УДК 519.62

Решение нелинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка на основе схемы Самарского*

А.И. Задорин, С.В. Тиховская

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Певцова, 13, Омск, 644099

E-mails: zadorin@ofim.oscsbras.ru (Задорин А.И.), s.tihovskaya@yandex.ru (Тиховская С.В.)

Задорин А.И., Тиховская С.В. Решение нелинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка на основе схемы Самарского // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 1. — С. 11–25.

Рассматривается краевая задача для нелинейного сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Предложен способ решения этой задачи на основе линеаризаций Ньютона и Пикара с применением известной в линейном случае модифицированной схемы А.А. Самарского на сетке Г.И. Шишкина. Доказана равномерная сходимость построенных разностных схем со вторым порядком точности. Для уменьшения количества арифметических действий предложено использовать двухсеточный метод. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: *нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, сингулярное возмущение, метод Ньютона, метод Пикара, схема Самарского, сетка Шишкина, равномерная сходимость, двухсеточный метод.*

Zadorin A.I., Tikhovskaya S.V. Solution of second order nonlinear singular perturbation ordinary differential equation based on the Samarskii scheme // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 1. — P. 11–25.

A boundary value problem for a second order nonlinear singular perturbation ordinary differential equation is considered. We propose the method based on the Newton and the Picard linearizations using known modified Samarskii scheme on the Shishkin mesh in the case of a linear problem. It is proved that the constructed difference schemes are of second order and uniformly convergent. To decrease the number of the arithmetical operations, we propose a two-grid method. The results of some numerical experiments are discussed.

Key words: *second order nonlinear ordinary differential equation, singular perturbation, Newton method, Picard method, Samarskii scheme, Shishkin mesh, uniform convergence, two-grid algorithm.*

Введение

Известно, что применение классических разностных схем при решении задач с пограничным слоем может приводить к значительным погрешностям. В 1969 году на это было обращено внимание и предложено два основных подхода по построению разностных схем, обладающих свойством сходимости, равномерной по малому параметру [1, 2]: построение схем экспоненциальной подгонки и сгущение сетки в пограничном слое. Далее этот вопрос исследовался в целом ряде работ, отметим [3–8].

Вопрос построения разностных схем повышенной точности для нелинейных сингулярно возмущенных задач остается актуальным. В [6] для нелинейного эллиптического

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 10-01-00726, № 11-01-00875).

уравнения при малых значениях параметра ε строится схема точности $O(\ln^2 N/N^2)$ на основе асимптотических конструкций. В качестве модельного исследуется нелинейное уравнение типа конвекция–диффузия, рассматриваемое ниже.

В работе рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача в случае нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Предлагается линеаризовать задачу на основе метода Ньютона или Пикара и затем применить модифицированную схему А.А. Самарского [8]. В соответствии с [8] на сетке Г.И. Шишкина [3] модифицированная схема Самарского обладает точностью порядка $O(\ln^2 N/N^2)$ равномерно по параметру ε. Доказывается, что при обоих подходах к линеаризации решение исходной нелинейной краевой задачи находится с точностью $O(\ln^2 N/N^2)$. Таким образом, предлагается два алгоритма решения исходной нелинейной задачи.

Для уменьшения количества арифметических действий, необходимых для реализации предложенного подхода, предлагается использовать двухсеточный метод, когда начальные итерации делаются на более редкой сетке. Двухсеточный метод для решения аналогичной нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи исследовался в [10], где применялась схема А.М. Ильина [1], обладающая лишь первым порядком точности.

Введем обозначения. Определим норму функции непрерывного аргумента $\|f\| = \max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)|$ и норму сеточной функции $\|f^h\|_h = \max_{0\leqslant i\leqslant N} |f_i^h|$. Пусть $[u]_\Omega$ — проекция функции $u(x)$ на сетку Ω. Под C и C_i, $i \geq 0$, будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и от разностной сетки.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u'' + a(x)u' - f(x,u) = 0, \quad x \in \Omega = (0,1), \qquad u(0) = A, \quad u(1) = B, \tag{1.1}$$

где функции $a(x)$, $f(x,u)$ — непрерывно дифференцируемы по x и $f(x,u)$ дважды непрерывно дифференцируема по u,

$$\varepsilon \in (0,1], \qquad a(x) \geqslant \alpha > 0, \qquad f'_u(x,u) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Omega \times R. \tag{1.2}$$

При выполнении условий (1.2) решение задачи (1.1) ограничено равномерно по ε:

$$\|u\| \leqslant L_0 = \alpha^{-1}\|f(x,0)\| + \max\{|A|,|B|\},$$

и в соответствии с [9] справедлива оценка производных:

$$|u^{(j)}(x)| \leqslant C_0 \left[\frac{1}{\varepsilon^j} \exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right) + 1\right], \qquad j = 1,2,3. \tag{1.3}$$

Разностная сетка. В соответствии с [3] зададим сетку

$$\Omega_h = \{x_n : \quad x_n = x_{n-1} + h_n, \quad x_0 = 0, \quad x_N = 1, \quad n = 1,2,\ldots,N\}, \tag{1.4}$$

где

$$h_n = \frac{2\sigma}{N}, \quad 1 \leqslant n \leqslant \frac{N}{2}; \quad h_n = \frac{2(1-\sigma)}{N}, \quad \frac{N}{2} < n \leqslant N; \quad \sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\}.$$

Введем следующие обозначения [8]:

$$v_{\bar{x},n} = \frac{v_n - v_{n-1}}{h_n}, \; v_{x,n} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\hbar_n}, \; \hbar_n = \frac{h_n + h_{n+1}}{2}, \; a_n = a\left(x_n - \frac{h_n}{2}\right), \; R_n = \frac{a_n h_n}{2\varepsilon}.$$

Модифицированная схема А.А. Самарского. Рассмотрим случай, когда задача (1.1) линейна: $f(x,u) = b(x)u + g(x)$, $b(x) \geqslant 0$. Тогда в соответствии с [8] верна следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $u(x)$ *— решение линейной задачи* (1.1) *с достаточно гладкими коэффициентами и правой частью,* u^h *— решение разностной схемы:*

$$\varepsilon\left(\frac{u^h_{\bar{x}}}{1+R}\right)_{x,n} + a_{n+1}u^h_{x,n} - \left(b_n + \frac{h_n b_n^2}{2a_n(1+1/R_n)} + \frac{1}{2}\left(\frac{hb}{1+1/R}\right)_{x,n}\right)u^h_n$$
$$= g_n + \frac{h_n b_n g_n}{2a_n(1+1/R_n)} + \frac{1}{2}\left(\frac{hg}{1+1/R}\right)_{x,n}, \quad u^h_0 = A, \quad u^h_N = B, \tag{1.5}$$

где $b_n = b(x_n)$, $g_n = g(x_n)$. *Тогда на сетке Г.И. Шишкина* (1.4) *при* $a(0) > \alpha$ *для некоторой постоянной* C *выполнится*

$$\left\|[u]_{\Omega_h} - u^h\right\|_h \leqslant C\frac{\ln^2 N}{N^2}.$$

2. Линеаризация Пикара

Предположим, что в дополнение к (1.2) выполнены условия:

$$\beta \geqslant f'_u(x,u) \geqslant \gamma > 0 \quad \text{на} \quad \Omega \times R. \tag{2.1}$$

