

8. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
9. Yih Chia-shun. Stability of liquid down an inclined plan.—«Phys. Fluids», 1963, vol. 6, N 3, p. 321—334.
10. Гончарсако Б. Н., Уринцев А. Л. Об устойчивости течения вязкой жидкости по наклонной плоскости.— ПМТФ, 1975, № 3.
11. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
12. Логинов Б. В., Треногин В. А. Об использовании групповых свойств для определения многопараметрических семейств решений нелинейных уравнений. Мат. сборник, 1971, т. 85 (127), №3 (7), с. 440—454.
13. Юдович В. И. Возникновение автоколебаний в жидкости.— ПММ, 1971, т. 35, № 4, с. 638—655.
14. Непомнящий А. А. Трехмерные пространственно-периодические движения в пленке жидкости, стекающей по вертикальной плоскости.— В кн.: Гидродинамика. Вып. VII. Пермь, 1974, с. 43—52.
15. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости.— Труды НИИ механики МГУ», 1973, № 25, с. 3—192.
16. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости.— Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 3, с. 28—33.
17. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке жидкости относительно трехмерных возмущений.— В кн.: Гидродинамика, Вып. V. Пермь, 1974 с. 91—104.

УДК 532.5.4

ВИХРЕВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. К. Андреев

(Новосибирск)

Первые работы об устойчивости неустановившихся движений жидкости со свободной границей появились недавно [1—4]. Были исследованы на устойчивость течения в сферической полости [1,2], сферическом слое [3], полосе и кольце идеальной жидкости. В этих работах как основное движение, так и возмущенное предполагались потенциальными. Переходом к лагранжевым координатам удавалось существенно упростить решение задачи. Л. В. Овсянниковым [5] были получены в лагранжевых координатах уравнения малых потенциальных возмущений произвольного потенциального движения. На основе полученных уравнений решены типичные примеры, показывающие степень трудности исследования устойчивости неустановившихся движений [5—8]. Во всех работах устойчивость характеризуется отклонением свободной границы от ее невозмущенного состояния, т. е. нормальной составляющей вектора возмущений.

В данной работе получены общие уравнения малых возмущений неустановившегося течения жидкости со свободной границей в лагранжевых координатах. Для нормальной составляющей вектора возмущений найдено простое выражение. В случае потенциальных массовых сил полученная система сводится к одному уравнению для некоторой скалярной функции с эволюционным условием на свободной границе. Доказана теорема существования и единственности решения, в частности, решен вопрос о корректности линейной задачи о малых потенциальных возмущениях, поставленный в [5]. Исследованы два примера на устойчивость: а) растяжение полосы, б) сжатие круглого цилиндра при условии непотенциальности начального возмущения.

1. Постановка задачи со свободной границей. Общая задача со свободной границей формулируется следующим образом: в начальный момент времени заданы область Ω и поле скоростей $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$,

при $t > 0$ ищется область $\Omega(t)$ и определяются функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющие в $\Omega(t)$ уравнениям Эйлера

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

и условиям

$$p|_{\Gamma(t)} = 0, \quad \left. \frac{dF}{dt} \right|_{\Gamma(t)} = 0$$

на свободной границе. Здесь $F(\mathbf{x}, t) = 0$ — уравнение свободной границы $\Gamma(t)$; \mathbf{g} — вектор массовых сил.

Введем лагранжевы координаты $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ с помощью уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}|_{t=0} = \xi, \quad \xi \in \Omega.$$

Если функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ известна, то вектор скорости можно найти просто дифференцированием по t , а давление p — интегрированием первого из уравнений (1.1). Область $\Omega(t)$ получится как образ области Ω при отображении $\xi \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$, и тем самым задача о движении жидкости со свободной границей может рассматриваться как задача об отыскании отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$, $\xi \in \Omega$ уже в фиксированной области Ω .

Л. В. Овсянниковым было показано, что задача об отыскании отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$, эквивалентная задаче о движении жидкости со свободной границей, в лагранжевых координатах имеет вид [5]

$$(1.2) \quad \Omega : \begin{cases} \operatorname{div} M^{-1} \mathbf{x}_t = 0; \\ M^*(\mathbf{x}_{tt} - \mathbf{g}) + \nabla p = 0; \end{cases}$$

$$(1.3) \quad \Gamma : M^*(\mathbf{x}_{tt} - \mathbf{g}) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0;$$

$$(1.4) \quad \mathbf{x} = \xi,$$

$$(1.5) \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{x}_t = \mathbf{u}_0(\xi), \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0 \end{aligned} \right\} t = 0.$$

Здесь M — матрица Якоби отображения $\xi \rightarrow \mathbf{x}$; M^{-1} , M^* — матрицы, соответственно обратная и транспонированная к ней; $\boldsymbol{\tau}$ — любое смещение вдоль границы Γ ; все операторы берутся по лагранжевым координатам.

