает ограничение на напряженное состояние. Избежать этого можно, используя потенциал, аналогичный предложенному в [9]:

$$\Phi = aI_2^2 + 2bI_2I_\sigma + cI_\sigma^2, \qquad I_2^2 = \sigma_{kl}\sigma_{kl}.$$

В [13] получены соответствующие условия устойчивости, которые налагают ограничения только на упругие постоянные a, b, c. Однако эти ограничения существенно более жесткие, чем ограничения для потенциала (1.3), сводящиеся к его положительной определенности ($a > 0$, $c(\operatorname{sign} I_\sigma) > 0$). Действительно, из (1.3) имеем

$$\Delta\varepsilon_{kl}\Delta\sigma_{kl} = 3a\Delta\sigma_{kl}^0\Delta\sigma_{kl}^0 + 2\Delta(cI_\sigma)\Delta I_\sigma, \qquad \Delta I_\sigma = I_\sigma^{(1)} - I_\sigma^{(2)}. \qquad (2.4)$$

В случае если оба напряженных состояния относятся к области $I_\sigma > 0$ или $I_\sigma < 0$, второе слагаемое в (2.4) равно $2c(\Delta I_\sigma)^2$. Тогда с учетом (2.2) $a > 0$, $c_+ > 0$, $c_- > 0$ (это следует и из (2.3), поскольку в рассматриваемых областях Φ из (1.3) является дважды непрерывно дифференцируемой функцией σ_i и I_σ). Например, при $I_\sigma^{(1)} > 0$, $I_\sigma^{(2)} < 0$ $c^{(1)} = c_+$, $c^{(2)} = c_-$ и $\Delta(cI_\sigma)\Delta I_\sigma = [c_+I_\sigma^{(1)} - c_-I_\sigma^{(2)}][I_\sigma^{(1)} - I_\sigma^{(2)}] > 0$, так как оба множителя положительны; а при $I_\sigma^{(1)} < 0$ и $I_\sigma^{(2)} > 0$ $\Delta(cI_\sigma) < 0$, $\Delta I_\sigma < 0$.

Таким образом, условие устойчивости в большом (2.2), гарантирующее единственность решения краевых задач, для предложенного потенциала (1.3) эквивалентно условию выполнения неравенств $a > 0$, $c_+ > 0$ и $c_- > 0$.

3. Плоские задачи РМТУ. Преимущество предложенной теории упругости проявляется и при решении плоских задач в напряжениях. Рассмотрим случаи плоской деформации и обобщенного плоского напряженного состояния и покажем, что они сводятся к постановкам [11].

В случае плоской деформации, полагая $\varepsilon_{33} = 0$, из (1.4) найдем

$$\sigma_{33} = (a - 2c)(\sigma_{11} + \sigma_{22})/[2(a + c)].$$

Тогда выражения для компонент ε_{kl} $(k, l = 1, 2)$ принимают вид

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = a_1\sigma_{11} + a_2\sigma_{22}, \qquad \varepsilon_{22} = a_1\sigma_{22} + a_2\sigma_{11}, \\ \varepsilon_{12} = 3a\sigma_{12}, \quad a_1 = 3a(a + 4c)/[2(a + c)], \quad a_2 = 3a(2c - a)/[2(a + c)]. \end{gathered} \qquad (3.1)$$

Вводя функцию напряжений $F = F(x_1, x_2)$, такую что $\sigma_{11} = F_{,22}$, $\sigma_{22} = F_{,11}$, $\sigma_{12} = -F_{,12}$ (индекс k после запятой означает производную по координате x_k; $k = 1, 2$), и подставляя эти равенства в (3.1), из уравнения совместности деформаций $\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}$ получим $\Delta\Delta F = 0$. Это равенство справедливо при $c = c_+$ и при $c = c_-$, т. е. $F = F(x_1, x_2)$ является бигармонической функцией как при $I_\sigma > 0$, так и при $I_\sigma < 0$.

В случае обобщенного плоского напряженного состояния из (1.4) для деформаций имеем соотношения вида (3.1), в которых $a_1 = 2(a + c)$ и $a_2 = 2c - a$, для F — равенство $\Delta\Delta F = 0$.