Осуществим линеаризацию задачи (1.1), чтобы на итерациях, уже в случае линейной задачи, применить схему (1.5). Рассмотрим линеаризацию Пикара:

$$\begin{gathered} Lu^{(m)} = \varepsilon\big(u^{(m)}\big)'' + a(x)\big(u^{(m)}\big)' - \beta u^{(m)} = f\big(x, u^{(m-1)}\big) - \beta u^{(m-1)}, \\ u^{(m)}(0) = A, \quad u^{(m)}(1) = B. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Пусть $\rho = \|u^{(0)} - u\|$. Известно, что при выполнении условий (2.1) метод Пикара (2.2) сходится. В соответствии с [10] справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть* $u(x)$ *— решение задачи* (1.1). *Тогда*

$$\left\|u^{(m)} - u\right\| \leqslant \rho\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)^m, \qquad m \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Используя на каждой итерации в (2.2) схему (1.5), перейдем к итерационной формуле для сеточных решений

$$L^h_n u^{(m,h)} = \varepsilon\left(\frac{u^{(m,h)}_{\bar{x}}}{1+R}\right)_{x,n} + a_{n+1}u^{(m,h)}_{x,n} - \beta\left(1 + \frac{\beta h_n}{2a_n(1+1/R_n)} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{1+1/R}\right)_{x,n}\right)u^{(m,h)}_n$$
$$= f\big(x_n, u^{(m-1,h)}_n\big) - \beta u^{(m-1,h)}_n + \frac{\beta h_n}{2a_n(1+1/R_n)}\big(f\big(x_n, u^{(m-1,h)}_n\big) - \beta u^{(m-1,h)}_n\big) +$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{h\big(f\big(x, u^{(m-1,h)}\big) - \beta u^{(m-1,h)}\big)}{1+1/R}\right)_{x,n}, \ 0 < n < N, \ u^{(m,h)}_0 = A, \ u^{(m,h)}_N = B. \tag{2.4}$$

Для сокращения записи формул введем следующие обозначения:

$$S_1 = \frac{h_n}{2a_n\,(1+1/R_n)}, \quad S_2 = \frac{h_{n+1}}{(h_n + h_{n+1})\,(1+1/R_{n+1})}, \quad S_3 = \frac{h_n}{(h_n + h_{n+1})\,(1+1/R_n)}.$$

Заметим, что

$$0 < S_1 < \max\{1/(4\alpha), 2\}/N, \qquad 0 < S_2 < 1, \qquad 0 < S_3 < 1. \tag{2.5}$$

Лемма 2.2. *Пусть* $u^{(0,h)} = [u^{(0)}]_{\Omega_h}$. *Существует константа* C_1 *такая, что*

$$\left\|u^{(m,h)} - [u]_{\Omega_h}\right\|_h \leqslant C_1 \frac{\ln^2 N}{N^2} + \rho\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)^m, \qquad m \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Доказательство. Применяя на заданной m-й итерации (2.2) схему (1.5), получим соотношение

$$\varepsilon\left(\frac{\hat{u}_{\bar{x}}^{(m,h)}}{1+R}\right)_{x,n} + a_{n+1}\hat{u}_{x,n}^{(m,h)} - \beta\left(1 + \frac{h_n\beta}{2a_n(1+1/R_n)} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{1+1/R}\right)_{x,n}\right)\hat{u}_n^{(m,h)}$$
$$= f\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big) - \beta u_n^{(m-1)} + \frac{\beta h_n}{2a_n(1+1/R_n)}\big(f\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big) - \beta u_n^{(m-1)}\big) +$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{h\big(f\big(x, u^{(m-1)}\big) - \beta u^{(m-1)}\big)}{1+1/R}\right)_{x,n}, \quad \hat{u}_0^{(m,h)} = A, \quad \hat{u}_N^{(m,h)} = B, \tag{2.7}$$

где $u_n^{(m)} = u^{(m)}(x_n)$.

К схеме (2.7) можно применить теорему 1.1, тогда получим

$$\left\|\hat{u}^{(m,h)} - [u^{(m)}]_{\Omega_h}\right\|_h \leqslant C_2 \frac{\ln^2 N}{N^2}, \qquad m \geqslant 0. \tag{2.8}$$

Пусть $v^{(m,h)} = u^{(m,h)} - \hat{u}^{(m,h)}$. Поставим задачу относительно $v^{(m,h)}$:

$$L_n^h v^{(m,h)} = F_n^{(m-1,h)}, \quad n = 1, \dots, N-1, \qquad v_0^{(m,h)} = 0, \quad v_N^{(m,h)} = 0, \tag{2.9}$$

где L^h соответствует (2.4) и

$$F_n^{(m-1,h)} = (1 + \beta S_1 - S_3)\Big(f\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) - f\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)\Big) + S_2\Big(f\big(x_{n+1}, u_{n+1}^{(m-1,h)}\big) -$$
$$f\big(x_{n+1}, u_{n+1}^{(m-1)}\big)\Big) - \beta(1+\beta S_1 - S_3)\Big(u_n^{(m-1,h)} - u_n^{(m-1)}\Big) - S_2\beta\Big(u_{n+1}^{(m-1,h)} - u_{n+1}^{(m-1)}\Big).$$

Используя теорему Лагранжа о среднем и учитывая (2.1), получим

$$\left\|F^{(m-1,h)}\right\|_h \leqslant (1 + \beta S_1 - S_3 + S_2)\,(\beta - \gamma)\,\left\|u^{(m-1,h)} - [u^{(m-1)}]_{\Omega_h}\right\|_h.$$

Введем сеточную функцию

$$\Psi^h = \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\left\|u^{(m-1,h)} - \big[u^{(m-1)}\big]_{\Omega_h}\right\|_h \pm v^{(m,h)}.$$

Несложно убедиться, что $L_n^h \Psi^h \leqslant 0$, $0 < n < N$, $\Psi_0^h = \Psi_N^h = 0$. Следовательно, из принципа максимума получим $\Psi^h \geqslant 0$. Значит,

$$\left\|u^{(m,h)} - \big[\hat{u}_n^{(m,h)}\big]_{\Omega_h}\right\|_h \leqslant \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\left\|u^{(m-1,h)} - \big[u^{(m-1)}\big]_{\Omega_h}\right\|_h.$$

Используя (2.8), приходим к неравенству

$$\left\|u^{(m,h)} - \big[u^{(m)}\big]_{\Omega_h}\right\|_h \leqslant \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\left\|u^{(m-1,h)} - \big[u^{(m-1)}\big]_{\Omega_h}\right\|_h + C_2 \frac{\ln^2 N}{N^2}. \tag{2.10}$$

Так как $u^{(0,h)} = [u^{(0)}]_{\Omega_h}$, из (2.10) следует, что для любого $m > 0$:

$$\left\| u^{(m,h)} - [u^{(m)}]_{\Omega_h} \right\|_h \leqslant C_2 \frac{\ln^2 N}{N^2} \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)^k \leqslant C_2 \frac{\beta}{\gamma} \frac{\ln^2 N}{N^2}.$$

Использование неравенства (2.3) завершает доказательство леммы. □

Оценка (2.6) соответствует точности решения задачи (1.1) на основе итераций (2.4) на произвольной m-й итерации.

