ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 4

УДК 532.516+538.4

О СПОНТАННОЙ ЗАКРУТКЕ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЯХ*

Ю. Г. Губарев, Б. А. Луговцов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Проблема спонтанной закрутки рассматривалась в работах [1–4] и заключается в следующем: может ли возникать вращательное движение при отсутствии внешних источников вращения, т. е. в условиях, когда движение без вращения заведомо реализуемо?

Более точно эту проблему можно сформулировать таким образом. Пусть в некоторой области, ограниченной поверхностью вращения, имеется осесимметричное течение, поддерживаемое соответствующим распределением скорости на границе и объемными силами. При этом область течения может быть как односвязной, так и многосвязной. Граница области условно подразделяется на две части так, что на одной из них обращается в нуль вращательная компонента скорости, а на другой либо вращательная компонента касательных напряжений и нормальная к границе компонента скорости одновременно равны нулю, либо первая равна нулю, а последняя направлена вне рассматриваемого объема.

Следует подчеркнуть, что здесь не затрагивается вопрос об осуществимости таких граничных условий в эксперименте. С чисто математической же точки зрения эти условия корректны и вполне приемлемы.

Итак, возможна ли при выполнении данных граничных условий бифуркация исходного течения в результате потери устойчивости к течению с вращением (необязательно к вращательно-симметричному) такому, что циркуляция скорости по окружности, расположенной в плоскости, перпендикулярной оси симметрии, с центром, лежащим на этой оси, отлична от нуля, по крайней мере в некоторой части области?

В настоящее время существует гипотеза о том, что спонтанная закрутка возможна. Это явление названо авторами гипотезы «самовращением» или «вихревым динамо» [1–3]. Сами авторы полагают, что существование спонтанной закрутки ими доказано. Однако, как показано в [4], имеющиеся примеры «самовращения» не удовлетворяют сформулированным выше условиям, обеспечивающим строгий контроль потока момента импульса.

Так, в [1] фактически рассматривается задача о периодическом по z течении между плоскостями $z = 0$, $z = L$, причем при $z = 0$ имеется втекающий в область ненулевой поток момента импульса. Стационарность найденного решения (в соответствующей системе координат) свидетельствует о возможности существования в этих условиях самоподдерживающегося, в среднем вращательно-симметричного течения за счет контрградиентного потока момента импульса, как видно из дальнейшего. Однако остается открытым вопрос, будет ли появляться такой поток в ограниченной области или в полупространстве $z > 0$, если на плоскости $z = 0$ поставить условие $\Gamma = 0$, исключив тем самым втекающий поток момента импульса? Только при выполнении этого условия можно говорить о

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01219-а).

спонтанном возникновении вращения.

Аналогичная проблема существует и для возникновения спонтанного поперечного (перпендикулярного) потока в случае плоскопараллельного исходного течения.

Пусть в произвольном цилиндре с образующими, параллельными оси z, имеется плоское течение $\mathbf{V} = (U(x,y), V(x,y), 0)$, которое поддерживается подходящим распределением скоростей на границе и объемными силами.

Если на участке l' границы l поставить условие $V_z = W = 0$, а на оставшейся ее части l'' потребовать обращения в нуль $\partial W/\partial n$ и условия невтекания $\mathbf{Vn} \geq 0$ ($\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности цилиндра), то неизвестно, появится ли в этом случае при возмущении первоначального потока течение с отличной от нуля компонентой скорости $W(x,y,z)$ такое, что

$$\langle W(x,y)\rangle = \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} W(x,y,z)\,dz \not\equiv 0,$$

а давление $p(x,y,z)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2L}[p(x,y,L) - p(x,y,-L)] \to 0 \text{ при } L \to \infty.$$

Задача данного типа — течение проводящей жидкости в магнитном поле между двумя плоскостями — рассматривалась в [5], где показано, что при наложении возмущений в виде периодической волны под некоторым углом к основному потоку возникает бифуркация к течению с $\langle W(x,y)\rangle \neq 0$ при условии $W = 0$ на стенках. Недостатком этого примера является поток z-й компоненты импульса из бесконечности. Доказательным был бы пример, исключающий втекающий поток импульса, т. е. исследование соответствующей задачи для ограниченной или полуограниченной области.

Для сужения области поисков представляет интерес рассмотреть соответствующие задачи для случая, когда U, V, W не зависят от z, что можно считать плоским аналогом вращательно-симметричных течений.