2. Уравнения малых возмущений. Пусть известно некоторое решение задачи (1.2) — (1.6) с начальной функцией \mathbf{u}_0 , которое мы назовем основным. Рассмотрим другое решение в той же области Ω , но с измененной начальной функцией

$$(2.1) \quad \tilde{\mathbf{x}}_t(\xi) = \mathbf{u}_0(\xi) + \mathbf{v}(\xi).$$

Это решение называется возмущенным решением, а функция \mathbf{v} — начальным возмущением. Если возмущенное решение описывается функцией $\tilde{\mathbf{x}}$, то разность $\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ можно назвать возмущением основного решения \mathbf{x} . Предполагая начальное возмущение \mathbf{v} малым, можно надеяться на то, что возмущения будут малыми хотя бы на ограниченном интервале времени, и изучать задачу об эволюции малых возмущений в линейном приближении.

Положим $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{X}$ и обозначим через N разность $\tilde{M} - M$ матриц Якоби, соответствующих возмущенному и основному решениям, тогда

$$\tilde{M} = M + N, \quad N = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}.$$

Рассмотрим уравнение (1.2) для возмущенного решения

$$\operatorname{div} \bar{M}^{-1} \bar{x}_t = 0.$$

Согласно [5], получим в линейном приближении

$$(2.2) \quad \operatorname{div} M^{-1} X = 0.$$

Перейдем к преобразованию уравнения (1.3). Для возмущенного решения имеем

$$\bar{M}^*(\bar{x}_{tt} - \bar{g}) + \nabla p = 0,$$

где

$$\bar{p} = p + M^{*-1} \nabla g \cdot X + P, \quad \bar{g} = g(x + X, t).$$

Используя тождество $\nabla(g \cdot X) = \nabla(g)X + N^*g$, находим

$$\begin{aligned} \bar{M}^*(\bar{x}_{tt} - \bar{g}) + \nabla \bar{p} &= M^*(x_{tt} - g) + \nabla p + M^*X_{tt} - M_{tt}^*X + \\ &+ \nabla[(x_{tt} - g + M^{*-1} \nabla p) \cdot X] - AX + \nabla P, \\ A &= M^* \frac{\partial(\bar{g})}{\partial(x)} - \left(\frac{\partial(g)}{\partial(\bar{x})} \right)^* \end{aligned}$$

в линейном приближении. Учитывая, что в основном движении выполнено (1.3), приходим к соотношению

$$(2.3) \quad M^*X_{tt} - [M_{tt}^* + A]X = -\nabla P.$$

Условие (1.4) на свободной границе сводится к следующему:

$$\nabla(P + M^{*-1} \nabla p \cdot X)|_{\Gamma} = 0,$$

т. е. величина $P + M^{*-1} \nabla p \cdot X$ на границе Γ имеет постоянное значение, быть может зависящее от времени t . Отсюда

$$(2.4) \quad (P + M^{*-1} \nabla p \cdot X)|_{\Gamma} = 0.$$

Равенство (2.4) следует также из условий $\bar{p}|_{\Gamma} = 0$, $p|_{\Gamma} = 0$.

К этим уравнениям необходимо добавить начальные условия при $t=0$, вытекающие из того, что оба решения, основное и возмущенное, удовлетворяют одному и тому же начальному условию (1.5), а также условию (2.1), в результате чего

$$(2.5) \quad X|_{t=0} = 0, \quad X_t|_{t=0} = v, \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Уравнения (2.2) — (2.4) описывают эволюцию малых возмущений с начальными условиями (2.5).

Для дальнейших преобразований предположим, что $A=0$, и введем новую функцию Φ равенством

$$\Phi_t = -P.$$

Можно видеть, что условие $A=0$ необходимо и достаточно для того, чтобы вектор массовых сил был потенциален в пространстве точки (x) : $g = \nabla x h$.

Уравнение (2.3) при $A=0$ имеет общее решение

$$(2.6) \quad X = V \int_0^t V^{-1} M^{*-1} (\nabla \Phi + v) dt,$$

где V — фундаментальная матрица соответствующего однородного уравнения

$$(2.7) \quad V_t = M^{*-1} M_t^* V, \quad V|_{t=0} = E.$$

Так как из уравнения (1.4) следует, что

$$M_t^* = M^* \left(\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{x})} \right)^*,$$

то уравнение для V можно упростить и придать ему вид

$$(2.8) \quad V_t = \left(\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial(\mathbf{x})} \right)^* V, \quad V|_{t=0} = E.$$

Из (2.8) следует, что если основное движение потенциально, то матрица V совпадает с матрицей M , ($M \equiv V$), и из (2.7) вытекает тождество для таких движений, отмеченное в [5].