В (2.4) можно перейти к пределу при $m \longrightarrow \infty$, тогда получим разностную схему для нелинейной задачи (1.1):

$$\mathfrak{L}_n^h u^h = \varepsilon \left(\frac{u^h_{\bar{x}}}{1+R} \right)_{x,n} + a_{n+1} u^h_{x,n} + \frac{h_{n+1}}{h_n + h_{n+1}} \frac{\beta}{1 + 1/R_{n+1}} (u^h_{n+1} - u^h_n) -$$
$$f(x_n, u^h_n) - \frac{\beta h_n}{2a_n(1 + 1/R_n)} f(x_n, u^h_n) - \frac{1}{2} \left(\frac{hf(x,u)}{1 + 1/R} \right)_{x,n} = 0, \ u^h_0 = A, \ u^h_N = B. \quad (2.11)$$

Лемма 2.3. *Пусть* u^h *— решение схемы* (2.11), $u^{(m,h)}$ *— решение на* m*-й итерации метода* (2.4) *при* $\left\| u^{(0,h)} - u^h \right\|_h = \delta$. *Тогда*

$$\left\| u^{(m,h)} - u^h \right\|_h \leqslant \delta \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)^m, \quad m \geqslant 0. \quad (2.12)$$

Доказательство. Пусть $z^{(m)} = u^{(m,h)} - u^h$. Тогда

$$L_n^h z^{(m)} = F_n^{(m-1,h)}, \qquad 0 < n < N, \qquad z_0^{(m)} = 0, \quad z_N^{(m)} = 0, \quad (2.13)$$

где L^h соответствует (2.4) и

$$F_n^{(m-1,h)} = (1 + \beta S_1 - S_3)\Big(f\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) - f\big(x_n, u_n^h\big) - \beta\big(u_n^{(m-1,h)} - u_n^h\big)\Big) +$$
$$S_2 \left(f\big(x_{n+1}, u_{n+1}^{(m-1,h)}\big) - f\big(x_{n+1}, u_{n+1}^h\big)\right) - S_2 \beta \left(u_{n+1}^{(m-1,h)} - u_{n+1}^h\right).$$

Из теоремы Лагранжа о среднем следует

$$\left\| F^{(m-1,h)} \right\|_h \leqslant (1 + \beta S_1 + S_2 - S_3)\,(\beta - \gamma) \left\| u^{(m-1,h)} - u^h \right\|_h.$$

Применяя принцип максимума к задаче (2.13) и используя последнее неравенство, получим

$$\left\| u^{(m,h)} - u^h \right\|_h \leqslant \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \left\| u^{(m-1,h)} - u^h \right\|_h. \quad (2.14)$$

Требуемое неравенство (2.12) следует из (2.14). □

Из лемм 2.2 и 2.3 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть* $u(x)$ *— решение задачи* (1.1), u^h *— решение схемы* (2.11). *Найдется постоянная* C_3 *такая, что*

$$\left\| u^h - [u]_{\Omega_h} \right\|_h \leqslant C_3 \frac{\ln^2 N}{N^2}.$$

Оценим количество арифметических действий, необходимых для нахождения решения схемы (2.11) на основе (2.4). Чтобы погрешность итерационного метода не преобладала над погрешностью схемы (2.11), итерации (2.4) продолжаем до выполнения условия

$$\left\|u^{(m_h,h)} - u^h\right\|_h \leqslant \Delta_N, \qquad \Delta_N = \frac{\ln^2 N}{N^2}. \tag{2.15}$$

Учитывая оценку (2.12), заключаем, что для этого потребуется число итераций

$$m_h \geqslant \ln \frac{\Delta_N}{\delta} \Big/ \ln\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right). \tag{2.16}$$

На каждой итерации схему (2.4) можно разрешить методом прогонки. Пусть dN — количество арифметических действий, необходимое для реализации одной итерации. Тогда для выполнения условия (2.16) потребуется количество арифметических действий

$$N_h \approx dN \ln \frac{\Delta_N}{\delta} \Big/ \ln\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right). \tag{2.17}$$

3. Линеаризация Ньютона

Рассмотрим подход к решению задачи (1.1) на основе линеаризации Ньютона:

$$\begin{aligned} Lu^{(m)} &= \varepsilon\big(u^{(m)}\big)'' + a(x)\big(u^{(m)}\big)' - f'_u\big(x, u^{(m-1)}\big)u^{(m)} \\ &= f\big(x, u^{(m-1)}\big) - f'_u\big(x, u^{(m-1)}\big)u^{(m-1)}, \qquad u^{(m)}(0) = A, \quad u^{(m)}(1) = B. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Введем обозначения: $\rho = \left\|u^{(0)} - u\right\|$, $\theta = \max_{x\in\overline{\Omega},\ |\xi|\leqslant L_0+\rho} |f''_{uu}(x,\xi)|$.

Известно, что метод Ньютона квадратично сходится при достаточно хорошем начальном приближении. В соответствии с [10] справедлива следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть $u(x)$ — решение задачи* (1.1), *$u^{(m)}(x)$ — решение задачи* (3.1) *при заданном m, и выполнено условие $\alpha^{-1}\theta\rho < 1$. Тогда*

$$\left\|u^{(m)} - u\right\| \leqslant \alpha\theta^{-1}(\alpha^{-1}\theta\rho)^{2^m}, \qquad m \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Перейдем от (3.1) к итерациям на разностном уровне, применяя схему (1.5):

$$\begin{aligned} L^h_n u^{(m,h)} &= \varepsilon\left(\frac{u^{(m,h)}_{\bar{x}}}{1+R}\right)_{x,n} + a_{n+1}u^{(m,h)}_{x,n} - \\ &\left(f'_u\big(x_n, u^{(m-1,h)}_n\big) + \frac{h_n f'^2_u\big(x_n, u^{(m-1,h)}_n\big)}{2a_n(1+1/R_n)} + \frac{1}{2}\left(\frac{hf'_u\big(x, u^{(m-1,h)}\big)}{1+1/R}\right)_{x,n}\right)u^{(m,h)}_n \\ &= f\big(x_n, u^{(m-1,h)}_n\big) - f'_u\big(x_n, u^{(m-1,h)}_n\big)u^{(m-1,h)}_n + \\ &\frac{h_n f'_u\big(x_n, u^{(m-1,h)}_n\big)}{2a_n(1+1/R_n)}\Big(f\big(x_n, u^{(m-1,h)}_n\big) - f'_u\big(x_n, u^{(m-1,h)}_n\big)u^{(m-1,h)}_n\Big) + \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{h\big(f(x, u^{(m-1,h)}) - f'_u\big(x, u^{(m-1,h)}\big)u^{(m-1,h)}\big)}{1+1/R}\right)_{x,n}, \ \ u^{(m,h)}_0 = A, \ \ u^{(m,h)}_N = B. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Лемма 3.2. *Пусть в* (3.3) $u^{(0,h)} = [u^{(0)}]_{\Omega_h}$. *Существуют* N_0 *и* ρ_0, *не зависящие от* ε, *такие, что для* $N \geqslant N_0$ *и* $\rho \leqslant \rho_0$ *для некоторой постоянной* C_4 *выполнится*

$$\left\|u^{(m,h)} - [u]_{\Omega_h}\right\|_h \leqslant C_4\frac{\ln^2 N}{N^2} + \alpha\theta^{-1}(\alpha^{-1}\theta\rho)^{2^m}, \quad m \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Доказательство. На произвольной m-й итерации к задаче (3.1) применим схему (1.5) и получим

$$\varepsilon\left(\frac{\hat{u}_{\bar{x}}^{(m,h)}}{1+R}\right)_{x,n} + a_{n+1}\hat{u}_{x,n}^{(m,h)} - \left(f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big) + \frac{h_n\big(f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)\big)^2}{2a_n(1+1/R_n)} + \frac{1}{2}\left(\frac{hf'_u\big(x, u^{(m-1)}\big)}{1+1/R}\right)_{x,n}\right)\hat{u}_n^{(m,h)}$$

$$= f\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big) - f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)u_n^{(m-1)} + \frac{h_n f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)}{2a_n(1+1/R_n)} \times \Big(f\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big) - f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)u_n^{(m-1)}\Big) +$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h\big(f\big(x, u^{(m-1)}\big) - f'_u\big(x, u^{(m-1)}\big)u^{(m-1)}\big)}{1+1/R}\right)_{x,n}, \quad \hat{u}_0^{(m,h)} = A, \quad \hat{u}_N^{(m,h)} = B, \tag{3.5}$$

где $u_n^{(m)} = u^{(m)}(x_n)$.