В этом случае уравнение для W имеет вид (жидкость считается несжимаемой, вязкой)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U\frac{\partial W}{\partial x} + V\frac{\partial W}{\partial y} = \nu\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\Big), \qquad (1)$$

где U и V удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

а в остальном произвольны.

Нетрудно видеть, что при выполнении принятых ранее граничных условий спонтанное возникновение поперечного потока (т. е. $W(x,y) \neq 0$) невозможно. Действительно, умножив уравнение (1) на W и проинтегрировав по сечению цилиндра D, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_D W^2(x,y)\,dx\,dy = -\oint\limits_l (\mathbf{Vn})W^2\,dl + 2\nu\oint\limits_l W\frac{\partial W}{\partial n}\,dl -$$

$$-2\nu\int\limits_D\Big[\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W}{\partial y}\Big)^2\Big]\,dx\,dy. \qquad (2)$$

В силу граничных условий второй член из правой части этого равенства исчезает, а первый неотрицателен на l'' и равен нулю на l'.

Таким образом, для любого начального возмущения $W_0(x,y)$ поперечное движение затухает. Этот результат справедлив также для сжимаемого газа, произвольной зависимости коэффициента вязкости ν от координат и нестационарного плоского течения. В этом случае вместо соотношения (2) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_D \rho W^2\,dx\,dy = -\oint\limits_l \rho(\mathbf{V}\mathbf{n})W^2\,dl + 2\oint\limits_l \nu\rho W\frac{\partial W}{\partial n}\,dl - \\ -2\int\limits_D \nu\rho\Big[\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial W}{\partial y}\Big)^2\Big]\,dx\,dy,$$

откуда следует тот же вывод, а именно отсутствие спонтанного возникновения поперечного потока.

В [4] было доказано, что при сформулированных выше граничных условиях стационарные осесимметричные течения с циркуляцией $\Gamma \neq 0$ невозможны. Покажем теперь, что любое вращательно-симметричное течение, для которого $\Gamma \neq 0$ в начальный момент времени, стремится к осесимметричному течению с $\Gamma = 0$.

В нестационарном течении сжимаемой вязкой жидкости уравнение неразрывности и уравнение для Γ имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho r) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho r w) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho r\Gamma) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r u\Gamma) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho r w\Gamma) = \\ = \frac{\partial}{\partial r}\Big[\rho\nu\Big(r\frac{\partial\Gamma}{\partial r} - 2\Gamma\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial z}\Big[\rho\nu r\frac{\partial\Gamma}{\partial z}\Big], \tag{3}$$

причем ρ , u и w могут зависеть от времени. Интегрируя второе уравнение из (3) по сечению D меридиональной плоскостью, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_D \rho r\Gamma\,dr\,dz = -\oint\limits_l \rho(un_r + vn_z)\Gamma\,dl + \oint\limits_l \rho\nu r\frac{\partial\Gamma}{\partial n}\,dl. \tag{4}$$

Если значения Γ всюду внутри области D положительны (отрицательны), то правая часть соотношения (4) неположительна (неотрицательна), так как $un_r + vn_z \geq 0$ и $\partial\Gamma/\partial n \leq 0$, и вращение затухает. Если Γ меняет в области течения знак, то существует линия $\Gamma = 0$ внутри области D. В этом случае интегрирование производится по области, где значения Γ положительны (отрицательны). В силу того, что на дополнительной границе Γ обращается в нуль, получаем аналогичное (4) равенство и можно сделать вывод о затухании вращения в этой подобласти, а следовательно, и во всей области.

В качестве примера неограниченной области рассмотрим турбулентный вихрь Бюргерса, предполагая, что турбулентная вязкость $\nu_* = \nu_*(r,t) > 0$ зависит только от r и t. В этом случае имеется решение

$$v_r = -a(t)r, \quad v_z = 2a(t)z, \quad \Gamma = \Gamma(r,t),$$

причем Γ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(r^3\omega) - ar^2\frac{\partial}{\partial r}(r^2\omega) = \frac{\partial}{\partial r}\Big(\nu_* r^3\frac{\partial\omega}{\partial r}\Big), \tag{5}$$

где $\omega = \Gamma/r^2$; $\omega(0,t) = \omega(t)$; $\omega r^3 \to O(r^{-(1+\varepsilon)})$ при $r \to \infty$.