Поскольку на границе выполнено условие $p=0$ (граница свободна), градиент давления направлен по нормали к Γ , т. е.

$$\nabla p|_{\Gamma} = \frac{\partial p}{\partial n}|_{\Gamma} \mathbf{n}.$$

Подставляя вектор \mathbf{X} в (2.2), (2.4) и используя полученные уравнения, придем к задаче об эволюции малых возмущений произвольного основного движения жидкости со свободной границей, которое происходит под действием малого возмущения начальной функции (2.1)

$$(2.9) \quad \Omega : \operatorname{div} \left[M^{-1} V \int_0^t V^{-1} M^{*-1} (\nabla \Phi + \mathbf{v}) dt \right] = 0;$$

$$(2.10) \quad \Gamma : \Phi_t = \frac{\partial p}{\partial n} \mathbf{n} \cdot M^{-1} V \int_0^t V^{-1} M^{*-1} (\nabla \Phi + \mathbf{v}) dt;$$

$$(2.11) \quad t=0: \Phi=0.$$

Предположим, что $\partial p / \partial n \neq 0$, ($\xi \in \Gamma, t \in [0, T]$), тогда из (2.9), (2.10) следует равенство

$$(2.12) \quad \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)^{-1} \Phi_t d\Gamma = 0,$$

справедливое для любого решения задачи (2.9) — (2.11).

Всюду в дальнейшем предполагается, что $\partial p / \partial n \leq -d < 0$ с постоянной $d > 0$. Для потенциальных движений жидкости в отсутствие массовых сил это неравенство справедливо всегда [5] и физически означает, что ускорение частиц на границе $\Gamma(t)$ направлено внутрь жидкости.

В предположении потенциальности массовых сил существует интеграл Вебера уравнений Эйлера [11]

$$\begin{aligned} \Omega : \begin{cases} M^* \mathbf{x}_t = \nabla \varphi + \mathbf{u}_0, \\ \operatorname{div} M^{-1} M^{*-1} (\nabla \varphi + \mathbf{u}_0) = 0; \end{cases} \\ \Gamma : \varphi_t = \frac{1}{2} |M^{*-1} (\nabla \varphi + \mathbf{u}_0)|^2 + h; \\ t = 0 : \begin{cases} \mathbf{x} = \xi, \varphi = 0, \\ \mathbf{x}_t = \mathbf{u}_0, \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Полагая для возмущенного решения

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \mathbf{x}_t \cdot \mathbf{X} + \Phi, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{X},$$

можно показать, что функция Φ удовлетворяет (2.9) — (2.11). Если не

предполагать потенциальность вектора g , то надо пользоваться уравнениями (2.2) — (2.5).

3. Теорема существования и единственности. Пусть основное решение определено в области Ω с границей класса C^2 и принадлежит классу C^3 в цилиндре $D = [0, T] \times \bar{\Omega}$.

Дифференцируя уравнения (2.9), (2.10) один раз по времени, получим

$$(3.1) \quad -\operatorname{div} M^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi = \operatorname{div} \left(\mathbf{q} + B \int_0^t V^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi dt \right) \equiv \\ \equiv f(\Phi), \quad \xi \in \Omega;$$

$$(3.2) \quad (a\Phi_t)_t + \mathbf{n} \cdot M^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi = -\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{q} + B \int_0^t V^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi dt \right) \equiv \\ \equiv h(\Phi), \quad \xi \in \Gamma,$$

где обозначено

$$\mathbf{q} = \left[M^{-1} M^{*-1} + B \int_0^t V^{-1} M^{*-1} dt \right] \mathbf{v}, \quad B = (M^{-1} V), \\ a = \left(-\frac{\partial^2}{\partial n^2} \right)^{-1} \geq a_0 > 0.$$

Пусть $\| \cdot \|$, $\| \cdot \|_{+, \Gamma}$, $\| \cdot \|_{0, \Gamma}$, $\| \cdot \|_{0, \Omega}$, $\| \cdot \|_{1, \Omega}$ — соответственно нормы в пространствах $W_2^{1/2}(\Gamma)$, $L^2(\Gamma)$, $L^2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$; l — произвольный элемент пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$.

Л е м м а. Для любого $l \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ существует единственное решение задачи

$$(3.3) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} M^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi = f(\Phi), & \xi \in \Omega, \\ \Phi|_{\Gamma} = l, & \xi \in \Gamma, \end{cases}$$

при котором

$$\Phi \in L^2([0, T]; W_2^1(\Omega)).$$

(Определение пространств $L^p([0, T]; \mathbb{H})$, $0 < p \leq \infty$ и производных по t в этих пространствах дано в [10].)

Доказательство леммы будет приведено после доказательства теоремы существования. Если лемма справедлива, тогда, согласно [10], можно определить производную по конормали как элемент пространства $W_2^{-1/2}(\Gamma)$: $\partial/\partial \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot M^{-1} M^{*-1} \nabla$. Определяется оператор K , сопоставляющий функции $\psi \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ элемент $K\psi \in W_2^{-1/2}(\Gamma)$ по правилу: по функции $\psi \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ ищется решение задачи (3.3), а затем вычисляется $K\psi = \mathbf{n} \cdot M^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi$. Из определения следует, что K действует из $W_2^{1/2}(\Gamma)$ в $W_2^{-1/2}(\Gamma)$.