К схеме (3.5) можно применить теорему 1.1, тогда получим

$$\left\|\hat{u}^{(m,h)} - [u^{(m)}]_{\Omega_h}\right\|_h \leqslant C_5\frac{\ln^2 N}{N^2}, \qquad m \geqslant 1. \tag{3.6}$$

Оценим $\left\|u^{(m,h)} - \hat{u}^{(m,h)}\right\|_h$. Введем $v^{(m,h)} = u^{(m,h)} - \hat{u}^{(m,h)}$, тогда

$$L_n^h v^{(m,h)} = F_n^{(m-1,h)}, \quad n = 1, \ldots, N-1, \qquad v_0^{(m,h)} = 0, \quad v_N^{(m,h)} = 0, \tag{3.7}$$

где оператор L^h соответствует (3.3) и

$$\begin{aligned}
F_n^{(m-1,h)} = \Big[&f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) - f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big) + S_1\Big(f'^2_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) - f'^2_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)\Big) + \\
&S_2\left(f'_u\big(x_{n+1}, u_{n+1}^{(m-1,h)}\big) - f'_u\big(x_{n+1}, u_{n+1}^{(m-1)}\big)\right) - \\
&S_3\left(f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) - f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)\right)\Big]\hat{u}_n^{(m,h)} + f\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) - f\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big) + \\
&S_1\left(f'_u\big(x_n, u^{(m-1,h)}\big)f\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) - f'_u\big(x_n, u^{(m-1)}\big)f\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)\right) + \\
&S_2\left(f\big(x_{n+1}, u_{n+1}^{(m-1,h)}\big) - f\big(x_{n+1}, u_{n+1}^{(m-1)}\big)\right) - S_3\left(f\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) - f\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)\right) - \\
&\Big(f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big)u_n^{(m-1,h)} - f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)u_n^{(m-1)}\Big) - \\
&S_1\left(f'^2_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big)u_n^{(m-1,h)} - f'^2_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)u_n^{(m-1)}\right) - \\
&S_2\left(f'_u\big(x_{n+1}, u_{n+1}^{(m-1,h)}\big)u_{n+1}^{(m-1,h)} - f'_u\big(x_{n+1}, u_{n+1}^{(m-1)}\big)u_{n+1}^{(m-1)}\right) + \\
&S_3\left(f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big)u_n^{(m-1,h)} - f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)u_n^{(m-1)}\right).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Используя теорему Лагранжа, преобразуем слагаемые в (3.8) следующим образом:

$$f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) f\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) - f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big) f\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)$$
$$= f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) f'_u\big(x_n, \xi_n^2\big)\big(u_n^{(m-1,h)} - u_n^{(m-1)}\big) + f\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big) f''_{uu}\big(x_n, \xi_n^1\big)\big(u_n^{(m-1,h)} - u_n^{(m-1)}\big),$$

$$f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) u_n^{(m-1,h)} - f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big) u_n^{(m-1)}$$
$$= f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big)\big(u_n^{(m-1,h)} - u_n^{(m-1)}\big) + f''_{uu}\big(x_n, \xi_n^1\big)\big(u_n^{(m-1,h)} - u_n^{(m-1)}\big) u_n^{(m-1)},$$

$$f'^2_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) u_n^{(m-1,h)} - f'^2_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big) u_n^{(m-1)}$$
$$= f'^2_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big)\big(u_n^{(m-1,h)} - u_n^{(m-1)}\big) +$$
$$f''_{uu}\big(x_n, \xi_n^1\big)\big(u_n^{(m-1,h)} - u_n^{(m-1)}\big)\big(f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) + f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)\big) u_n^{(m-1)},$$

$$f'_u\big(x_{n+1}, u_{n+1}^{(m-1,h)}\big) u_{n+1}^{(m-1,h)} - f'_u\big(x_{n+1}, u_{n+1}^{(m-1)}\big) u_{n+1}^{(m-1)}$$
$$= f'_u\big(x_{n+1}, u_{n+1}^{(m-1,h)}\big)\big(u_{n+1}^{(m-1,h)} - u_{n+1}^{(m-1)}\big) + f''_{uu}\big(x_{n+1}, \eta_{n+1}^1\big)\big(u_{n+1}^{(m-1,h)} - u_{n+1}^{(m-1)}\big) u_{n+1}^{(m-1)},$$

где $\xi_n^1,\ \xi_n^2 \in \big[u_n^{(m-1,h)},\ u_n^{(m-1)}\big]$ и $\eta_{n+1}^1 \in \big[u_{n+1}^{(m-1,h)},\ u_{n+1}^{(m-1)}\big]$. Под принадлежностью величины интервалу здесь и далее подразумеваем, что эта величина находится в заданных границах, чтобы не писать более сложные логические условия.

Используя полученные выше преобразования и теорему Лагранжа, получим, что после приведения подобных (3.8) будет иметь вид

$$\begin{aligned} F_n^{(m-1,h)} = {} & S_2 f''_{uu}\big(x_{n+1}, \eta_{n+1}^1\big)\big(\hat u_n^{(m,h)} - u_{n+1}^{(m-1)}\big)\big(u_{n+1}^{(m-1,h)} - u_{n+1}^{(m-1)}\big) + \\ & S_2 f''_{uu}\big(x_{n+1}, \eta_{n+1}^3\big)\big(\eta_{n+1}^2 - u_{n+1}^{(m-1,h)}\big)\big(u_{n+1}^{(m-1,h)} - u_{n+1}^{(m-1)}\big) + \\ & S_5 f''_{uu}\big(x_n, \xi_n^1\big)\big(\hat u_n^{(m,h)} - u_n^{(m)} + u_n^{(m)} - u_n^{(m-1)}\big)\big(u_n^{(m-1,h)} - u_n^{(m-1)}\big) + \\ & \big(S_4 f''_{uu}(x_n, \xi_n^3)(\xi_n^2 - u_n^{(m-1,h)}) + S_1 f\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big) f''_{uu}(x_n, \xi_n^1)\big) \times \\ & \qquad \big(u_n^{(m-1,h)} - u_n^{(m-1)}\big), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $\xi_n^3 \in \big[u_n^{(m-1,h)}, u_n^{(m-1)}\big]$, $\eta_{n+1}^2, \eta_{n+1}^3 \in \big[u_{n+1}^{(m-1,h)}, u_{n+1}^{(m-1)}\big]$, $S_4 = 1 + S_1 f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) - S_3$, $S_5 = 1 + S_1\left(f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) + f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1)}\big)\right) - S_3$.