Пусть в начальный момент времени $\omega = \omega_0(r)$, при этом $\omega_0 \to 0$ при $r \to \infty$ так, что

$$\int\limits_0^\infty r^3 \omega \, dr = M_0 < \infty.$$

Тогда, умножая (5) на ω, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(r^3\omega^2/2) - \frac{\partial}{\partial r}(ar^4\omega^2/2) = \frac{\partial}{\partial r}\Big(\nu_*(r,t) r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r}\Big) - \nu_* r^3 \Big(\frac{\partial \omega}{\partial r}\Big)^2. \quad (6)$$

Интегрируя (6) по r от 0 до ∞, с учетом граничных условий находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^\infty (r^3\omega^2/2)\,dr = -\int\limits_0^\infty \nu_* r^3 \Big(\frac{\partial\omega}{\partial r}\Big)^2 dr,$$

откуда следует, что $\omega \to 0$, т. е. спонтанная закрутка отсутствует.

Нетрудно видеть, что и в общем случае, когда часть границы расположена в бесконечности, при жестких условиях, оговоренных ранее (отсутствие втекающих потоков z-й компоненты момента импульса), спонтанной закрутки не возникает. В частности, если в плоскости $z = 0$ задано условие $\Gamma = 0$, то спонтанная закрутка в полуограниченном пространстве также невозможна.

Таким образом, бифуркация осесимметричное течение — вращательно-симметричное течение не имеет места и для сжимаемой жидкости с переменным коэффициентом вязкости. Отсюда также следует, что в моделях, описывающих турбулентные течения с помощью введения турбулентного коэффициента вязкости, большего нуля, спонтанная закрутка не может возникать.

Если возмущения неосесимметричны, то, интегрируя по φ с учетом периодичности всех величин по этой переменной, для несжимаемой вязкой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(r\langle\Gamma\rangle) + \frac{\partial}{\partial r}(r\langle u\Gamma\rangle) + \frac{\partial}{\partial z}(r\langle w\Gamma\rangle) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial r}\Big[\nu\Big(r\frac{\partial\langle\Gamma\rangle}{\partial r} - 2\langle\Gamma\rangle\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial z}\Big(r\nu\frac{\partial\langle\Gamma\rangle}{\partial z}\Big) \quad (7)$$

(угловые скобки обозначают усреднение по φ).

Интегрируя теперь уравнение (7) по сечению D меридиональной плоскостью, находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_D r\langle\Gamma\rangle\,dr\,dz = -\oint\limits_l (\langle u\Gamma\rangle n_r + \langle w\Gamma\rangle n_z)\,dl + \oint\limits_l r\nu\frac{\partial\langle\Gamma\rangle}{\partial n}\,dl. \quad (8)$$

Отсюда вытекает, что внутри области течения (при условии усиления вращения) $\langle\Gamma\rangle$ не может быть одного знака, так как в этом случае соотношение (8) в силу граничных условий дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_D r\langle\Gamma\rangle\,dr\,dz \le 0.$$

Следовательно, если вращение усиливается, то это может происходить только тогда, когда $\langle\Gamma\rangle$ меняет в области знак. Если теперь выделить область с $\langle\Gamma\rangle$ одного знака, то на дополнительной границе области с

$\langle\Gamma\rangle = 0$ поток $\langle u\Gamma\rangle n_r + \langle w\Gamma\rangle n_z$ в принципе может быть отличен от нуля, но, для того чтобы вращение усиливалось, необходимо, чтобы этот поток был направлен из области с малыми значениями $\langle\Gamma\rangle$ к области с большими значениями $\langle\Gamma\rangle$, т. е. должен возникать контрградиентный поток $\langle\Gamma\rangle$, и тогда усиление вращения происходит за счет разделения момента импульса между различными частями потока.

Течения такого вида в гидродинамике иногда называют явлениями с «отрицательной» вязкостью. Характерным примером этих течений может служить хорошо известный эффект Ранка, в котором происходит разделение потоков с высокой и низкой температурой. Однако в настоящее время механизм разделения момента импульса не имеет достаточно строгого и убедительного объяснения.

Течение, рассмотренное в [1], хотя и не может трактоваться как пример спонтанной закрутки, демонстрирует возможность появления контрградиентного потока момента импульса в неосесимметричных закрученных течениях.

Вопрос о существовании такого механизма (и, следовательно, спонтанной закрутки) в условиях, сформулированных ранее, остается открытым.