Положим $\Phi(t)|_{\Gamma} = \psi(t)$, тогда

$$\frac{\partial \Phi(t)}{\partial \mathbf{v}} = K(t) \psi(t),$$

и, следовательно, задача (3.1), (3.2) сводится к задаче Коши для интегродифференциального уравнения с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве для функции ψ на свободной границе Γ , а именно

$$(3.4) \quad \frac{d}{dt} \left(a \frac{d\psi}{dt} \right) + K(t) \psi = h(\psi);$$

$$(3.5) \quad \psi = \frac{d\psi}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Для отыскания функции Φ остается решить задачу Дирихле

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} M^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi &= f(\Phi), \quad \xi \in \Omega; \\ \Phi(\xi, t) &= \psi(\xi, t), \quad \xi \in \Gamma. \end{aligned}$$

Теорема. Если $v \in L^2(\Omega)$, то существует и притом единственное решение задачи (3.4), (3.5), когда

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \psi &\in L^2([0, T]; W_2^{1/2}(\Gamma)), \\ \psi' &\in L^2([0, T]; L^2(\Gamma)), \end{aligned}$$

где штрих означает дифференцирование по t .

Для доказательства применяется метод Галеркина. Основным моментом доказательства является вывод априорной оценки

$$(3.7) \quad \|\psi(t)\|_{1,\Gamma}^2 + \|\psi'(t)\|_{0,\Gamma}^2 \leq \text{const},$$

в которой постоянная зависит лишь от области Ω и основного решения.

Для вывода априорной оценки (3.7) предположим, что кроме включений (3.6) выполнено еще одно условие: функция $(a\psi)'$ суммируема с квадратом по t на $[0, T]$.

Умножим уравнение (3.4) на $\psi'(t)$ и проинтегрируем по Γ :

$$(3.8) \quad ((a\psi)', \psi')_{\Gamma} + (K\psi, \psi')_{\Gamma} = (h(\psi), \psi')_{\Gamma},$$

где

$$(q, \psi)_{\Gamma} = \int_{\Gamma} q \psi d\Gamma.$$

Первый член преобразуем следующим образом:

$$((a\psi)', \psi')_{\Gamma} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (a\psi', \psi')_{\Gamma} + \frac{1}{2} (a'\psi', \psi')_{\Gamma},$$

а для преобразования второго — воспользуемся формулой Гаусса — Остроградского

$$\begin{aligned} (K\psi, \psi')_{\Gamma} &= -(\Phi_t, f(\Phi))_{\Omega} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (M^{*-1} \nabla \Phi, M^{*-1} \nabla \Phi)_{\Omega} - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\nabla \Phi, (M^{-1} M^{*-1})' \nabla \Phi)_{\Omega}. \end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в (3.8) и интегрируя по времени, после преобразований приходим к соотношению

$$\begin{aligned} (3.9) \quad &(a\psi', \psi')_{\Gamma} + (M^{*-1} \nabla \Phi, M^{*-1} \nabla \Phi)_{\Omega} = \\ &= \int_0^t (\nabla \Phi, (M^{-1} M^{*-1})' \nabla \Phi)_{\Omega} dt - \int_0^t (a'\psi', \psi')_{\Gamma} dt - 2(\nabla \Phi, q)_{\Omega} - \\ &\quad - 2 \left(\nabla \Phi, B \int_0^t V^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi dt \right)_{\Omega} + 2 \int_0^t (\nabla \Phi, q')_{\Omega} dt + \\ &\quad + 2 \int_0^t (\nabla \Phi, BV^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi)_{\Omega} dt + 2 \int_0^t \left(\nabla \Phi, B' \int_0^{\tau} V^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi d\tau \right)_{\Omega} dt. \end{aligned}$$

Пусть $\alpha = \min_{\xi \in \Gamma, t \in [0, T]} (\xi, t) > 0$, тогда, очевидно, $(a\psi', \psi')_{\Gamma} \geq \alpha \|\psi'\|_{0,\Gamma}^2$, а $(M^{*-1} \nabla \Phi, M^{*-1} \nabla \Phi)_{\Omega} \geq \beta \|\nabla \Phi\|_{0,\Omega}^2$, поскольку для любого вектора τ , $|\tau| \neq 0$, имеем $(M^{*-1}\tau, M^{*-1}\tau) \geq \beta |\tau|^2$ и левая часть равенства (3.9) оценивается снизу

$$(a\psi', \psi')_{\Gamma} + (M^{*-1} \nabla \Phi, M^{*-1} \nabla \Phi)_{\Omega} \geq \alpha \|\psi'\|_{0,\Gamma}^2 + \beta \|\nabla \Phi\|_{0,\Omega}^2.$$