Распишем $\hat u_n^{(m,h)} - u_{n+1}^{(m-1)}$ следующим образом:

$$\hat u_n^{(m,h)} - u_{n+1}^{(m-1)} = \big(\hat u_n^{(m,h)} - u_n^{(m)}\big) + \big(u^{(m)}(x_n) - u^{(m)}(x_{n+1})\big) + \big(u_{n+1}^{(m)} - u_{n+1}^{(m-1)}\big). \tag{3.10}$$

Учитывая, что для функции $u^{(m)}$ справедливы оценки производных (1.3), получим

$$\begin{aligned} \big|u^{(m)}(x_{n+1}) - u^{(m)}(x_n)\big| &= \left|\int_{x_n}^{x_{n+1}} \big(u^{(m)}(s)\big)' ds\right| \le \int_{x_n}^{x_{n+1}} \big|\big(u^{(m)}(s)\big)'\big|\, ds \\ &\le C_0 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha s}{\varepsilon}} + 1\right) ds \le C_0\left(h_{n+1} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\frac{\alpha s}{\varepsilon}} ds\right) \le \frac{4}{\alpha}\frac{\ln N}{N}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Поясним (3.11). В случае $x_{n+1} \leqslant \sigma$ выполнено

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\frac{\alpha s}{\varepsilon}}\, ds \leqslant \frac{h_{n+1}}{\varepsilon} = \frac{4}{\alpha}\frac{\ln N}{N}.$$

В случае $x_{n+1} > \sigma$ очевидно, что $x_n \geqslant \sigma$, поэтому

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\frac{\alpha s}{\varepsilon}}\,ds = \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\alpha x_n}{\varepsilon}}\left(1-e^{-\frac{\alpha h_{n+1}}{\varepsilon}}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\alpha\sigma}{\varepsilon}} = \frac{1}{\alpha N^2} < \frac{4}{\alpha}\frac{\ln N}{N}.$$

Итак, из (3.9)–(3.11) следует

$$\begin{aligned}\big\|F^{(m-1,h)}\big\|_h \le S_2\theta\Big(&\big\|\hat u^{(m,h)}-\big[u^{(m)}\big]_{\Omega_h}\big\|_h+\frac{4}{\alpha}\frac{\ln N}{N}+\big\|u^{(m)}-u^{(m-1)}\big\|+\\ &\big\|\big[u^{(m-1)}\big]_{\Omega_h}-u^{(m-1,h)}\big\|_h\Big)\big\|u^{(m-1,h)}-\big[u^{(m-1)}\big]_{\Omega_h}\big\|_h+\\ \theta\Big(&S_5\big\|\hat u^{(m,h)}-\big[u^{(m)}\big]_{\Omega_h}\big\|_h+S_5\big\|u^{(m)}-u^{(m-1)}\big\|+\\ &S_4\big\|\big[u^{(m-1)}\big]_{\Omega_h}-u^{(m-1,h)}\big\|_h+S_1\|f\|\Big)\big\|u^{(m-1,h)}-\big[u^{(m-1)}\big]_{\Omega_h}\big\|_h.\end{aligned}$$

Применяя принцип максимума к задаче (3.7), используя последнее неравенство, (3.6) и (2.5), в результате получим, что для некоторой постоянной C_6 выполнится

$$\begin{aligned}\big\|u^{(m,h)}-\big[u^{(m)}\big]_{\Omega_h}\big\|_h \le C_6\left(\frac{\ln^2 N}{N^2}+\frac{\ln N}{N}+\big\|u^{(m)}-u^{(m-1)}\big\|+\big\|u^{(m-1,h)}-\big[u^{(m-1)}\big]_{\Omega_h}\big\|_h\right)\times\\ \big\|u^{(m-1,h)}-\big[u^{(m-1)}\big]_{\Omega_h}\big\|_h+C_5\frac{\ln^2 N}{N^2}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Выбираем ρ_0 так, чтобы для $\rho\leqslant\rho_0$ было выполнено $\alpha^{-1}\theta\rho<1$ и $\rho C_6\leqslant 1/16$. Учитывая (3.2), для $m\geqslant 1$ получим

$$C_6\big\|u^{(m)}-u^{(m-1)}\big\|\leqslant C_6\big\|u^{(m)}-u\big\|+C_6\big\|u^{(m-1)}-u\big\|\leqslant\frac{1}{8}.$$

Выбираем N_0 так, чтобы для $N\geqslant N_0$ было выполнено

$$2C_6\frac{\ln N}{N}<\frac{1}{8}\qquad\text{и}\qquad C_5C_6\frac{\ln^2 N}{N^2}<\frac{1}{8}. \tag{3.13}$$

С учетом ограничений на ρ_0 и N_0 из (3.12) для $m\geqslant 1$ получим

$$\begin{aligned}&\big\|u^{(m,h)}-[u^{(m)}]_{\Omega_h}\big\|_h\\ &\quad\leqslant C_5\frac{\ln^2 N}{N^2}+\left(\frac{1}{4}+C_6\big\|u^{(m-1,h)}-[u^{(m-1)}]_{\Omega_h}\big\|_h\right)\big\|u^{(m-1,h)}-\big[u^{(m-1)}\big]_{\Omega_h}\big\|_h.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Далее, используя метод математической индукции, докажем, что

$$\big\|u^{(m,h)}-\big[u^{(m)}\big]_{\Omega_h}\big\|_h\leqslant 2C_5\frac{\ln^2 N}{N^2},\qquad m\geqslant 1. \tag{3.15}$$

Пусть $m=1$. Учитывая условие $u^{(0,h)}=\big[u^{(0)}\big]_{\Omega_h}$, из (3.14) получаем

$$\big\|u^{(1,h)}-\big[u^{(1)}\big]_{\Omega_h}\big\|_h\leqslant C_5\frac{\ln^2 N}{N^2}.$$

Теперь сделаем индуктивное предположение, что для $k<m$ неравенство (3.15) выполнено. Учитывая ограничения (3.13), докажем, что оно верно и для $k=m$:

$$\begin{aligned}\left\|u^{(m,h)}-\left[u^{(m)}\right]_{\Omega_h}\right\|_h &\le \left(\frac{1}{4}+C_6\left\|u^{(m-1,h)}-\left[u^{(m-1)}\right]_{\Omega_h}\right\|_h\right)\left\|u^{(m-1,h)}-\left[u^{(m-1)}\right]_{\Omega_h}\right\|_h+C_5\frac{\ln^2 N}{N^2}\\ &\le \left(\frac{1}{4}+2C_5C_6\frac{\ln^2 N}{N^2}\right)2C_5\frac{\ln^2 N}{N^2}+C_5\frac{\ln^2 N}{N^2}\leqslant 2C_5\frac{\ln^2 N}{N^2},\end{aligned}$$

что завершает обоснование неравенства (3.15).

Теперь утверждение леммы следует из неравенств (3.2), (3.15). $\square$

Переходя в (3.3) к пределу при $m \longrightarrow \infty$, получим разностную схему для задачи (1.1):

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_n^h u^h = \varepsilon\left(\frac{u_{\bar{x}}^h}{1+R}\right)_{x,n} + a_{n+1}u_{x,n}^h + \frac{h_{n+1}}{h_n+h_{n+1}}\frac{f'_u(x_{n+1},u_{n+1}^h)}{1+1/R_{n+1}}\left(u_{n+1}^h-u_n^h\right) -\\ f\left(x_n,u_n^h\right)-\frac{h_n f'_u\left(x_n,u_n^h\right)}{2a_n(1+1/R_n)}f\left(x_n,u_n^h\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{hf(x,u)}{1+1/R}\right)_{x,n}=0,\ u_0^h{=}A,\ u_N^h{=}B.\end{aligned} \quad (3.16)$$

Покажем, что итерационный метод (3.3) сходится к решению схемы (3.16).