Представляет интерес рассмотреть проблему спонтанной закрутки в магнитогидродинамических течениях. В [5, 6] исследовались задача о возникновении спонтанного вращательного течения в зазоре между двумя соосными трубами в присутствии магнитного поля в результате бифуркации основного осесимметричного течения и ее плоский аналог.

Поскольку в том и другом случае не выполняются условия отсутствия втекающего потока поперечного импульса и z-й компоненты момента импульса, эти задачи не могут трактоваться как примеры спонтанного возникновения поперечного потока или закрутки.

Ниже изучаются плоский аналог и осесимметричное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости. Уравнения, описывающие такие течения, имеют следующий вид в общепринятых обозначениях:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} - \frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{H}\times\ \mathrm{rot}\ \mathbf{H}) + \mathbf{f},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\ (\mathbf{v}\times\mathbf{H}) + \nu_m\Delta\mathbf{H}, \quad \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0, \quad \mathrm{div}\ \mathbf{H} = 0.$$

Здесь $\mathbf{f} = (f_x, f_y, 0)$ в плоском аналоге и $\mathbf{f} = (f_r, 0, f_z)$ в осесимметричном течении; $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$.

Рассмотрим сначала плоский аналог: возможность возникновения поперечного потока со скоростью $V_z = W(x,y)$ в описанной ранее постановке. Дополнительно предполагаем, что стенки цилиндра непроницаемые, сверхпроводящие, так что на границе области выполняются условие непротекания $\mathbf{vn} = 0$ и условие $\mathbf{Hn} = 0$. Кроме того, из требования обращения в нуль касательной к стенкам составляющей электрического поля вытекает условие $\partial H_z/\partial n = 0$.

Пусть в области D, ограниченной границей l (сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной его образующим), поддерживается течение

$$\mathbf{v} = (u(x,y,t),\ v(x,y,t), 0)$$

и магнитное поле

$$\mathbf{H} = (H_x(x,y,t),\ H_y(x,y,t),\ H_z(x,y,t)).$$

В момент времени $t = 0$ вносится возмущение $V_z = W = W_0(x,y)$. Покажем, что $w(x,y,t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Уравнения, описывающие поведение H_z и w, имеют вид

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + u\frac{\partial H_z}{\partial x} + v\frac{\partial H_z}{\partial y} = H_x\frac{\partial w}{\partial x} + H_y\frac{\partial w}{\partial y} + \nu_m\Big(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}\Big); \tag{9}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\rho}\Big(H_x\frac{\partial H_z}{\partial x} + H_y\frac{\partial H_z}{\partial y}\Big) + \nu\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big). \tag{10}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0. \tag{11}$$

Умножая уравнение (9) на $H_z/4\pi$, а (10) — на ρw и складывая получившиеся соотношения, находим

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial y}(v\varepsilon) = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(H_x H_z w) + \frac{\partial}{\partial y}(H_y H_z w)\Big) +$$
$$+\nu_m\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big[H_z\frac{\partial H_z}{\partial x}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[H_z\frac{\partial H_z}{\partial y}\Big]\Big) - \nu_m\Big[\Big(\frac{\partial H_z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial H_z}{\partial y}\Big)^2\Big] +$$
$$+\rho\nu\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big[w\frac{\partial w}{\partial x}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[w\frac{\partial w}{\partial y}\Big]\Big) + \rho\nu\Big[\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big], \tag{12}$$

где $\varepsilon = \rho w^2/2 + H_z^2/8\pi$.

Интегрируя (12) по области D, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_D \varepsilon\, dx\, dy = -\oint_l (\mathbf{V}\mathbf{n})\varepsilon\, dl + \frac{1}{4\pi}\oint_l (\mathbf{H}\mathbf{n})H_z w\, dl +$$
$$+\oint_l \Big(\nu_m H_z\frac{\partial H_z}{\partial n} + \nu w\frac{\partial w}{\partial n}\Big) dl - \int_D \Big(\nu_m\Big[\Big(\frac{\partial H_z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial H_z}{\partial y}\Big)^2\Big] +$$
$$+\nu\Big[\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big]\Big)\, dx\, dy. \tag{13}$$

Из соотношения (13) в силу граничных условий следует, что $w(x,y,t) \to 0$, если условие $w = 0$ выполняется на как угодно малом участке l'.

Таким образом, в рассмотренных условиях спонтанное возникновение поперечного потока невозможно.