Правую часть оценим, пользуясь теоремой о следах [10], следующим образом:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (\nabla \Phi, (M^{-1}M^{*-1})' \nabla \Phi)_\Omega dt \right| &\leq c_0 \int_0^t \|\Phi\|_{1,\Omega}^2 dt \leq c_1 \int_0^t \|\Psi\|_{+, \Gamma}^2 dt, \\ \left| - \int_0^t (a' \Psi', \Psi')_\Gamma dt \right| &\leq c_2 \int_0^t \|\Psi'\|_{0,\Gamma}^2 dt, \\ | - 2(\nabla \Phi, \mathbf{q})_\Omega | &\leq \varepsilon_1 \|\nabla \Phi\|_{0,\Omega}^2 + \frac{c_3}{\varepsilon_1} \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2, \\ \left| 2 \int_0^t (\nabla \Phi, \mathbf{q}')_\Omega dt \right| &\leq c_4 \int_0^t \|\Psi\|_{+, \Gamma}^2 dt + c_5 \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2, \\ \left| 2 \left(\nabla \Phi, B \int_0^t V^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi dt \right)_\Omega \right| &\leq c_6 \varepsilon_2 \|\nabla \Phi\|_{0,\Omega}^2 + c_7 \int_0^t \|\Psi\|_{+, \Gamma}^2 dt, \\ \left| 2 \int_0^t (\nabla \Phi, BV^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi)_\Omega dt \right| &\leq c_8 \int_0^t \|\Psi\|_{+, \Gamma}^2 dt, \\ \left| 2 \int_0^t \left(\nabla \Phi, B' \int_0^\tau V^{-1} M^{*-1} \nabla \Phi d\tau \right)_\Omega dt \right| &\leq c_9 \int_0^t \|\Psi\|_{+, \Gamma}^2 dt, \end{aligned}$$

где $c_i > 0$ обозначают различные постоянные. Суммируя полученные оценки и выбирая $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ так, чтобы $\gamma = \beta - (\varepsilon_1 + c_6 \varepsilon_2) > 0$ (достаточно взять $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 / c_6, \varepsilon_1 < \beta/2$), получим неравенство

$$\gamma \|\nabla \Phi\|_{0,\Omega}^2 + \alpha \|\Psi'\|_{0,\Gamma}^2 \leq m + c_{10} \int_0^t (\|\Psi\|_{+, \Gamma}^2 + \|\Psi'\|_{0,\Gamma}^2) dt.$$

Прибавим к обеим частям последнего неравенства $\sigma \|\Psi\|_{0,\Gamma}^2$ с произвольным $\sigma > 0$ и, замечая, что

$$\|\Psi\|_{0,\Gamma} \leq \int_0^t \|\Psi'(t)\|_{0,\Gamma} dt,$$

$$\gamma \|\nabla \Phi\|_{0,\Omega}^2 + \sigma \|\Psi\|_{0,\Gamma}^2 \geq \lambda \|\Phi\|_{1,\Omega}^2 \geq \omega \|\Psi\|_{+, \Gamma}^2$$

с положительными постоянными λ, ω , окончательно получим неравенство

$$\delta (\|\Psi'(t)\|_{0,\Gamma}^2 + \|\Psi(t)\|_{+, \Gamma}^2) \leq m + c_{11} \int_0^t (\|\Psi'(t)\|_{0,\Gamma}^2 + \|\Psi(t)\|_{+, \Gamma}^2) dt,$$

где $\delta = \min(\alpha, \omega)$. С помощью леммы Гронуолла отсюда получаем оценку (3.7) с постоянной, равной

$$\frac{mT}{\delta} \exp\left(\frac{c_{11}T}{\delta}\right).$$

Априорная оценка доказана.

Определим приближенное решение ψ_n задачи (3.4), (3.5) с помощью равенств

$$\left. \begin{aligned} \psi_n(t) &= \sum_{i=1}^n c_{in}(t) w_i, \quad n = 1, 2, \dots \\ ((a\psi_n)', w_j)_\Gamma + (K(t)\psi_n, w_j)_\Gamma &= (h(\psi_n), w_j), \\ \psi_n(0) = \psi_n'(0) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где $w_j, j=1, 2, \dots$ — базис в $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Тогда неизвестные коэффициенты $c_{in}(t)$ определяются из системы интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. Поэтому предположение о суммируемости $(a\psi_n)'$ для приближений выполнено, и для них справедлива оценка (3.7). Затем известным способом доказывается, что предельная функция является решением задачи (3.4), (3.5) и единственна [11].