Лемма 3.3. *Пусть u^h — решение задачи (3.16), $u^{(m,h)}$ — сеточная функция, соответствующая m-й итерации метода (3.3), и $\delta = \|u^{(0,h)} - u^h\|_h$. Существуют константы N_0 и δ_0, не зависящие от ε, такие, что при $N \geqslant N_0$ и $\delta \leqslant \delta_0$ выполнится*

$$\left\|u^{(m,h)} - u^h\right\|_h \leqslant \delta 2^{-m}, \quad m \geqslant 0. \quad (3.17)$$

Доказательство. Пусть $z^{(m,h)} = u^{(m,h)} - u^h$. Тогда

$$L_n^h z^{(m,h)} = F_n^{(m-1,h)}, \quad 0<n<N, \qquad z_0^{(m,h)}=0, \quad z_N^{(m,h)}=0, \quad (3.18)$$

где L^h соответствует (3.3) и

$$\begin{aligned}F_n^{(m-1,h)} = (1{-}S_3)\Big(f\big(x_n,u_n^{(m-1,h)}\big){-}f\big(x_n,u_n^h\big)\Big){-}(1-S_3)f'_u\big(x_n,u_n^{(m-1,h)}\big)\big(u_n^{(m-1,h)}-u_n^h\big)+\\ S_1\left(f'_u\big(x_n,u_n^{(m-1,h)}\big)f\big(x_n,u_n^{(m-1,h)}\big)-f'_u\big(x_n,u_n^h\big)f\big(x_n,u_n^h\big)\right)-\\ S_1 f_u'^2\big(x_n,u_n^{(m-1,h)}\big)\big(u_n^{(m-1,h)}-u_n^h\big)+S_2\left(f\big(x_{n+1},u_{n+1}^{(m-1,h)}\big)-f\big(x_{n+1},u_{n+1}^h\big)\right)-\\ S_2\left(f'_u\big(x_{n+1},u_{n+1}^{(m-1,h)}\big)u_{n+1}^{(m-1,h)}-f'_u\big(x_{n+1},u_{n+1}^h\big)u_{n+1}^h\right)+\\ S_2\left(f'_u\big(x_{n+1},u_{n+1}^{(m-1,h)}\big)-f'_u\big(x_{n+1},u_{n+1}^h\big)\right)u_n^h.\end{aligned} \quad (3.19)$$

Используя теорему Лагранжа, преобразуем слагаемые в (3.19):

$$\begin{aligned}&f'_u\big(x_n,u_n^{(m-1,h)}\big)f\big(x_n,u_n^{(m-1,h)}\big)-f'_u\big(x_n,u_n^h\big)f\big(x_n,u_n^h\big)\\ &=f'_u\big(x_n,u_n^{(m-1,h)}\big)f'_u\big(x_n,\xi_n^2\big)\big(u_n^{(m-1,h)}-u_n^h\big)+f\big(x_n,u_n^h\big)f''_{uu}\big(x_n,\xi_n^1\big)\big(u_n^{(m-1,h)}-u_n^h\big),\\ &f'_u\big(x_{n+1},u_{n+1}^{(m-1,h)}\big)u_{n+1}^{(m-1,h)}-f'_u\big(x_{n+1},u_{n+1}^h\big)u_{n+1}^h\\ &=f''_{uu}\big(x_{n+1},\eta_{n+1}^1\big)\big(u_{n+1}^{(m-1,h)}-u_{n+1}^h\big)u_{n+1}^{(m-1,h)}+f'_u\big(x_{n+1},u_{n+1}^h\big)\big(u_{n+1}^{(m-1,h)}-u_{n+1}^h\big),\end{aligned} \quad (3.20)$$

где $\xi_n^1,\ \xi_n^2 \in \left[u_n^{(m-1,h)},\ u_n^h\right]$ и $\eta_{n+1}^1 \in \left[u_{n+1}^{(m-1,h)},\ u_{n+1}^h\right]$.

Учитывая (3.20) и применяя теорему Лагранжа, получим, что после приведения подобных (3.19) будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
F_n^{(m-1,h)} = {} & S_4 f''_{uu}\big(x_n,\xi_n^3\big)\big(\xi_n^2-u_n^{(m-1,h)}\big)\big(u_n^{(m-1,h)}-u_n^h\big)+\\
& S_1 f\big(x_n,u_n^h\big) f''_{uu}\big(x_n,\xi_n^1\big)\big(u_n^{(m-1,h)}-u_n^h\big)+\\
& S_2 f''_{uu}\big(x_{n+1},\eta_{n+1}^3\big)\big(\eta_{n+1}^2-u_{n+1}^h\big)\big(u_{n+1}^{(m-1,h)}-u_{n+1}^h\big)-\\
& S_2 f''_{uu}\big(x_{n+1},\eta_{n+1}^1\big)\big(u_{n+1}^{(m-1,h)}-u_{n+1}^h\big)\big(u_{n+1}^{(m-1,h)}-u_n^h\big),
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

где $\xi_n^3 \in \big[u_n^{(m-1,h)},\, u_n^h\big]$ и $\eta_{n+1}^2,\eta_{n+1}^3 \in \big[u_{n+1}^{(m-1,h)},\, u_{n+1}^h\big]$, а $S_4 = 1 + S_1 f'_u\big(x_n, u_n^{(m-1,h)}\big) - S_3$.

Распишем $u_{n+1}^{(m-1,h)} - u_n^h$ следующим образом:

$$
u_{n+1}^{(m-1,h)}-u_n^h = \big(u_{n+1}^{(m-1,h)}-u_{n+1}^{(m-1)}\big)+\big(u_{n+1}^{(m-1)}-u_n^{(m-1)}\big)+\big(u_n^{(m-1)}-u_n^{(m-1,h)}\big)+\big(u_n^{(m-1,h)}-u_n^h\big).
$$

Используя (3.21), (3.11), получим, что для некоторой постоянной C_7 выполнится

$$
\big\|u^{(m,h)}-u^h\big\|_h \leqslant \alpha^{-1}\theta C_7\left(\big\|u^{(m-1,h)}-u^h\big\|_h+\frac{\ln N}{N}\right)\big\|u^{(m-1,h)}-u^h\big\|_h.
$$

Выбираем N_0 и δ_0 таким образом, чтобы при $N \geqslant N_0$ и $\delta \leqslant \delta_0$ имели место неравенства $C_7 \ln N/N \leqslant \alpha\theta^{-1}/4$ и $C_7\delta \leqslant \alpha\theta^{-1}/4$.

Используя метод математической индукции, докажем (3.17).