Таким образом, как и в классических плоских задачах, в обоих случаях функция напряжений F является бигармонической, поэтому методы решения плоских краевых задач в напряжениях аналогичны методам, изложенным в [11]. Это закономерно, поскольку при заданных внешних нагрузках напряженное состояние, по крайней мере, односвязного тела не зависит от упругих постоянных [11], т. е. замена в соотношениях (1.3) константы c_+ на константу c_- не влияет на распределение напряжений.

Согласно (3.1) по найденным напряжениям определяются деформации. При этом в обоих случаях $\operatorname{sign} I_\sigma = \operatorname{sign}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, так как при плоской деформации $I_\sigma = \sigma_{11} +$

$\sigma_{22}+\sigma_{33}=3a(\sigma_{11}+\sigma_{22})/[2(a+c)]$, а при обобщенном плоском напряженном состоянии $I_\sigma=\sigma_{11}+\sigma_{22}$.

4. Задачи изгиба пластин. Рассмотрим пластину постоянной толщины h, которая под действием распределенных по ее краям изгибающих моментов и (или) поверхностных нагрузок деформируется таким образом, что ее верхние слои растягиваются, а нижние сжимаются (при $-h/2\leqslant z<\delta h/2$ $\;I_\sigma<0$, при $\delta h/2<z\leqslant h/2$ $\;I_\sigma>0$, $\delta=\delta(x_1,x_2)$, $|\delta|<1$). Система координат выбрана таким образом, что срединная поверхность пластины совпадает с плоскостью Ox_1x_2, а ось z перпендикулярна ей.

Деформации и перемещения пластины связаны равенствами [6]

$$\varepsilon_{kl}=z\varkappa_{kl}+\varepsilon^0_{kl},\qquad 2\varepsilon^0_{kl}=u_{k,l}+u_{l,k},\qquad \varkappa_{kl}=-w_{,kl}, \tag{4.1}$$

где $\varkappa_{kl}$ — кривизны; u_k — перемещения срединной плоскости; w — прогиб.

При отсутствии касательных составляющих внешней нагрузки уравнения равновесия имеют вид [6]

$$\begin{gathered}Q_k=M_{kl,l},\qquad Q_{k,k}=-q,\qquad N_{kl,l}=0,\qquad Q_k=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{3k}\,dz,\\ M_{kl}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{kl}z\,dz,\qquad N_{kl}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{kl}\,dz,\end{gathered} \tag{4.2}$$

где Q_k, M_{kl} — перерезывающие силы и моменты; N_{kl} — мембранные усилия; q — интенсивность поверхностных нагрузок. В (4.1), (4.2) и далее $k,l=1,2$.

При $a_1=2(a+c)$ и $a_2=2c-a$ соотношения между напряжениями и деформациями имеют вид (3.1). Обращая их, получаем

$$\begin{gathered}\sigma_{11}=A\varepsilon_{11}+B\varepsilon_{22},\qquad \sigma_{22}=A\varepsilon_{22}+B\varepsilon_{11},\qquad \sigma_{12}=\varepsilon_{12}/(3a),\\ A=2(a+c)/[3a(a+4c)],\qquad B=(a-2c)/[3a(a+4c)].\end{gathered} \tag{4.3}$$

Учитывая, что для функции вида $f=f[z,A(\operatorname{sign}I_\sigma)]$ $(A=A_+H(I_\sigma)+A_-H(-I_\sigma)$, $A_\pm=A(c_\pm))$ справедливо равенство

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2}f\,dz=\int\limits_{-h/2}^{\delta h/2}f(z,A_-)\,dz+\int\limits_{\delta h/2}^{h/2}f(z,A_+)\,dz,$$

из (4.1)–(4.3) найдем выражения для величин N_{kl} и M_{kl}:

$$\begin{gathered}N_{11}=A_1\varepsilon^0_{11}+B_1\varepsilon^0_{22}+C(\varkappa_{11}+\varkappa_{22}),\qquad N_{22}=A_1\varepsilon^0_{22}+B_1\varepsilon^0_{11}+C(\varkappa_{11}+\varkappa_{22}),\\ N_{12}=h\varepsilon^0_{12}/(3a),\qquad M_{11}=C(\varepsilon^0_{11}+\varepsilon^0_{22})+A_2\varkappa_{11}+B_2\varkappa_{22},\\ M_{22}=C(\varepsilon^0_{11}+\varepsilon^0_{22})+A_2\varkappa_{22}+B_2\varkappa_{11},\qquad M_{12}=h^3\varkappa_{12}/(36a),\\ 2A_1=h(P-2\theta\delta),\qquad 2B_1=(Q-2\theta\delta),\\ 4C=h^2\theta(1-\delta^2),\qquad 24A_2=h^3(P-2\theta\delta^3),\qquad 24B_2=h^3(Q-2\theta\delta^3),\\ P=A_++A_-=2G_0[(1-\nu_+)^{-1}+(1-\nu_-)^{-1}],\qquad Q=B_++B_-=P-4G_0,\\ 2\theta=A_+-A_-=B_+-B_-=2G_0[(1-\nu_+)^{-1}-(1-\nu_-)^{-1}],\end{gathered} \tag{4.4}$$

где для a, c_+, c_- использовались равенства из (1.3).

Для мембранных усилий, моментов и кривизн, разделив их на $Ph/2$, $Ph^2/12$ и $2/h$ соответственно, введем безразмерные величины с верхним индексом нуль. Тогда с учетом равенства $\delta = -(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0)/(\varkappa_{11}^0 + \varkappa_{22}^0)$, следующего из (4.1), (4.3), и условия $I_\sigma = 0$ при $z = \delta h/2$ формулы (4.4) принимают вид

$$\begin{gathered}
N_{11}^0 = \varepsilon_{11}^0 + \alpha\varepsilon_{22}^0 + r(1+\delta^2)(\varkappa_{11}^0 + \varkappa_{22}^0),\\
N_{22}^0 = \varepsilon_{22}^0 + \alpha\varepsilon_{11}^0 + r(1+\delta^2)(\varkappa_{11}^0 + \varkappa_{22}^0), \qquad N_{12} = (1-\alpha)\varepsilon_{12}^0,\\
M_{11}^0 = \varkappa_{11}^0 + \alpha\varkappa_{22}^0 + r(3-\delta^2)(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0), \qquad M_{12}^0 = (1-\alpha)\varkappa_{12}^0,\\
M_{22}^0 = \varkappa_{22}^0 + \alpha\varkappa_{11}^0 + r(3-\delta^2)(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0), \qquad \delta = -(\varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0)/(\varkappa_{11}^0 + \varkappa_{22}^0),\\
\alpha = Q/P = 1 - 2(1-\nu_+)(1-\nu_-)/(2-\nu_+-\nu_-) \qquad (0 < \alpha < 1),\\
r = \theta/P = (\nu_+ - \nu_-)/[2(2-\nu_+-\nu_-)].
\end{gathered} \tag{4.5}$$

Константу r из (4.5) можно рассматривать как малый параметр. Тогда функция $\delta = \delta(x_1, x_2)$, задающая смещение нейтральной поверхности ($I_\sigma = 0$) от срединной плоскости ($z = 0$), является величиной порядка r. Это справедливо, по крайней мере, для задачи о чистом изгибе прямоугольной пластины равномерно распределенными по ее краям моментами M_1 и M_2. Из уравнений равновесия (4.2) следует, что в любой точке (x_1, x_2) $N_{kl} = 0$, $M_{11} = M_1$, $M_{22} = M_2$, $M_{12} = 0$. Тогда из (4.5) найдем $\varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{22}^0$, а для смещения δ получаем уравнение $\delta^2 - 2\beta\delta + 1 = 0$, где $\beta = (1+\alpha)/(4r)$. Таким образом, β и r — величины одного знака, поэтому $|\delta| = (|\beta| + \sqrt{\beta^2 - 1})^{-1} \leqslant |\beta|^{-1} = 4|r|/(1+\alpha)$, т. е. $\delta \sim r$. Решение для δ существует при условии $|\beta| \geqslant 1$. При известной величине δ из (4.5) легко находятся кривизны $\varkappa_{kl}^0$ и деформации ε_{kl}^0.