Для доказательства леммы тоже применяется метод Галеркина. Продолжим l на Ω так, чтобы продолженная функция \tilde{l} принадлежала $W_2^1(\Omega)$. Введем новую функцию $\Psi = \Phi - \tilde{l}$, тогда $\Psi_\Gamma = 0$ и в области Ω для Ψ получим задачу

$$(3.10) \quad -\operatorname{div} M^{-1} M^{*-1} \nabla \Psi = \operatorname{div} \left(\mathbf{q} + \mathbf{p} + B \int_0^t V^{-1} M^{*-1} \nabla \Psi dt \right), \Psi|_\Gamma = 0,$$

где

$$\mathbf{p} = M^{-1} M^{*-1} \nabla \tilde{l} + B \int_0^t V^{-1} M^{*-1} \nabla \tilde{l} dt.$$

Умножим уравнение (3.10) на Ψ и проинтегрируем по Ω :

$$(3.11) \quad (M^{*-1} \nabla \Psi, M^{*-1} \nabla \Psi)_\Omega = \left(\Psi, \operatorname{div} \left(\mathbf{b} + B \int_0^t V^{-1} M^{*-1} \nabla \Psi dt \right) \right)_\Omega,$$

$\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$.

Очевидно,

$$(M^{*-1} \nabla \Psi, M^{*-1} \nabla \Psi)_\Omega \geq \beta \|\nabla \Psi\|_{0,\Omega}^2 \geq c_1 \|\Psi\|_{1,\Omega},$$

а левая часть оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\Psi, \operatorname{div} \left(\mathbf{b} + B \int_0^t V^{-1} M^{*-1} \nabla \Psi dt \right) \right)_\Omega &\leq \left(\frac{1}{2} \varepsilon_1 + \frac{c_2 \varepsilon_2}{2} \right) \|\Psi\|_{1,\Omega}^2 + \\ &+ \|\mathbf{b}\|_{0,\Omega}^2 + c_3 \int_0^t \|\Psi\|_{1,\Omega}^2 dt. \end{aligned}$$

Полагая $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 / c_2$, $\varepsilon_1 = c_1 / 2$, получим неравенство

$$\frac{c_1}{2} \|\Psi\|_{1,\Omega}^2 \leq n + c_3 \int_0^t \|\Psi\|_{1,\Omega}^2 dt,$$

откуда следует, что $\|\Psi(t)\|_{1,\Omega}^2 \leq \operatorname{const}$ при $0 \leq t \leq T$.

Замечания.

1. Из уравнения (3.4) следует, что

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} \in L^2([0, T]; W_2^{-1/2}(\Gamma)),$$

отсюда ([10], теорема 3.4) вытекает, что ψ' — почти всюду непрерывная функция $[0, T] \rightarrow W_2^{-1/2}(\Gamma)$, а тогда из (3.6) следует, что ψ — непрерывная функция $[0, T] \rightarrow L^2(\Gamma)$. Поэтому равенства (3.6) имеют смысл.

2. Из неравенства (3.7) следует более сильное утверждение

$$\psi \in L^\infty([0, T]; W_2^{1/2}(\Gamma)); \quad \psi' \in L^\infty([0, T]; L^2(\Gamma)).$$

3. Теорема существования и единственности в случае, когда основное движение потенциально, доказана автором в [9].

4. Устойчивость. В настоящее время нет сколь-нибудь общего подхода к изучению поведения возмущений при $t \rightarrow \infty$ задачи (2.9) — (2.11), т. е. к вопросу об устойчивости основного решения относительно изменения начальных данных. Поэтому каждую задачу подобного вида приходится рассматривать индивидуально. Заметим, что в условиях задачи об устойчивости оценка (3.7) с ростом t делается все более слабой и ничего не дает при $t \rightarrow \infty$, так как постоянная в (3.7) стремится к бесконечности. Наиболее тонко устойчивость характеризуется поведением при $t \rightarrow \infty$ нормальной составляющей вектора возмущений

$$R = \mathbf{X} \cdot \mathbf{n}_x, \quad \mathbf{n}_x \text{ — нормаль к } \Gamma(t),$$

т. е. отклонением свободной границы от ее невозмущенного состояния. Имеем в силу уравнения (2.4)

$$(4.1) \quad R = \mathbf{X} \cdot \mathbf{n}_x = \mathbf{X} \cdot \frac{\nabla_x F}{|\nabla_x F|} = M^{-1} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} \frac{|\nabla_\xi F|}{|M^{*-1} \nabla_\xi F|} = \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)^{-1} \frac{|\nabla_\xi F|}{|M^{*-1} \nabla_\xi F|} \Phi_t|_\Gamma.$$

Предположим теперь, что основное движение потенциально. Как уже отмечалось, в этом случае матрица V совпадает с матрицей M и задача (2.9) — (2.11) несколько упрощается. Имеем

$$(4.2) \quad \Omega : \operatorname{div} M^{-1} M^{*-1} (\nabla \Phi + \mathbf{v}) = 0;$$

$$(4.3) \quad \Gamma : \Phi_{tt} - \frac{\partial p_t}{\partial n} \Phi_t - \frac{\partial p}{\partial n} \mathbf{n} \cdot M^{-1} M^{*-1} (\nabla \Phi + \mathbf{v}) = 0;$$

$$(4.4) \quad t=0 : \Phi = \Phi_t = 0.$$

Здесь рассмотрим задачу (4.2) — (4.4) в двух частных случаях.