В соответствии с выбором δ_0 и N_0 для $m \geqslant 1$ выполнено

$$
\big\|u^{(m,h)}-u^h\big\|_h \leqslant \left(\alpha^{-1}\theta C_7\|u^{(m-1,h)}-u^h\big\|_h+\frac{1}{4}\right)\big\|u^{(m-1,h)}-u^h\big\|_h.
$$

Пусть $m=1$. Учитывая, что $C_7\delta \leqslant \alpha\theta^{-1}/4$, получаем

$$
\big\|u^{(1,h)}-u^h\big\|_h \leqslant \left(\alpha^{-1}\theta C_7\delta+\frac{1}{4}\right)\delta \leqslant \delta 2^{-1}.
$$

Теперь сделаем предположение, что неравенство (3.17) выполнено для всех $k<m$. Докажем, что это неравенство верно и для $k=m$:

$$
\begin{aligned}
\big\|u^{(m,h)}-u^h\big\|_h &\leqslant \left(\alpha^{-1}\theta C_7\big\|u^{(m-1,h)}-u^h\big\|_h+\frac{1}{4}\right)\big\|u^{(m-1,h)}-u^h\big\|_h\\
&\leqslant \left(\alpha^{-1}\theta C_7\delta+\frac{1}{4}\right)\delta 2^{-(m-1)} \leqslant \delta 2^{-m},
\end{aligned}
$$

что завершает доказательство леммы. □

Из лемм 3.2 и 3.3 вытекает следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* $u(x)$ *— решение задачи* (1.1), u^h *— решение схемы* (3.16). *Найдется постоянная* C_8 *такая, что*

$$
\|u^h-[u]_{\Omega_h}\|_h \leqslant C_8\frac{\ln^2 N}{N^2}. \tag{3.22}
$$

Оценку (3.4) можно использовать для анализа точности решения исходной задачи (1.1) на основе применения линеаризации Ньютона и модифицированной схемы А.А. Самарского. В частности, итерации метода Ньютона необходимо продолжать, пока не выполнится условие

$$
\alpha\theta^{-1}(\alpha^{-1}\theta\rho)^{2^m} \le \frac{\ln^2 N}{N^2}.
$$

Из этого соотношения можно оценить необходимое количество итераций:

$$m_h \geq \log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_N)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\rho)}.$$

По аналогии с реализацией метода Пикара оценим необходимое количество арифметических действий для решения задачи (1.1):

$$N_h \approx dN \log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_N)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\rho)}.$$

4. Двухсеточная реализация разностных схем

Количество арифметических действий, необходимых для реализации методов Пикара и Ньютона, можно существенно сократить при использовании двухсеточного метода. При таком подходе исходная задача (1.1) сначала решается на достаточно грубой сетке. Затем найденное сеточное решение необходимо интерполировать на исходную сетку и принять за начальное приближение итерационного метода. Это приведет к уменьшению количества итераций на исходной сетке и к выигрышу в количестве арифметических действий.

Итак, пусть Ω_H — сетка Шишкина, соответствующая (1.4) и содержащая n сеточных интервалов, где выбираем $n \ll N$. Тогда предварительно решаем задачу (1.1) на сетке Ω_H. Итерации Пикара или Ньютона на сетке Ω_H продолжаем до выполнения неравенства

$$\left\| u^{(m_H,H)} - u^H \right\|_H \leqslant \Delta_n, \qquad \Delta_n = \frac{\ln^2 n}{n^2}. \tag{4.1}$$

Далее найденное на сетке Ω_H сеточное решение $u^{(m_H,H)}$ интерполируем в узлы исходной сетки Ω_h с помощью кусочно-линейной интерполяции

$$\mathrm{Int}([u]_{\Omega_H}, x) = u_{i-1} + \frac{u_i - u_{i-1}}{H_i}(x - X_{i-1}), \qquad X_{i-1} \leqslant x \leqslant X_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

В соответствии с [11] на сетке Шишкина точность формулы линейной интерполяции равномерна по параметру ε и для некоторой постоянной C_9:

$$\|\mathrm{Int}([u]_{\Omega_H}, x) - u(x)\| \leqslant C_9 \frac{\ln^2 n}{n^2}. \tag{4.2}$$

Интерполяционная формула устойчива к возмущению u_i, поэтому можно интерполировать сеточную функцию $u^{(m_H,H)}$, при этом $\left\| [u]_{\Omega_H} - u^{(m_H,H)} \right\|_H \leqslant C_{10}\Delta_n$.

Теперь зададим начальное приближение для итераций на исходной сетке Ω_h:

$$u^{(0,h)} = [\mathrm{Int}(u^{(m_H,H)}, x)]_{\Omega_h}.$$

Тогда для некоторой постоянной C_{11}:

$$\left\| u^{(0,h)} - u^h \right\|_h \leqslant C_{11}\Delta_n.$$

Итак, с помощью итераций на вспомогательной сетке и линейной интерполяции построено начальное приближение $u^{(0,h)}$ для итераций на сетке Ω_h с точностью $O(\Delta_n)$. Остается осуществить итерации на сетке Ω_h до достижения точности $O(\Delta_N)$.

Оценим количество арифметических действий в случае двухсеточного метода Пикара:

$$N_{Hh} \approx \frac{dn \ln(\Delta_n/\delta)}{\ln(1-\gamma/\beta)} + \frac{dN \ln(\Delta_N/\Delta_n)}{\ln(1-\gamma/\beta)} + I_H,$$

где I_H — количество арифметических действий, необходимое для интерполяции сеточного решения с вспомогательной сетки на исходную.

Учитывая (2.17), оценим выигрыш в количестве арифметических действий при применении двухсеточного метода Пикара:

$$N_h - N_{Hh} \approx \frac{d(N-n)}{\ln(1-\gamma/\beta)} \ln \frac{\Delta_n}{\delta} - I_H.$$

В случае двухсеточного метода Ньютона:

$$N_{Hh} \approx dn \log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_n)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\rho)} + dN \log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_N)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_n)} + I_H$$

и

$$N_h - N_{Hh} \approx d(N-n) \log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_n)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\rho)} - I_H.$$

5. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u''(x) + u'(x) - e^u - g(x) = 0, \qquad u(0) = A, \quad u(1) = B,$$

где A, B, $g(x)$ соответствуют решению

$$u(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{1}{x+1}.$$

Отметим, что выполнены ограничения $e^{1/2} < f'_u \leqslant e^2$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Начальное приближение для итерационных методов задаем в виде линейной интерполяции заданных краевых условий. Итерационный метод на сетке Ω_h завершаем, если в (2.11) или в (3.16) выполнено условие

$$\max_n |\mathfrak{L}_n^h u^{(m_h,h)}| \leqslant \alpha\Delta_N,$$

которое, в чем можно убедиться, обеспечивает выполнение оценки (2.15).

Норма погрешности $\Delta = \|u^h - [u]_{\Omega_h}\|_h$ схемы (3.16), реализованной на основе односеточного метода Ньютона (3.3) при различных значениях ε и N, приведена в табл. 5.1.

Норма погрешности Δ схемы (2.11), реализованной на основе односеточного метода Пикара (2.4) при $\beta = 9 > e^2$ для различных ε и N, приведена в табл. 5.2. Полученные погрешности соответствуют теоремам 2.1 и 3.1.