В осесимметричной геометрии такого общего результата, как для плоского аналога, получить не удается. Дело в том, что в этом случае возможны, как будет показано ниже, течения с закруткой, поддерживаемые электромагнитными силами. Однако такие течения нельзя трактовать как пример спонтанной закрутки, поскольку имеется явный источник вращения — магнитное поле.

В связи с этим рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости. Уравнения имеют следующий вид:

для циркуляции

$$rU\frac{\partial \Gamma}{\partial r} + rW\frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\nu\Big(r\frac{\partial \Gamma}{\partial r} - 2\Gamma\Big) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\nu r\frac{\partial \Gamma}{\partial z}\Big) + \frac{1}{4\pi\rho}\Big(rH_r\frac{\partial rH_\varphi}{\partial r} + rH_z\frac{\partial rH_\varphi}{\partial z}\Big), \tag{14}$$

$$V_r = U, \quad V_\varphi = V, \quad V_z = W, \quad \Gamma = rV_\varphi;$$

для магнитного поля

$$VH_z - WH_\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \tag{15}$$

$$WH_r - UH_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{C}{r}; \tag{16}$$

$$UH_\varphi - VH_r = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{17}$$

где C — произвольная постоянная, которая в данной постановке равна нулю в силу граничных условий ($\mathbf{vn} = 0$, $\mathbf{Hn} = 0$).

Из (15)–(17), учитывая, что

$$\frac{\partial rU}{\partial r} + \frac{\partial rW}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial rH_r}{\partial r} + \frac{\partial rH_z}{\partial z} = 0,$$

получаем

$$U = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad W = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad H_z = \frac{1}{r}\lambda(\Psi)\frac{\partial \Psi}{\partial r},$$
$$H_r = -\frac{1}{r}\lambda(\Psi)\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad H_\varphi = rf(\Psi) + \lambda(\Psi)V_\varphi. \tag{18}$$

Подставляя последнее из соотношений (18) в (14), находим

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big[\Big(1 - \frac{\lambda^2}{4\pi\rho}\Big)rU\Gamma\Big] + \frac{\partial}{\partial z}\Big[\Big(1 - \frac{\lambda^2}{4\pi\rho}\Big)rW\Gamma\Big] +$$
$$+\frac{\lambda f r}{2\pi\rho}r\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\Big[\nu\Big(r\frac{\partial \Gamma}{\partial r} - 2\Gamma\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial z}\Big[\rho\nu r\frac{\partial \Gamma}{\partial z}\Big].$$

Если $f(\Psi) = 0$, то нетрудно видеть, что при стандартных граничных условиях ($\mathbf{Vn} = 0$, либо Γ, либо τ_φ равны нулю на границе) не существует решений с $\Gamma \not\equiv 0$, т. е. закрутка отсутствует.

В случае, если $f(\Psi) \not\equiv 0$, очевидным образом существуют некоторые течения с $\Gamma \not\equiv 0$, задаваемые конкретным видом функций $\lambda(\Psi)$ и $f(\Psi)$. Как было сказано выше, эти течения нельзя рассматривать в качестве примеров спонтанной закрутки. Наоборот, при исследовании вопроса о возможности возникновения спонтанной закрутки такие течения должны быть исключены. Для этого в исходном состоянии H_φ должна быть тождественно равна нулю.

Приведенный пример показывает, что сама постановка задачи о возникновении спонтанной закрутки в осесимметричных течениях при наличии магнитного поля требует дополнительного изучения и уточнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольдштик М. А., Жданова Е. М., Штерн В. Н.** Спонтанная закрутка затопленной струи // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 4. С. 815–818.
2. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И.** Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989.
3. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н.** Турбулентное вихревое динамо // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, № 4. С. 613–624.
4. **Луговцов Б. А.** Возможна ли спонтанная закрутка осесимметричного течения? // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 50–54.

5. **Сагалаков А. М., Юдинцев А. Ю.** Устойчивость трехмерных автоколебаний плоскопараллельных потоков электропроводящей жидкости в продольном магнитном поле // Магнит гидродинамика. 1991. № 4. С. 15–20.
6. **Сагалаков А. М., Юдинцев А. Ю.** Трехмерные автоколебательные магнитогидродинамические течения жидкости конечной проводимости в канале кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля // Магнит. гидродинамика. 1993. № 1. С. 41–48.

Поступила в редакцию 26/XII 1994 г.