Пример 1 (растяжение полосы). Отображение $\xi \rightarrow x$, соответствующее основному решению, возьмем в виде

$$(4.5) \quad x = \frac{\xi}{1 - kt}, \quad y = \eta(1 - kt), \quad k = \text{const}.$$

Компоненты скоростей и давление даются формулами

$$u = \frac{k\xi}{(1 - kt)^2} = \frac{kx}{1 - kt}; \quad v = -k\eta = -\frac{ky}{1 - kt};$$

$$p = \frac{k^2}{(1 - kt)^4} (\xi_0^2 - \xi^2).$$

Интерпретация этого решения такова: область Ω имеет вид прямоугольника («бруса») $|\xi| \leq \xi_0$, на котором при $t=0$ задано поле скоростей $u_0 = k\xi = kx$, $v_0 = -k\eta = -ky$. В момент $t=0$ прямая $\eta = \pi$ («штамп») внезапно начинает двигаться поступательно со скоростью $w = -k\pi$, а прямая $\eta = 0$ («основание») остается неподвижной. Прямые $|\xi| = \xi_0$ образуют свободную границу, а $\eta = 0$, $\eta = \pi$ — непроницаемые стенки.

Подстановка отображения (4.5) в уравнения (4.2) — (4.4) дает ($\mathbf{v} = (u, v)$)

$$(4.6) \quad \alpha^4 \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} + \alpha^4 u_\xi + v_\eta = 0; \quad |\xi| < \xi_0;$$

$$(4.7) \quad (\alpha^4 \Phi_\alpha)_\alpha + 2\xi \alpha^2 (\Phi_\xi + u) = 0, \quad |\xi| = \xi_0;$$

$$(4.8) \quad \Phi = \Phi_\alpha = 0, \quad (\alpha = 1 - kt), \quad \alpha = 1.$$

Из (4.1) для нормальной компоненты получим

$$R = X = \frac{\alpha^3}{2\xi_0} \Phi_\alpha, \quad Y = \alpha \int_1^\alpha \frac{1}{\alpha^2} (\Phi_\eta + v) d\alpha, \quad \mathbf{X} = (X, Y).$$

Условие непротекания сводится к тому, что $Y=0$ при $\eta=0, \eta=\pi$ или

$$\Phi_{\eta} + v = 0, \quad \eta = 0, \pi.$$

(Случай, когда $\text{rot} v = 0$, исследован в [4,5].) Дальнейшие выкладки проводятся так же, как в [5], поэтому они не приводятся. Заметим только, что уравнение для амплитуды R неоднородно. Для решений, четных относительно ξ , при растяжении бруса $AmR \sim t^2$, а при нечетных решениях $AmR \sim t$, что и означает неустойчивость. При сжатии бруса в линию движение устойчиво.

Если возмущения потенциальны, то движение устойчиво для решений, четных относительно ξ .

Пример 2. Эта задача в случае потенциальных возмущений с учетом сил поверхностного натяжения (а также и без них) рассматривалась в [7]. Основное решение берем в виде

$$(4.9) \quad x = \left(\frac{1}{V\gamma} \xi, \frac{1}{V\gamma} \eta, \gamma \zeta \right), \quad p = -\frac{3\kappa^2}{8\gamma^3} (\xi^2 + \eta^2 - \rho_0^2), \\ \gamma = 1 + \kappa t, \quad \kappa = \text{const.}$$

Свободной границей является боковая поверхность цилиндра. Цилиндр ограничен двумя непроницаемыми стенками: неподвижной $\zeta=0$ и подвижной $\zeta=h$. С ростом t цилиндр при $\kappa > 0$ стягивается к оси $x=y=0$, а при $\kappa < 0$ «разбухает» до бесконечности за время $t^* = -1/\kappa$. Подставляя (4.9) в уравнения (4.2) — (4.4), получим в цилиндрических координатах $\xi = \rho \cos \theta$, $\eta = \rho \sin \theta$, $\xi = \xi$, ($v = (u^\rho, u^\theta, w)$):

$$(4.10) \quad \Phi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \Phi_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \Phi_{\theta\theta} + \frac{1}{\gamma^3} \Phi_{\xi\xi} = \left(1 - \frac{1}{\gamma^3} \right) w_{\xi}, \quad \rho < \rho_0;$$

$$(4.11) \quad \frac{1}{\gamma} (\gamma^3 \Phi_{\gamma})_{\gamma} + \frac{3}{4} \rho \Phi_{\rho} = \frac{3}{4} \rho u^{\theta}, \quad \rho = \rho_0;$$

$$(4.12) \quad \Phi = \Phi_{\gamma} = 0, \quad \gamma = 1.$$

Для нормальной составляющей R имеем

$$(4.13) \quad R = -\frac{4\gamma^{5/2}}{3\kappa\rho_0} \Phi_{\gamma}|_{\rho=\rho_0}.$$