Таблица 5.1. Погрешность метода, основанного на линеаризации Ньютона

ε	N						
	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}
1	1.44e–5	2.70e–6	4.37e–7	1.16e–6	1.35e–6	1.59e–8	3.98e–9
2^{-3}	2.31e–4	5.69e–5	1.48e–5	4.53e–6	2.00e–6	1.37e–6	5.25e–8
2^{-4}	1.79e–3	4.74e–4	1.25e–4	3.52e–5	7.66e–6	1.92e–6	4.81e–7
2^{-5}	2.53e–3	9.29e–4	3.23e–4	1.11e–4	3.19e–5	9.71e–6	2.68e–6
2^{-6}	2.85e–3	1.07e–3	3.76e–4	1.19e–4	3.73e–5	1.14e–5	3.41e–6
2^{-7}	2.97e–3	1.13e–3	4.03e–4	1.28e–4	4.03e–5	1.23e–5	3.69e–6
2^{-8}	3.00e–3	1.16e–3	4.14e–4	1.32e–4	4.18e–5	1.28e–5	3.84e–6
2^{-9}	2.99e–3	1.16e–3	4.17e–4	1.34e–4	4.24e–5	1.30e–5	3.91e–6
2^{-10}	2.98e–3	1.16e–3	4.17e–4	1.34e–4	4.25e–5	1.31e–5	3.94e–6
2^{-11}	2.98e–3	1.16e–3	4.16e–4	1.33e–4	4.24e–5	1.31e–5	3.95e–6
2^{-12}	2.97e–3	1.15e–3	4.15e–4	1.33e–4	4.23e–5	1.31e–5	3.94e–6
2^{-13}	2.97e–3	1.15e–3	4.15e–4	1.33e–4	4.22e–5	1.30e–5	3.93e–6
2^{-14}	2.97e–3	1.15e–3	4.15e–4	1.33e–4	4.21e–5	1.30e–5	3.91e–6
2^{-15}	2.97e–3	1.15e–3	4.14e–4	1.33e–4	4.21e–5	1.30e–5	3.91e–6

Таблица 5.2. Погрешность метода, основанного на линеаризации Пикара

ε	N						
	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}
1	2.15e–4	6.13e–5	1.75e–5	4.97e–6	1.41e–6	4.01e–7	1.13e–7
2^{-3}	3.18e–4	1.15e–4	4.14e–5	1.46e–5	5.08e–6	1.73e–6	5.84e–7
2^{-4}	1.07e–3	2.91e–4	7.98e–5	2.18e–5	5.93e–6	1.61e–6	4.34e–7
2^{-5}	1.91e–3	7.61e–4	2.47e–4	8.55e–5	2.53e–5	7.39e–6	2.16e–6
2^{-6}	2.28e–3	9.46e–4	3.23e–4	1.09e–4	3.53e–5	1.03e–5	3.14e–6
2^{-7}	2.29e–3	9.91e–4	3.73e–4	1.20e–4	3.88e–5	1.21e–5	3.50e–6
2^{-8}	2.18e–3	9.23e–4	3.54e–4	1.23e–4	4.02e–5	1.26e–5	3.81e–6
2^{-9}	2.20e–3	8.86e–4	3.45e–4	1.22e–4	4.04e–5	1.27e–5	3.87e–6
2^{-10}	2.38e–3	8.60e–4	3.35e–4	1.19e–4	3.98e–5	1.27e–5	3.88e–6
2^{-11}	2.64e–3	8.44e–4	3.28e–4	1.16e–4	3.89e–5	1.25e–5	3.85e–6
2^{-12}	2.69e–3	8.34e–4	3.23e–4	1.14e–4	3.81e–5	1.22e–5	3.79e–6
2^{-13}	2.72e–3	8.29e–4	3.20e–4	1.13e–4	3.76e–5	1.20e–5	3.73e–6
2^{-14}	2.73e–3	8.27e–4	3.19e–4	1.12e–4	3.73e–5	1.19e–5	3.68e–6
2^{-15}	2.74e–3	8.26e–4	3.18e–4	1.12e–4	3.71e–5	1.18e–5	3.58e–6

Теперь остановимся на результатах применения двухсеточного метода.

Результаты численных экспериментов, соответствующих линеаризации Ньютона (3.3) при $\varepsilon = 10^{-2}$, приведены в табл. 5.3. В этой таблице при различных значениях N и n указано количество итераций двухсеточного метода на сетке Ω_h, при этом в скобках приведено количество итераций на вспомогательной сетке Ω_H. В нижней строке таблицы указано число итераций односеточного метода в зависимости от N. Отметим, что в численных экспериментах точность односеточного и двухсточного методов существенно не отличались.

Результаты вычислений для двухсеточного метода Пикара при $\varepsilon = 10^{-2}$ и $\beta = 9$ приведены в табл. 5.4, по аналогии с табл. 5.3.

Отметим, что и при других значениях параметра ε был получен выигрыш в числе арифметических действий при применении двухсеточного метода.

Итак, численные эксперименты подтверждают оценку точности $O(\ln^2 N/N^2)$ для предложенных алгоритмов решения задачи (1.1). А применение двухсеточного метода приводит к уменьшению числа итераций на исходной сетке и, следовательно, к выигрышу в количестве арифметических действий. При этом точность вычислений не понижается.

Таблица 5.3. Количество итераций односеточного и двухсеточного методов Ньютона, $\varepsilon = 10^{-2}$

n	N						
	64	128	256	512	1024	2048	4096
16	1(3)	2(3)	2(3)	2(3)	2(3)	2(3)	2(3)
32	1(3)	1(3)	2(3)	2(3)	2(3)	2(3)	2(3)
64		1(3)	1(3)	2(3)	2(3)	2(3)	2(3)
128			1(3)	1(3)	1(3)	2(3)	2(3)
256				1(3)	1(3)	1(3)	1(3)
512					1(4)	1(4)	1(4)
1024						1(4)	1(4)
2048							1(4)
	3	3	3	4	4	4	4

Таблица 5.4. Количество итераций односеточного и двухсеточного методов Пикара, $\varepsilon = 10^{-2}$

n	N						
	64	128	256	512	1024	2048	4096
16	6(11)	8(11)	9(11)	11(11)	13(11)	15(11)	16(11)
32	2(13)	4(13)	6(13)	8(13)	10(13)	12(13)	14(13)
64		2(14)	3(14)	5(14)	7(14)	9(14)	11(14)
128			2(15)	3(15)	4(15)	5(15)	7(15)
256				2(17)	3(17)	3(17)	4(17)
512					3(18)	3(18)	4(18)
1024						3(19)	3(19)
2048							3(20)
	14	15	17	18	19	20	22

Литература

1. **Ильин А.М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. — 1969. — Т. 6, № 2. — С. 237–248.
2. **Бахвалов Н.С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 841–859.
3. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. — Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1992.
4. **Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., O'Riordan E., and Shishkin G.I.** Robust Computational Techniques for Boundary Layers. — Boca Raton, FL: Chapman and Hall, CRC Press, 2000.
5. **Багаев Б.М., Карепова Е.Д., Шайдуров В.В.** Сеточные методы решения задач с пограничным слоем. Ч. 2. — Новосибирск: Наука, 2001.
6. **Шишкин Г.И.** Метод повышенной точности для квазилинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения конвекции–диффузии // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2006. — Т. 9, № 1. — С. 81—108.
7. **Roos H.-G., Stynes M., and Tobiska L.** Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Convection–Diffusion and Flow Problems. Springer Series in Computational Mathematics, 24. — Berlin: Springer-Verlag, 1996.
8. **Андреев В.Б., Савин И.А.** О равномерной по малому параметру сходимости монотонной схемы А.А. Самарского и ее модификации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1995. — Т. 35, № 5. — С. 739–752.
9. **Vulanovic R.** A uniform numerical method for quasilinear singular perturbation problems without turning points // Computing. — 1989. — Vol. 41. — P. 97–106.
10. **Vulkov L.G., Zadorin A.I.** Two-grid algorithms for an ordinary second order equation with exponential boundary layer in the solution // Int. J. of Numerical Analysis and Modeling. — 2010. — Vol. 7, № 3. — P. 580–592.
11. **Задорин А.И.** Метод интерполяции на сгущающейся сетке для функции с погранслойной составляющей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2008. — Т. 48, № 9. — С. 1673–1684.

Поступила в редакцию 9 ноября 2011 г.