Пренебрегая в (4.5) слагаемыми, содержащими множитель $r\delta^2$ (т. е. величину порядка r^3), получим линейные соотношения между силовыми (N_{kl}^0 и M_{kl}^0) и кинематическими (ε_{kl}^0 и $\varkappa_{kl}^0$) величинами. Тогда из первых трех уравнений (4.5) получаем

$$\begin{gathered}
(1-\alpha^2)\varepsilon_{11}^0 = N_{11}^0 - \alpha N_{22}^0 - (1-\alpha)r\varkappa^0,\\
(1-\alpha^2)\varepsilon_{22}^0 = N_{22}^0 - \alpha N_{11}^0 - (1-\alpha)r\varkappa^0, \qquad \varkappa^0 = \varkappa_{11}^0 + \varkappa_{22}^0,\\
(1-\alpha)\varepsilon_{12}^0 = N_{12}^0,
\end{gathered} \tag{4.6}$$

а последние три уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}
M_{11}^0 = \varkappa_{11}^0 + \alpha\varkappa_{22}^0 + 3r\varepsilon^0, \qquad M_{22}^0 = \varkappa_{22}^0 + \alpha\varkappa_{11}^0 + 3r\varepsilon^0,\\
M_{12} = (1-\alpha)\varkappa_{12}^0, \qquad \varepsilon^0 = \varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0.
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Вводя функцию мембранных усилий $F^0 = F^0(x_1, x_2)$, такую что $N_{11}^0 = F_{,22}^0$, $N_{22}^0 = F_{,11}^0$, $N_{12}^0 = -F_{,12}^0$, учитывая равенства $\varkappa_{kl}^0 = -w_{,kl}^0$ ($w_{,kl}^0 = hw_{,kl}/2$ — безразмерные величины) и подставляя (4.6) в уравнение совместности деформаций $\varepsilon_{11,22}^0 + \varepsilon_{22,11}^0 - 2\varepsilon_{12,12}^0 = 0$, получаем

$$\Delta\Delta[F^0 + r(1-\alpha)w^0] = 0. \tag{4.8}$$

Из (4.7) и уравнения равновесия $M_{kl,kl}^0 = -q^0$ ($q^0 = 12q/(Ph^2)$) найдем

$$\Delta\Delta w^0 - 3r\Delta\varepsilon^0 = q^0. \tag{4.9}$$

Из (4.6) следует

$$\varepsilon^0 = [N_{11}^0 + N_{22}^0 - 2r(\varkappa_{11}^0 + \varkappa_{22}^0)]/(1+\alpha) = \Delta(F^0 + 2rw^0)/(1+\alpha).$$

Подставляя это выражение в (4.9), получаем

$$\Delta\Delta[(1+\alpha-6r^2)w^0-3rF^0]=(1+\alpha)q^0. \tag{4.10}$$

Таким образом, для нахождения функций $F^0=F^0(x_1,x_2)$ и $w^0=w^0(x_1,x_2)$ имеем систему уравнений (4.8), (4.10).

В качестве примера рассмотрим задачу об эллиптической пластине, защемленной по контуру γ и находящейся под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки $q=\mathrm{const}$. Внешние усилия, приложенные к γ в плоскости пластины, отсутствуют, т. е. $N_{kl}n_l=0$ $(k=1,2)$; n_k — компоненты единичного вектора внешней к γ нормали). Следовательно, на контуре γ, заданном уравнением $x_1^2b_1^{-2}+x_2^2b_2^{-2}=1$, имеем граничные условия

$$w^0=\frac{\partial w^0}{\partial n}=F^0=\frac{\partial F^0}{\partial n}=0. \tag{4.11}$$

Решение краевой задачи (4.8), (4.10), (4.11) ищем в виде

$$\begin{gathered}F^0=A_3\varphi(x_1,x_2),\qquad w^0=B_3\varphi(x_1,x_2),\\ \varphi(x_1,x_2)=(x_1^2b_1^{-2}+x_2^2b_2^{-2}-1)^2,\end{gathered} \tag{4.12}$$

при этом условия (4.11) выполняются автоматически. Подставляя (4.12) в (4.8) и (4.10), получаем два равенства, из которых находим константы A_3 и B_3:

$$A_3=-r(1-\alpha)q^0/C_1,\quad B_3=q^0/C_1,\quad C_1=3(1-3r^2)[8(b_1^{-4}+b_2^{-4})+(b_1b_2)^{-2}].$$

5. Некоторые обобщения на более сложные среды. Сохраняя тензорно-линейные связи между напряжениями и деформациями (или скоростями деформаций), рассмотренный подход можно распространить на физически нелинейные среды с различными свойствами на растяжение и сжатие. Примерами таких сред могут служить нелинейно-упругие и нелинейно-вязкие среды. Потенциал деформаций в первом случае и потенциал скоростей деформаций во втором случае представляют собой однородную степени $n+1$ $(n>1)$ функцию напряжений, в качестве которой, следуя изложенному выше, можно использовать зависимость (1.3), возведя ее правую часть в степень $(n+1)/2$.