Полагая

$$(\Phi, w_{\xi}, u^{\theta}) = (A, f, g) \exp[i(n\xi + \lambda\theta)], \quad i = \sqrt{-1},$$

получим для функции $A(\rho, \gamma)$ неоднородное уравнение на Γ

$$(4.14) \quad \frac{1}{\gamma} (\gamma^3 A_{\gamma})_{\gamma} + \frac{3}{4} \rho_0 \frac{I'_{\lambda}(\beta\rho_0)}{I_{\lambda}(\beta\rho_0)} A = \frac{3}{4} \rho_0 \left[g + \left(1 - \frac{1}{\gamma^3} \right) \int_0^{\rho_0} \frac{I_{\lambda}(\beta r)}{I_{\lambda}(\beta\rho_0)} f(r) dr \right],$$

$$I'_{\lambda}(\beta\rho_0) = \frac{d}{d\rho} I_{\lambda}(\beta\rho)|_{\rho=\rho_0}, \quad \beta = n\gamma^{-3/2}.$$

Здесь I_{λ} — функция Бесселя. Исследование уравнения (4.14) показывает, что при $\gamma \rightarrow \infty$ в случае осесимметрических возмущений ($\lambda=0$) нормальная компонента R неограниченно возрастает, в то время как она ограничена при потенциальных возмущениях [7]. Если $\gamma \rightarrow 0$, то движение устойчиво, т. е. такие возмущения затухают при сближении стенок $\zeta=0$, $\zeta=h$.

Приведенные два примера показывают дестабилизирующее влияние непотенциальных возмущений на устойчивость движения.

В заключение автор благодарит В. В. Пухначева за руководство и постоянное внимание при выполнении данной работы.

Поступила 20 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Birkhoff. Note Taulor instability. — «Quart. Appl. Math.», 1954, vol. 12, p. 306.
2. G. Birkhoff. Stability of spherical bubbles. — «Quart. Appl. Math.», 1956, vol. 13, p. 451.
3. J. H. Hunt. Instability in a spherical fluid sheel. — «Scient. Rec.», 1961, SA 10, N 1, p. 59—77.
4. Кузнецов В. М., Шер Е. Н. Об устойчивости течения идеальной несжимаемой жидкости в полосе и кольце. — ПМТФ, 1964, № 2.
5. Овсянников Л. В. Общие уравнения и примеры. — В кн.: Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск, «Наука», 1967.
6. Пухначев В. В. Малые возмущения плоского неустановившегося движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей, имеющей форму эллипса. — ПМТФ, 1971, № 4.
7. Андреев В. К. Об устойчивости нестационарной круглой струи идеальной несжимаемой жидкости. — ПМТФ, 1972, № 4.
8. Андреев В. К. Об устойчивости неустановившегося движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей, имеющей форму эллипсоида вращения. — В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СССР, вып. 12, 1972.
9. Андреев В. К. Корректность задачи о малых возмущениях движения жидкости со свободной границей. — В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики, вып. 15, 1973.
10. Плонс Ж.—Л., Маджене Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971.
11. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.

УДК 534.222.2+532.528

**ДИНАМИКА ЗОНЫ КАВИТАЦИИ
ПРИ ПОДВОДНОМ ВЗРЫВЕ
ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

В. К. Кедринский

(Новосибирск)

В рамках модели двухфазной среды, представляющей из себя жидкость с равномерно распределенными в ней кавитационными зародышами свободного газа, для осесимметричной постановки рассмотрена задача о развитии зоны кавитации и профиле волны разрежения в области регулярного отражения сферической ударной волны подводного взрыва от свободной поверхности.

Дан пример расчета профиля волны разрежения и зоны видимой кавитации в различные моменты времени для случая взрыва однограммового заряда на глубинах 3 и 5,3 см для исходных объемной концентрации газа 10^{-11} и радиуса кавитационного зародыша $5 \cdot 10^{-5}$ см. Результаты расчета сравниваются с экспериментом.

Введение. Вопрос о возникновении кавитации и особенностях структуры волновой картины вблизи свободной поверхности жидкости при отражении от нее ударной волны подводного взрыва рассматривался в работах [1—6].

Экспериментально исследованы параметры ударной волны и проведен анализ развития зоны кавитации при взрыве зарядов весом 1 г и 100 кг на глубинах 1—8 относительно радиусов зарядов [1]. В акустическом приближении на ЭВМ проведен расчет зон отрицательных давлений