Рассмотрим нелинейно-вязкую среду. Диссипативную функцию W, представляющую собой удельную мощность рассеянной энергии и отличающуюся от потенциала ползучести только постоянным множителем $(n+1)$ [12], зададим следующим образом:

$$W=B_0(\sigma_i^2+c^0I_\sigma^2)^{(n+1)/2},\quad W\equiv\eta_{kl}\sigma_{kl},\quad c_0=c_+^0H(I_\sigma)+c_-^0H(-I_\sigma) \tag{5.1}$$

(η_{kl} — компоненты скоростей деформаций; функция $H=H(x)$ определена в (1.2)). Отсюда получаем тензорно-линейные соотношения между σ_{kl} и η_{kl}:

$$\eta_{kl}=\frac{1}{n+1}\frac{\partial W}{\partial\sigma_{kl}}=\frac{B_0}{2}\,(\sigma_i^2+c^0I_\sigma^2)^{(n-1)/2}(3\sigma_{kl}^0+2c^0I_\sigma\delta_{kl}).$$

На основе данных экспериментов на кручение $(\sigma_{12}=\tau)$, одноосное растяжение $(\sigma_{11}=\sigma>0)$ и сжатие $(\sigma_{11}=\sigma<0)$, сопоставляя (5.1) с соответствующими выражениями для W при указанных видах напряженного состояния [12]: $W=B_{kp}(\sqrt{3}\tau)^{n+1}$, $W=B_+\sigma^{n+1}$ и $W=B_-|\sigma|^{n+1}$, определим константы B_0, c_+^0 и c_-^0. В результате получаем

$$B_0=B_{kp},\qquad c_\pm^0=(B_\pm/B_0)^{2/(n+1)}-1,$$

где B_{kp}, B_+, B_- — коэффициенты ползучести при кручении, растяжении и сжатии.

Из (5.1) следует, что при $n > 1$ диссипативная функция $W = W(\sigma_i, I_\sigma)$ (а значит, и потенциал ползучести, равный $W/(n+1)$) всюду является дважды непрерывно дифференцируемой, в том числе при $\sigma_i = I_\sigma = 0$. Поэтому условие устойчивости в большом (2.2) эквивалентно условию положительной определенности симметричной матрицы с коэффициентами a_{ij} из (2.3), т. е. условию выполнения неравенств $a_{11} > 0, a_{22} > 0$ и $a_{11}a_{33} - a_{13}^2 > 0$, которые сводятся к выражениям $B_0 > 0$, $c_+^0 > 0$ и $c_-^0 > 0$. Отсюда следуют ограничения на коэффициенты ползучести: $B_+ > B_0$, $B_- > B_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.** Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. № 2. С. 44–53.
2. **Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.** К разномодульной теории упругости // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. № 6. С. 64–67.
3. **Шапиро Г. С.** О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. № 2. С. 123–125.
4. **Матченко Н. М., Толоконников Л. А.** О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах // Инж. журн. Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 108–110.
5. **Ломакин Е. В.** Определяющие соотношения механики разномодульных тел. М., 1980. (Препр. / АН СССР. Ин-т проблем механики; № 159).
6. **Амбарцумян С. А.** Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982.
7. **Цвелодуб И. Ю.** К разномодульной теории упругости изотропных материалов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1977. Вып. 32. С. 123–131.
8. **Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н.** Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 6. С. 29–34.
9. **Мясников В. П., Олейников А. И.** Основные общие соотношения изотропно-упругой разносопротивляющейся среды // Докл. АН СССР. 1992. Т. 332, № 1. С. 57–60.
10. **Буренин А. А., Ярушина В. М.** К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: Сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. М.: Физматлит, 2006. С. 100–106.
11. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1970.
12. **Цвелодуб И. Ю.** Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.
13. **Олейников А. И., Могильников Е. В.** О единственности решения задач и устойчивости материала нелинейной гетерогенной упругости // Докл. РАН. 2001. Т. 378, № 2. С. 194–196.

Поступила в редакцию 2/II 2007 г.